
АННОТАЦИЯ

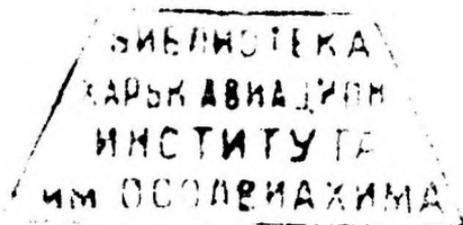
В книге дано комплексное изложение основ сопротивления материалов и строительной механики без применения высшей математики. Содержание книги охватывает материал, вполне достаточный для производства основных инженерных расчетов на прочность. Теоретические положения иллюстрируются примерами, взятыми главным образом из авиационной практики.

Книга предназначена служить учебным пособием для среднего авиационного технического состава и для лиц, изучающих сопротивление материалов и строительную механику как в учебной сети, так и самостоятельно.

А. М. АФАНАСЬЕВ,
Н. Г. КАЛИНИН, В. А. МАРЬИН

ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

76315-



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ОБОРОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ
Москва 1951

ПРЕДИСЛОВИЕ

Строительная механика или наука о прочности сооружений начала развиваться сравнительно поздно, несмотря на огромный, тысячелетиями накопленный опыт строительства всякого рода сооружений и машин.

Создание этой науки стало возможным только в результате развития общей механики, разделом которой она является, и математики. Подлинное развитие строительная механика получила только в XIX веке. Тогда и были созданы основы теории упругости и строительной механики стержневых систем.

Одним из первых русских ученых, занимавшихся проблемами строительной механики, был академик Михаил Васильевич Остроградский (1801—1861), крупнейший математик, много работавший в области аналитической механики и теории упругости, являющейся теоретической основой науки сопротивления материалов.

Крупных успехов в развитии науки о прочности конструкций достиг в это время профессор Дмитрий Иванович Журавский (1821—1891), справедливо считающийся одним из создателей теории мостовых ферм. Его исследования о работе ферм и о касательных напряжениях при изгибе балок создали Д. И. Журавскому заслуженную славу одного из творцов науки о прочности конструкций.

Очень большое значение для развития строительной механики имели работы профессора Петербургского института инженеров путей сообщения Ф. С. Ясинского (1856—1899) по устойчивости стержневых систем. До работ Ясинского потеря устойчивости была причиной многих катастроф с построенными сооружениями.

Среди талантливых русских инженеров конца XIX столетия следует назвать В. Г. Шухова (1853—1939). В своей разносторонней деятельности В. Г. Шухов много занимался и строительной механикой. В процессе искания наиболее легких и простых строительных конструкций В. Г. Шухов пришел к своей знаменитой конструкции решетчатого гиперболоида.

В начале XX века русская строительная механика обогатилась трудами А. Н. Крылова, И. Г. Бубнова и Б. Г. Галеркина. Труды

Этих ученых являются гордостью русской науки. Они послужили также основой для дальнейшего блестящего развития строительной механики после Октябрьской революции.

Академик А. Н. Крылов (1863—1945) — один из самых выдающихся математиков, механиков и инженеров. Основные его работы посвящены теории корабля. При этом часть работ, связанная с расчетом корабля на прочность, имеет и общинженерное значение, как, например, работа по расчету балок на упругом основании.

Работами А. Н. Крылова и его учеников создана также новая дисциплина «Строительная механика корабля». Ученик Крылова И. Г. Бубнов (1872—1919) написал свой знаменитый курс по строительной механике корабля, который до настоящего времени не потерял своего значения.

Академик Б. Г. Галеркин (1871—1945), так же как и А. Н. Крылов, начал свою научную деятельность в дореволюционное время и особенно широко и успешно развил ее в советский период. Его основные работы по строительной механике относятся главным образом к теории упругости и посвящены расчету пластин и оболочек. Б. Г. Галеркиным создан чрезвычайно плодотворный приближенный метод математического решения ряда инженерных задач, принесший ему мировую известность. Метод Галеркина широко применяется в настоящее время и обеспечил успешное развитие советскими исследователями многих важных областей строительной механики.

Тотчас же после Октябрьской революции партия и правительство начали заботиться о процветании науки, о создании новых научных кадров, о совместной работе старого и нового поколений ученых и об организации научно-исследовательских институтов. Индустриализация страны вызвала бурное развитие разнообразных отраслей науки, связанных с техникой. К таким отраслям принадлежит и строительная механика, в которой советские ученые намного опередили зарубежных. Укажем наиболее крупные достижения советских ученых по отдельным отраслям строительной механики.

Исследования академиков Б. Г. Галеркина, Н. И. Мухелишвили, Л. С. Лейбензона по математической теории упругости не знают себе равных в мировой науке.

Прикладная теория упругости и теория расчета пластин и оболочек созданы преимущественно трудами русских ученых. Кроме отмеченных выше работ Б. Г. Галеркина и И. Г. Бубнова, к ним относятся труды П. Ф. Папковича (1887—1946) — автора фундаментального труда «Строительная механика корабля», работы В. З. Власова и других ученых по теории оболочек и по расчету пластин.

Теория пластичности является одной из областей строительной механики, где успех советских ученых наиболее велик. В этой области исключительно важное значение имеют работы члена-

корреспондента Академии наук СССР А. А. Ильюшина, который может быть назван создателем теории малых упруго-пластических деформаций. Член-корреспондент Академии наук Н. М. Беляев, являющийся автором наиболее распространенного в настоящее время курса сопротивления материалов, впервые успешно решил ряд практически важных задач теории пластичности.

Теория стержневых систем представлена многочисленными трудами советских ученых, внесших значительный вклад в дальнейшее развитие этой науки. Отметим здесь труды проф. И. П. Прокофьева — «Теория инженерных сооружений» и члена-корреспондента Академии наук СССР И. М. Рабиновича — «Строительная механика стержневых систем».

Создание теории тонкостенных стержней является также заслугой советской науки. Фундаментальными в этой области являются работы проф. В. З. Власова, создавшего общую теорию расчета на прочность, устойчивость и колебания тонкостенных стержней произвольного открытого профиля. Известны также работы проф. А. А. Уманского, давшего теорию стержней замкнутого профиля и теорию кривых тонкостенных брусьев, и работы других советских ученых.

В области строительной механики самолета и, в частности, по теории прочности крыла и фюзеляжа советские ученые также внесли в науку крупный вклад. Строительная механика самолета призвана обеспечить прочность самолета при возможно меньшем весе конструкции. Для решения этой задачи большое значение имеют тонкостенные конструкции, которые являются специфической особенностью самолета как инженерного сооружения. Тонкостенные авиационные конструкции составляют в настоящее время объект обширной отрасли строительной механики, разработанной исключительно в послереволюционные годы.

Первые работы по строительной механике самолета принадлежат отцу русской авиации профессору Николаю Егоровичу Жуковскому и его ближайшему ученику проф. В. П. Ветчинкину. Капитальные работы по расчету крыла принадлежат проф. В. Н. Беляеву. Метод расчета касательных напряжений в крыле В. Н. Беляева и его уравнение трех осевых сил до настоящего времени применяются в расчетной практике проектирования самолетов.

Академик М. В. Келдыш и проф. Е. П. Гроссман создали важную для конструирования самолетов теорию вибраций частей самолета.

Много содействовали развитию строительной механики самолета работы профессоров и кафедр строительной механики ведущих авиационных вузов и академий, а также работы отделов прочности крупнейших конструкторских бюро по самолетостроению.

Таким образом важнейшие исследования по различным разделам строительной механики и сопротивления материалов, осо-

бенно за годы советской власти, были проведены отечественными учеными. Без преувеличения можно сказать, что по размаху и качеству научно-исследовательской работы в области строительной механики, руководимой крупнейшими специалистами, по развитию отдельных отраслей этой науки и по наличию научных школ наша страна занимает первое место в мире. Многие ученые и конструкторы удостоены Сталинских премий.

Исключительно велика тяга к знаниям советских людей и стремление их к совершенствованию своей специальности во всех областях деятельности. Нигде в мире не издается и не расходится такое огромное количество специальной литературы по различным отраслям знаний, как в нашей советской стране. Удовлетворение этой неутолимой жажды знаний — почетная обязанность всех научных работников.

Настоящая книга является учебным пособием для среднего технического авиационного состава и инженеров-практиков, самостоятельно изучающих основы сопротивления материалов и строительной механики.

Цель книги — дать читателю ясное представление о работе простейших конструкций и их элементов, научить грамотно производить элементарные расчеты прочности, встречающиеся в практике эксплуатации и ремонта авиационной техники, подготовить читателя к изучению специальных курсов и, в первую очередь, курса прочности самолета и тем самым создать базу для сознательного изучения новой авиационной техники.

При построении книги и изложении материала учитывалось, что читатель знаком с основными положениями тригонометрии и статики твердого тела. Все выводы и доказательства в книге изложены элементарно, без применения высшей математики. Для этого авторам пришлось предложить несколько необычные выводы ряда формул и ввести дополнительный раздел по элементарному вычислению некоторых интегралов.

Главное внимание авторов в соответствии с целевой установкой книги было обращено на выяснение физической стороны явлений. Всюду, где возможно, рассуждения проводятся применительно к авиационным конструкциям и их деталям. Для облегчения усвоения материала при самостоятельной работе книга иллюстрирована конкретными примерами расчета, кроме того, в ней даны задачи и контрольные вопросы. Вводная глава содержит некоторые краткие, наиболее необходимые сведения из математики и механики. Это вызвано желанием учесть неоднородность подготовки читателей и сделать книгу более доступной.

Совместное изложение сопротивления материалов и строительной механики в одной книге позволило при необходимой полноте содержания значительно сократить объем книги. Чтобы не загружать первые главы книги сложным материалом, рассмотренные пространственных ферм отнесено в конец книги, как наиболее трудное для начинающего читателя.

Книга набрана двумя шрифтами. Мелким шрифтом напечатаны разделы книги, предназначенные для более подготовленного читателя (они могут быть опущены при первом изучении книги), а также некоторые материалы справочного характера.

Работа была распределена между авторами следующим образом: главы I, II, XI, XII, XIII, XIV и XV написаны доцентом В. А. Марьиным, главы III, IV и V — доцентом Н. Г. Калининим, главы VI, VII, VIII, IX и X — доцентом А. М. Афанасьевым.

Авторы считают своим приятным долгом принести глубокую благодарность доценту В. Т. Байкову за большую работу, тщательно проделанную им при рецензировании и редактировании рукописи, и проф. А. А. Уманскому за ряд ценных указаний и советов, сделанных в процессе написания и подготовки рукописи к печати.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- σ — нормальное напряжение (кг/см^2 , кг/мм^2).
 τ — касательное напряжение (кг/см^2 , кг/мм^2).
 σ_α и τ_α — нормальное и касательное напряжения в произвольной площадке (кг/см^2 , кг/мм^2).
 σ_1 , σ_2 , σ_3 — главные напряжения (кг/см^2 , кг/мм^2).
 q — погонное касательное усилие в кг/см , интенсивность сплошной нагрузки (кг/м , кг/м^2 , кг/см , кг/см^2).
 N , Q , M , M_k — соответственно продольная сила (t , k'), поперечная сила (t , кг), изгибающий момент ($t\text{м}$, кгм , кгсм) и крутящий момент ($t\text{м}$, кгм , кгсм) в сечении бруса.
 $N_{\text{кр}}$ — критическая сила при продольном изгибе (кг , t).
 $\sigma_{\text{кр}}$ — критическое напряжение (кг/см^2 , кг/мм^2).
 $\tau_{\text{кр}}$ — критическое напряжение при сдвиге пластины в кг/см^2 .
 $\sigma_{\text{уп}}$ — предел упругости материала при простом растяжении (кг/см^2 , кг/мм^2).
 $\sigma_{\text{пц}}$ — предел пропорциональности (кг/см^2 , кг/мм^2).
 $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести (кг/см^2 , кг/мм^2).
 $\sigma_{\text{пч}}$ — предел прочности (кг/см^2 , кг/мм^2).
 $\sigma_{\text{уст}}$ — предел усталости (кг/см^2 , кг/мм^2).
 $[\sigma]$, $[\tau]$ — допускаемые напряжения (кг/см^2 , кг/мм^2).
 F — площадь поперечного сечения бруса (см^2 , мм^2).
 J — момент инерции площади сечения (см^4 , мм^4).
 W — момент сопротивления сечения (см^3 , мм^3).
 J_p — полярный момент инерции (см^4 , мм^4).
 W_p — момент сопротивления кручению круглого сечения (см^3 , мм^3).
 ω_k — удвоенная площадь, ограниченная контуром сечения тонкостенного бруса (см^2 , мм^2).
 t — толщина стенки тонкостенного бруса (см , мм).
 l — длина бруса, пролет балки (см , мм).
 Δl — абсолютное удлинение (см , мм).
 ϵ — относительное удлинение (безразмерная величина).
 Δ — абсолютный сдвиг (см , мм) свободный член канонического уравнения, знак приращения (безразмерная величина).
 γ — относительный сдвиг (безразмерная величина), вес единицы объема (кг/см^3 , $t/\text{м}^3$, кг/мм^3).

φ — абсолютный угол закручивания бруса в радианах, редуцированный коэффициент, коэффициент уменьшения допускаемого напряжения при продольном изгибе (безразмерные величины).

$\vartheta = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ — относительный угол закручивания (см⁻¹, м⁻¹, мм⁻¹).

y — прогиб балки (мм, см, м).

Θ — угол поворота сечения балки в радианах.

δ — перемещение точки или элемента конструкции, как линейное (см, мм), так и угловое (в радианах).

E — модуль нормальной упругости материала (кг/см², кг/мм²).

G — модуль сдвига (кг/см², кг/мм²).

μ — коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона, безразмерная величина).

ЛАТИНСКИЙ И ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТЫ

Греческий алфавит

Α, α — альфа	Ν, ν — ню (ни)
Β, β — бэта	Ξ, ξ — кси
Γ, γ — гамма	Ο, ο — омикрон
Δ, δ — дельта	Π, π — пи
Ε, ε — эпсилон	Ρ, ρ — ро
Ζ, ζ — дзета	Σ, σ — сигма
Η, η — эта	Τ, τ — тау
Θ, θ, ϑ — тета	Φ, φ — фи
Ι, ι — иота	Χ, χ — хи
Κ, κ — каппа	Υ, υ — ипсилон
Λ, λ — ламбда	Ψ, ψ — пси
Μ, μ — мю (ми)	Ω, ω — омега

Латинский алфавит

A, a — а	N, n — эн
B, b — бе	O, o — о
C, c — це	P, p — пе
D, d — де	Q, q — ку
E, e — е	R, r — эр
F, f — эф	S, s — эс
G, g — ге (же)	T, t — тэ
H, h — ха (аш)	U, u — у
I, i — и	V, v — ве
J, j — йот (жи)	W, w — дубль-ве
K, k — ка	X, x — икс
L, l — эль	Y, y — игрек
M, m — эм	Z, z — зет

Глава I

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Настоящая глава является вводной. В ней дается общее понятие о предметах сопротивления материалов и строительной механики, составляющих содержание данной книги, напоминаются необходимые в дальнейшем сведения из других дисциплин — механики, математики, графики — и поясняется метод изучения напряженного состояния тела в сопротивлении материалов и строительной механике — метод сечений.

§ 1. Содержание предмета

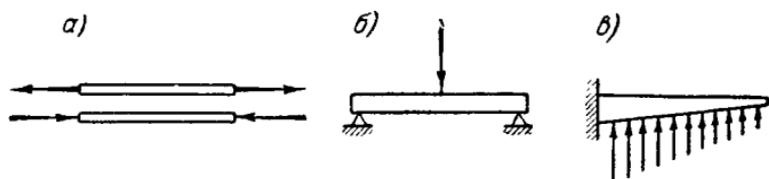
Все инженерные сооружения и машины и каждая их отдельная деталь несут ту или иную нагрузку. Так, крыло самолета испытывает давление воздуха, влияние собственного веса и сил инерции. Эти воздействия вызывают изгиб крыла и кручение его. Пролетное строение моста нагружено собственным весом и весом подвижного состава, проходящего по нему, и т. д.

Строительная механика изучает сопротивление сооружений нагрузкам. Она содержит методы исследования неизменяемости сооружения, методы проверки прочности и устойчивости сооружения и подбора его размеров, гарантирующие прочность и устойчивость сооружения при данной нагрузке, и методы определения деформации системы (т. е. изменения ее формы), вызванной действием нагрузки. Строительная механика состоит из двух частей. Одна часть, в которой изучается сопротивление различных материалов действующим на них силам и указывается, как выбрать надежные размеры отдельных деталей сооружения, называется *сопротивлением материалов*. Вторая часть, в которой рассматривается сооружение в целом и устанавливается распределение усилий, возникающих от действия нагрузки, между отдельными деталями сооружения, именуется собственно *строительной механикой* или *теорией сооружений*.

Для того чтобы узнать, в каких условиях работает та или иная деталь сооружения, следует, рассматривая ее в составе сооружения, определить действующие на нее силы; в следующей главе,

например, показано, как можно определить силы, растягивающие или сжимающие тот или иной элемент фермы моста или самолета. После этого можно, рассматривая деталь изолированно от сооружения, исследовать ее прочность и устойчивость при данной нагрузке, не угрожает ли ей разрушение и, если требуется, определить деформацию. Деформация деталей обуславливает и деформацию всего сооружения.

Детали сооружений и машин имеют разнообразную форму. Наиболее распространенной является форма *бруса*, т. е. тела, один из размеров которого (длина) велик по сравнению с двумя другими размерами (шириной и высотой). Прямой брус, в случае если он работает на растяжение или сжатие (фиг. 1.1,а), назы-



Фиг. 1.1. Примеры нагрузок.

а—брус подвергается действию растягивающих или сжимающих сил; б—брус, лежащий на двух опорах, изгибается сосредоточенной силой; в—брус, заделанный одним концом, изгибается распределенной нагрузкой.

вают стержнем, хотя это название иногда употребляется и для любого бруса. В случае изгиба (фиг. 1.1,б и 1.1,в) брус называют *балкой*. В инженерных сооружениях, а особенно в авиационных конструкциях широкое распространение имеют также детали, один размер которых (толщина) мал по сравнению с двумя другими (длиной и шириной), называемые *пластинами* и *оболочками* в зависимости от того, является ли поверхность, делящая толщину пополам, плоскостью или не является. Оболочки могут быть разомкнутые и замкнутые. Пластины и оболочки составляют обшивку самолетов и морских судов и являются конструктивными элементами многих сооружений.

Нагрузки, испытываемые инженерными конструкциями и их деталями, также весьма разнообразны. Они вызывают растяжение, сжатие, сдвиг, изгиб или кручение деталей. Чаще имеется то или иное сочетание указанных видов деформации. Каждому виду деформации посвящены специальные главы в настоящей книге.

Условимся относительно обозначения нагрузок. Сила, действующая на тело на некоторой небольшой части его поверхности, называемая *сосредоточенной*, обозначается на чертеже стрелкой (фиг. 1.1,а и 1.1,б). Так, например, сила, передаваемая колесом на рельс, есть сосредоточенная сила. Сосредоточенные силы измеряются в килограммах (кг) и тоннах (t). Нагрузка, распределен-

ная непрерывно на значительной площади, называется *сплошной* и обозначается на рисунке многими стрелками. Такова, например, аэродинамическая нагрузка на крыло (фиг. 1. 1, в). Сплошная нагрузка измеряется в килограммах (или тоннах) на квадратный сантиметр (или метр) площади ($кг/см^2$) или, если необходимо характеризовать распределение нагрузки только по длине, — на погонный сантиметр (или метр) длины балки ($кг/см$). Нагрузка, приходящаяся на единицу площади или длины, называется *интенсивностью* распределенной нагрузки.

Существует еще категория нагрузок — силы, распределенные по объему, как, например, вес, сила инерции. При расчетах эти силы обычно заменяются в зависимости от условий задачи или сосредоточенными силами или сплошной нагрузкой, распределенной по поверхности или по линии.

Нагрузки различно действуют на сооружение в зависимости от того, как они приложены. Например, сила, действующая по оси стойки (фиг. 1. 2, а), будет только сжимать стойку, а сила, смещенная от оси (фиг. 1. 2, б), будет не только сжимать, но и изгибать стойку. Изгиб стойки будет тем значительнее, чем больше произведение Pa .

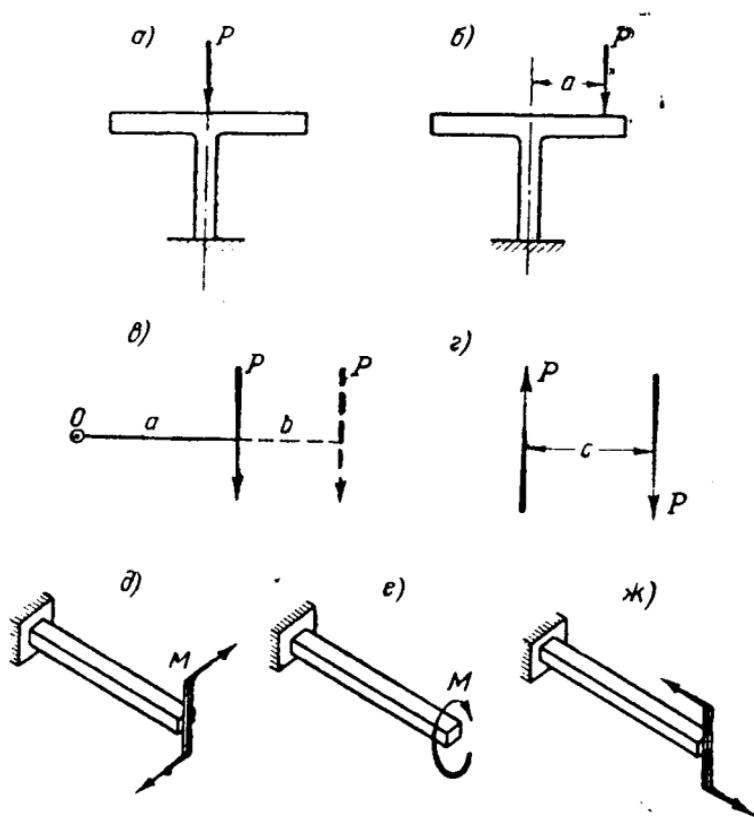
Произведение силы на длину перпендикуляра, опущенного на ее линию действия из некоторой точки (точка O на фиг. 1, 2, в), называется в механике *статическим моментом* или просто *моментом* силы относительно этой точки. Смещение силы в вышерассмотренном примере приводит, следовательно, к добавлению момента Pa , который и изгибает стойку.

Расстояние a (фиг. 1. 2, в) называется *плечом* силы. Чем больше плечо, тем больше момент. Если силу P перенести, увеличив плечо на величину b (фиг. 1. 2, в), то момент силы относительно точки O увеличится на величину $P \cdot b$.

Две равные по величине, параллельные и противоположно направленные силы (фиг. 1. 2, г) образуют так называемую *пару сил*. Расстояние (c) между силами, измеряемое по нормали к их направлению, называется *плечом пары*. *Момент пары* равен произведению Pc — силы на плечо пары. Пара сил часто называется просто моментом. Моменты измеряются в килограммо-метрах ($кгм$), килограммо-сантиметрах ($кгсм$), тонно-метрах ($тм$) и т. п. На фиг. 1. 2, д представлена пара сил, момент которой равен M , вызывающая кручение бруса. Эта пара действует в плоскости, перпендикулярной к оси бруса. На фиг. 1. 2, е изображено то же самое, но применено другое обозначение момента — кривой стрелкой. Мы будем применять оба обозначения. На фиг. 1. 2, ж показана пара, вызывающая изгиб бруса. Ее плоскость действия совпадает с осью бруса.

По характеру действия во времени нагрузки разделяются на статические и динамические. *Статической* нагрузкой называется нагрузка, прикладываемая постепенно и действующая постоянно. *Динамической* называется нагрузка, переменная во времени, при-

кладываемая внезапно или в течение малого промежутка времени, вызывающая явления удара и колебаний системы. Расчеты на динамические нагрузки обычно сводятся к статическим задачам путем введения коэффициентов, учитывающих динамический эффект. В настоящей книге рассматриваются лишь случаи статического нагружения.



Фиг. 1.2. Примеры нагрузок.

а—сила P сжимает стойку; *б*—сила P сжимает и изгибает стойку; *в*—при параллельном переносе силы изменяется момент; *г*—пара сил (образует момент $P \cdot c$); *д* и *е*—момент M закручивает брус; *ж*—момент изгибает брус.

§ 2. Графики

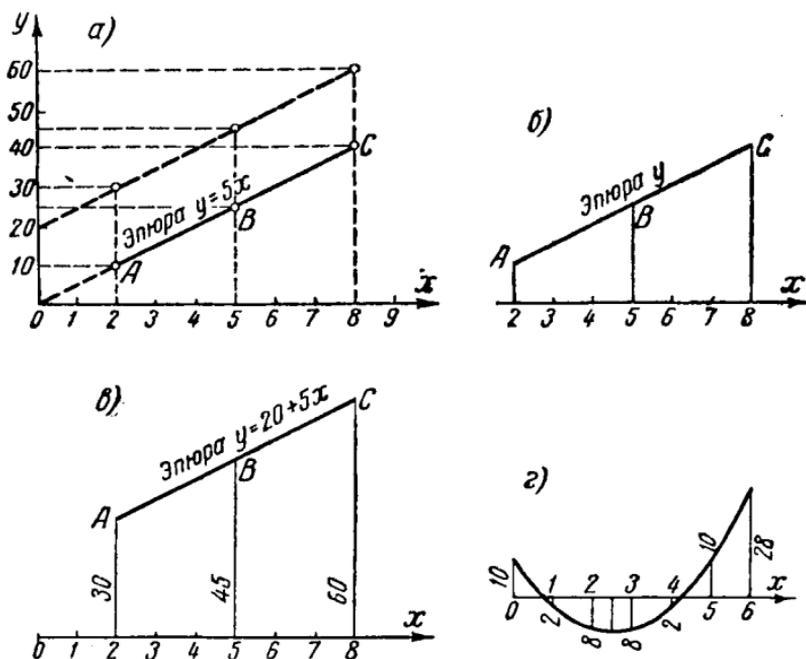
В строительной механике широко пользуются графическими методами для решения задач и иллюстрации теоретических положений. В настоящем параграфе показано пользование системой координат для изображения некоторых математических зависимостей.

Пример 1. Пусть дана зависимость:

$$y = 5x. \quad (1)$$

Если величине x дадим какое-либо значение, например, 2, то по уравнению (1) получим соответствующее значение y , в данном случае $y = 5 \times 2 = 10$. Положив $x = 5$, будем иметь $y = 5 \cdot 5 = 25$ и т. д. Значение y зависит от значения x ; в таких случаях говорят, что y есть функция от x .

Построим график функции (1). Проведем две взаимно перпендикулярные оси x и y , которые называются *осями координат* (фиг. 1.3,а). На этих осях будем откладывать в масштабе значения x и y . Масштабы отрезков по оси x и y при этом могут быть различными. Отложив отрезок $x=2$ по горизонтальной оси x , а из его конца по вертикали отрезок $y=10$, поставим первую точку графика A . Значения $x=2$ и $y=10$ суть *координаты* точки A . Координата x называется *абсциссой*, координата y — *ординатой* точки. Отложив также по оси x значение $x=5$ и соответствующее значение $y=25$, получим точку B , координаты которой суть 5 и 25.



Фиг. 1.3. Примеры графиков.

а — график функции $y=5x$ в прямоугольной системе координат x и y ; б — тот же график, причем ось y не показана (обычный вид эпюры); в — график функции $y=20+5x$; г — график функции $y=3x^2-15x+10$.

Можно получить сколько угодно точек, удовлетворяющих зависимости (1). Так, при $x=8$ будет $y=5 \cdot 8=40$; соответствующая точка C показана на чертеже. Соединяя все эти точки, замечаем, что получается прямая линия. Эта прямая является *графиком* или *эпюрой* функции (1). Координаты каждой точки графика удовлетворяют уравнению (1).

Продолжая полученную прямую (см. пункт в), видим, что она проходит через начало координат O . В самом деле, положив $x=0$, из уравнения (1) имеем $y=0$, т. е. точка O также удовлетворяет уравнению (1).

Иногда ось ординат y не изображается на чертеже. Тогда эпюра имеет вид, показанный на фиг. 1.3,б.

Пример 2. Построим график функции: $y=5x+20$. (2) Положив $x=2$, получим $y=5 \cdot 2+20=30$. Построим соответствующую точку A на графике (фиг. 1.3,в). Положив $x=5$, имеем из уравнения (2) $y=45$; соответствующая точка B также нанесена на чертеже. При $x=8$ находим $y=60$ (точка C). Откладывая таким образом произвольно большое количество точек и соединяя их друг с другом, убеждаемся, что получающийся график также является прямой линией, но не проходящей на этот

раз через начало координат (на фиг. 1.3,а показана пунктиром). Полученная прямая отсекает на оси ординат отрезок, равный 20, т. е. равный свободному члену уравнения (2).

Таким образом *эпюра* оказывается прямолинейной, если уравнение, ею изображаемое, является уравнением первой степени.

Пример 3. Теперь рассмотрим случай, когда уравнение содержит x во второй степени, например,

$$y=3x^2-15x+10. \quad (3)$$

Будем давать величине x последовательно значения, указанные в табл. 1; там же приведены соответствующие значения y . Так, при $x=0$ имеем $y=10$, при $x=1$ соответственно $y=3 \cdot 1^2-15 \cdot 1+10=-2$ и т. д.

Таблица 1

$x=$	0	1	2	3	4	5	6
$y=$	10	-2	-8	-8	-2	10	28

Откладывая ординаты в одинаковом масштабе (фиг. 1.3,г) положительные попрежнему вверх, а отрицательные вниз от оси x и соединяя затем концы ординат плавной кривой, построим искомую эпюру по уравнению (3). Полученная кривая называется *параболой второй степени* или квадратной параболой.

В случае если уравнение типа (3) содержит x в третьей степени, то эпюра y также криволинейна — является параболой третьей степени или кубической параболой.

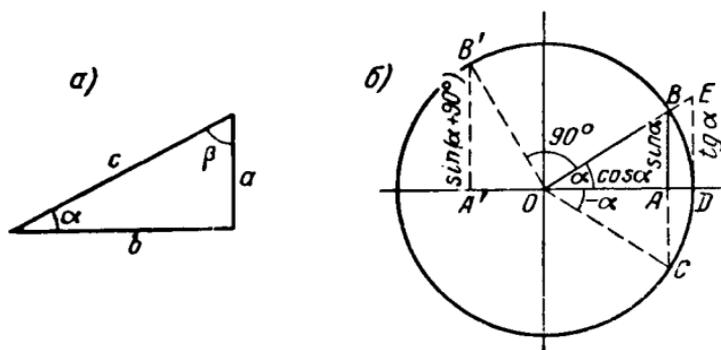
Задачи. 1. Построить прямолинейные эпюры: $y=3x$; $y=0,8x-6$.

2. Построить квадратные параболы: $y=0,5x^2$; $y=\frac{1}{3}x^2+10$; $y=0,8x^2-5x-8$.

3. Построить кубические параболы: $y=2x^3-15$; $y=x^3-18x^2+20$.

§ 3. Сведения из тригонометрии

Рассмотрим прямоугольный треугольник (фиг. 1.4, а) с катетами a и b , гипотенузой c и острыми углами α и β . Отношения $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ называ-



Фиг. 1.4. Тригонометрические функции.

а) $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$; б) изображение тригонометрических функций на круге, радиус которого равен единице.

ются соответственно *синусом* и *косинусом* угла α и обозначаются $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. Отношение $\frac{a}{b}$ называется *тангенсом* угла α и обозначается $\operatorname{tg} \alpha$.

Величины $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ зависят от величины угла α и называются тригонометрическими¹ функциями угла α (они не зависят от величин a , b и c сторон треугольника, а только от их отношений). В табл. 2 приведены значения тригонометрических функций² для некоторых значений угла α .

Таблица 2

Числовые значения \sin , \cos и tg

α граду- сов	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α граду- сов	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	1	0	50°	0,766	0,643	1,192
5°	0,087	0,996	0,087	55°	0,819	0,574	1,428
10°	0,174	0,985	0,176	60°	0,866	0,500	1,732
15°	0,259	0,966	0,268	65°	0,906	0,423	2,145
20°	0,342	0,940	0,364	70°	0,940	0,342	2,747
25°	0,423	0,906	0,466	75°	0,966	0,259	3,732
30°	0,500	0,866	0,577	80°	0,985	0,174	5,671
35°	0,574	0,819	0,700	85°	0,996	0,087	11,430
40°	0,643	0,766	0,839	90°	1	0	∞^3
45°	0,707	0,707	1				

Отметим такие две зависимости между функциями \sin , \cos и tg :

$$1) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha,$$

т. е. частное от деления синуса угла на его косинус равно тангенсу этого угла;

$$2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1,$$

т. е. сумма квадратов синуса и косинуса одного и того же угла равна единице.

Функции дополнительного угла. Напишем выражения функции угла β (фиг. 1.4, а), называемого дополнительным углом к углу

¹ От греческого слова тригонон — треугольник.

² Более подробные таблицы можно найти в справочниках.

³ Символ ∞ означает бесконечно большую величину.

α , так как $\alpha + \beta = 90^\circ$ и, следовательно, угол β дополняет угол α до 90° . Очевидно, $\sin \beta = \frac{b}{c}$ и $\cos \beta = \frac{a}{c}$. Сравнивая это с функциями угла α , видим, что

$$\sin \beta = \cos \alpha \quad \text{и} \quad \cos \beta = \sin \alpha. \quad (4)$$

Но $\beta = 90^\circ - \alpha$. Таким образом

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Функции углов, больших 90° . Тригонометрические функции могут быть изображены графически. Опишем круг (фиг. 1. 4, б) радиусом, равным единице. Затем отложим центральный угол α и построим прямоугольный треугольник OAB . По определению синус угла есть отношение противолежащего катета к гипотенузе, т. е. в данном случае $\sin \alpha = \frac{AB}{OB}$. Но гипотенуза OB равна радиусу круга, т. е. единице. Следова-

тельно, $\sin \alpha = \frac{AB}{1} = AB$. Таким образом отрезок AB выражает собой $\sin \alpha$.

Он меньше радиуса круга, следовательно, меньше единицы. Аналогично можно показать, что отрезок OA выражает $\cos \alpha$ и отрезок $DE = \operatorname{tg} \alpha$. На основании такого способа изображения тригонометрических функций они называются также *круговыми*. Предположим, что угол α увеличивается, тогда $\sin \alpha$ будет увеличиваться, а $\cos \alpha$ — уменьшаться. При $\alpha = 90^\circ$ получим $\sin \alpha = 1$ и $\cos \alpha = 0$. При дальнейшем увеличении угла синус будет уменьшаться, а косинус — увеличиваться, но в отрицательную сторону (будет откладываться влево от центра круга). Пусть угол увеличился на 90° . Теперь он имеет значение $90^\circ + \alpha$. Точка B перешла в положение B' . Отрезок $A'B'$ выражает собой синус угла $90^\circ + \alpha$: $A'B' = \sin(90^\circ + \alpha)$. Отрезок OA' выражает $\cos(90^\circ + \alpha)$, причем он отрицателен.

Треугольники OAB и $OA'B'$ равны. Следовательно, $A'B' = OA$, а это значит, что

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha.$$

Отрезки $A'O$ и AB равны друг другу по абсолютной величине, но один из них отрицателен. Они будут равны друг другу, если у одного из них изменить знак. Отсюда

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha.$$

Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha, & \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha, & \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha. \end{aligned}$$

Функции отрицательного угла. Отложим угол α не вверх, а вниз (угол AOC на фиг. 1. 4, б). Такой угол (отсчитываемый по ходу часовой стрелки) будем считать отрицательным. Видим, что синус угла $-\alpha$ (отрезок AC) равен синусу угла α , но знаки у них различные. Следовательно,

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Косинусы обоих углов выражаются одним и тем же отрезком OA :

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

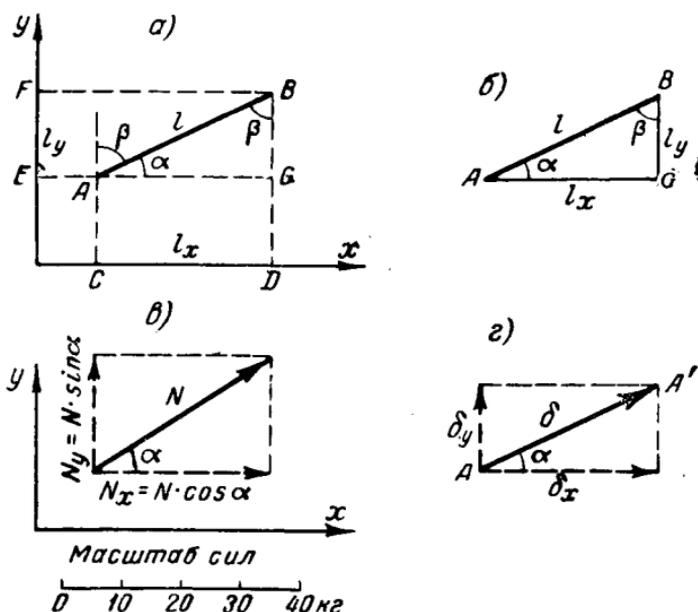
Функции двойного угла. Если функции угла α известны, то можно определить функции угла, вдвое большего, по формулам:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

Доказательство этих формул приводится в курсах тригонометрии.

§ 4. Изображение в проекциях

Проекция отрезка прямой. Пусть имеется отрезок прямой AB (фиг. 1.5, *a*) длиной l , расположенный по отношению к осям координат x и y , как показано на фигуре. Опустив из концов A и B отрезка перпендикуляры на оси координат, получим точки C, D, E и F , называемые проекциями точек A и B , и отрезки CD и EF , называемые проекциями отрезка AB на оси координат.



Фиг. 1.5. Проекция отрезка прямой и вектора в плоскости.

a) и *б*) l_x и l_y —проекция отрезка l на оси x и y ; *в*) N_x и N_y —проекция вектора силы N ; *з*) δ_x и δ_y —проекция вектора перемещения δ .

Обозначим через l_x и l_y длины проекций и через α и β —углы, образуемые отрезком AB с направлениями осей x и y , и рассмотрим прямоугольный треугольник ABG (фиг. 1.5, *б*). Замечаем, что $\frac{l_x}{l} = \cos \alpha$ и $\frac{l_y}{l} = \cos \beta$.

Отсюда

$$l_x = l \cos \alpha \quad \text{и} \quad l_y = l \cos \beta, \quad (5)$$

т. е. длина проекции отрезка равна длине отрезка, умноженной на косинус угла между направлением отрезка и осью проекций.

Учитывая зависимости (4), можно написать также

$$l_x = l \sin \beta \quad \text{и} \quad l_y = l \sin \alpha.$$

Зная проекции, легко найти длину отрезка по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{(l_x)^2 + (l_y)^2}. \quad (6)$$

Вектор. Силы часто изображают векторами — отрезками прямой, откладываемыми в направлении действия силы в определенном масштабе, называемом масштабом сил (фиг. 1.5, в). Так, например, можно условиться, что 1 см длины вектора означает 5 кг. Тогда вес в 10 кг изобразится вертикальным отрезком, направленным сверху вниз, длиной 2 см, а вес в 20 кг — таким же отрезком длиной 4 см. Иногда масштаб дается непосредственно на чертеже (фиг. 1.5, в). Направление силы изображается на векторе стрелкой.

Проекция вектора — также векторы. Если вектор, изображающий силу N (фиг. 1.5, в), образует угол α с осью x , то проекция его N_x на ось x равна, как показано выше, $N \cos \alpha$, а проекция N_y на ось y — равна $N \sin \alpha$.

Проекция вектора считается положительной, если ее направление совпадает с направлением оси проекций.

Проекции N_x и N_y называются *составляющими* вектора. В самом деле, если бы на некоторую точку действовали одновременно силы N_x и N_y , то их равнодействующая представлялась бы диагональю параллелограмма, построенного на векторах N_x и N_y (см. далее § 5), т. е. вектором N .

Вектор может изображать также перемещение, как и ряд других величин, имеющих направление. Пусть вектор длиной δ (фиг. 1.5, з) изображает перемещение некоторой точки в плоскости чертежа. Проекция этого перемещения на оси x и y будут выражаться так:

$$\delta_x = \delta \cos \alpha \quad \text{и} \quad \delta_y = \delta \sin \alpha.$$

Они называются *составляющими* перемещения δ , так как совместно составляют δ . В самом деле, пусть некоторая точка A (фиг. 1.5, з) получила перемещение снизу вверх, равное δ_y , и затем горизонтальное перемещение δ_x . Очевидно, эта точка придет в положение A' , следовательно, результирующее ее перемещение равно AA' , т. е. δ .

Система координат в пространстве. Теперь представим себе три взаимно перпендикулярные оси координат x , y и z (фиг. 1.6, а). Эти три оси ограничивают три *плоскости координат* xOy , yOz и xOz . Пусть внутри угла, образованного координатными плоскостями, находится отрезок прямой AB , расположенный как угодно в пространстве. Если из концов этого отрезка опустить перпендикуляры на все три плоскости, то, соединяя основания перпендикуляров прямыми, лежащими в этих плоскостях, получим три проекции отрезка CD , EF и GH . Одна из проекций (в данном случае CD) называется *основной* или *лицевой* (фасад), другая (EF) — *профильной*, проекция на горизонтальную плоскость (GH) называется *планом*. На чертежах координатные плоскости, называемые также плоскостями проекций, изображаются развернутыми в одну плоскость (фиг. 1.6, б).

Изображение тел в проекциях широко применяется в технике. Оно дает полное представление о предмете; на фиг. 1.6, в даны, например, три проекции самолета.

Проекция на оси. Если спроектировать отрезок AB , опуская перпендикуляры не на плоскости координат, а на самые координатные оси x , y и z , то получатся проекции JK , LM , NP (фиг. 1.6, а). Обозначим длину отрезка AB через l , а длины его проекций на оси координат — через l_x , l_y и l_z . Длины проекций не зависят от расстояния отрезка от осей координат, а только от его длины и направления. Если провести через точку A новые оси параллельно прежним, то проекции отрезка AB на эти оси также будут равны l_x , l_y и l_z (фиг. 1.6, в). Длина проекции равна, как и ранее, длине отрезка, умноженной на косинус угла, образуемого направлением отрезка с соответствующей осью координат:

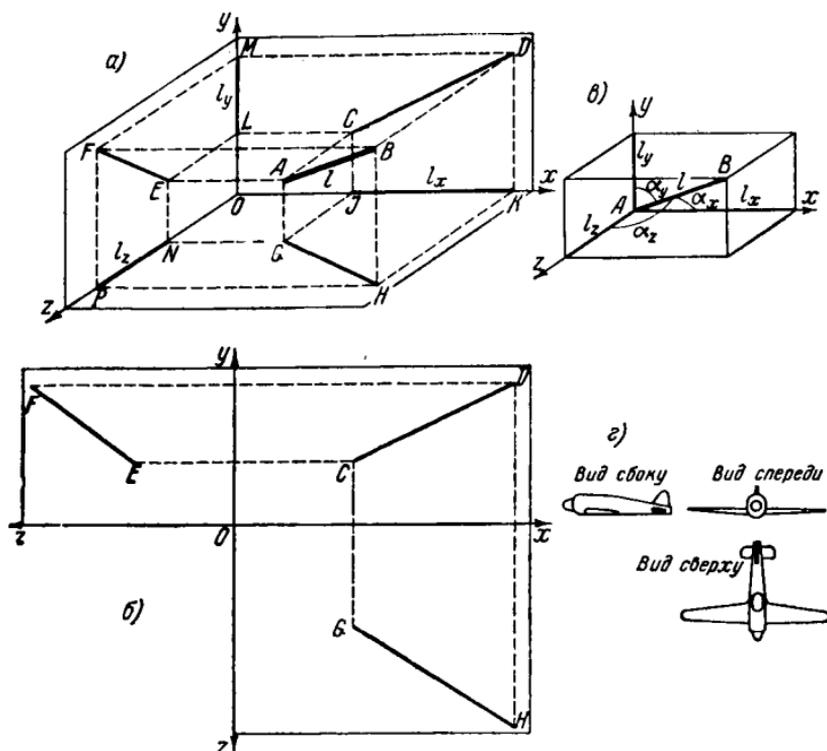
$$l_x = l \cos (AB, x); \quad l_y = l \cos (AB, y); \quad l_z = l \cos (AB, z) \quad (7)$$

или, при другом обозначении углов (фиг. 1.6, в),

$$l_x = l \cos \alpha_x, \quad l_y = l \cos \alpha_y, \quad l_z = l \cos \alpha_z.$$

Отрезок AB является диагональю прямоугольного параллелепипеда, стороны которого равны проекциям отрезка на оси координат. Но диагональ прямоугольного параллелепипеда равна корню квадратному из суммы квадратов его измерений. Следовательно, для длины l отрезка имеем формулу [аналогичную формуле (6)]:

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}. \quad (8)$$



Фиг. 1.6. Проекция в пространстве.

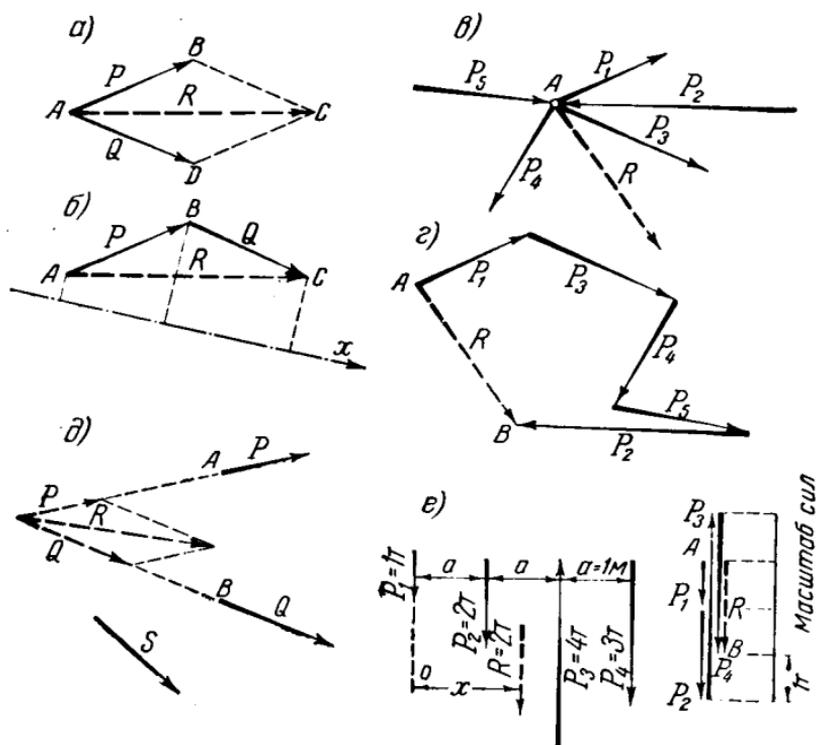
a —отрезки CD , EF и GH —проекция отрезка AB на плоскости координат; отрезки l_x , l_y и l_z —проекция отрезка AB на оси координат; b —развертка плоскостей проекций в плоский чертеж; v —углы α_x , α_y и α_z между прямой AB и осями координат; z —пример изображения предмета в проекциях.

§ 5. Сложение сил. Центр тяжести

Если на некоторое тело действуют две силы P и Q (фиг. 1.7, a), проходящие через одну и ту же точку A , то эти две силы можно заменить одной силой R , получаемой графически как диагональ параллелограмма, построенного на силах P и Q , отложенных в одинаковом масштабе. Сила R называется *равнодействующей* сил P и Q , являющихся ее *составляющими*. Отыскание равнодействующей называется *сложением сил*. Обратное действие — нахождение составляющих — называется *разложением* силы.

Равнодействующую R можно найти, очевидно, и без построения всего параллелограмма полностью, достаточно построить один треугольник его ABC (фиг. 1.7,б).

Аналогично можно получить равнодействующую и в случае многих сил (фиг. 1.7,в). Отложим все силы цепочкой одну за другой в произвольной последовательности, но в одинаковом мас-



Фиг. 1.7. Сложение сил в плоскости.

а—получение равнодействующей двух сил построением параллелограмма; б—определение величины равнодействующей двух сил построением треугольника; в—к точке A приложены силы P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 . Равнодействующая их найдена при помощи построения, показанного на фиг. 2; г—силовой многоугольник; д—чтобы найти равнодействующую трех сил (P, Q и S), складываем сперва две из них (P и Q) и затем полученную равнодействующую (R) складываем с третьей силой (S); е—сложение параллельных сил.

штабе и с сохранением направления каждой силы (фиг. 1.7,г),—будем иметь так называемый силовой многоугольник. Замыкая многоугольник, т. е. соединяя начало построения — точку A — с концом его — B , получим равнодействующую R . Направление ее по периметру многоугольника противоположно направлению остальных сил (составляющих). Так как все силы проходят через одну и ту же точку (точка A на фиг. 1.7,в), то и равнодействующая их проходит через ту же точку.

Для определения равнодействующей не обязательно знать точки приложения составляющих — нужны только их линии действия. Пусть, например, силы P и Q (фиг. 1. 7, д) расположены в одной плоскости и приложены в различных точках A и B . Продолжив направления этих сил до точки их пересечения и сложив их здесь так, как если бы они были здесь приложены, получим равнодействующую R сил P и Q . Пользуясь этим приемом, можно произвести сложение и большего количества сил. Пусть имеем в одной плоскости три силы P , Q и S , не проходящие через одну и ту же точку (фиг. 1. 7, д). Сперва складываем силы P и Q , а затем полученную равнодействующую R сложим с третьей силой S тем же путем (на фигуре это второе построение не показано).

Напомним важные свойства равнодействующей: 1) проекция равнодействующей на любую ось равна сумме проекций составляющих на ту же ось (например, см. проекции на ось x на фиг. 1. 7, б); 2) момент равнодействующей относительно любой точки (или оси) равен сумме моментов составляющих относительно той же точки (оси). Эти свойства равнодействующей будут нами использованы в дальнейшем. Подчеркиваем, что обе суммы являются алгебраическими, т. е. все слагаемые имеют знак плюс или минус в зависимости от направления силы. Момент силы будем считать положительным, если сила действует в направлении хода часовой стрелки относительно данной точки (это правило произвольно, применяется и обратное правило знаков).

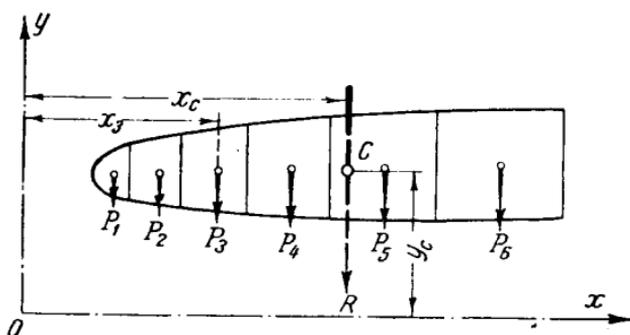
Второе свойство равнодействующей является основанием для нахождения положения равнодействующей аналитическим путем. Пусть, например, требуется найти равнодействующую параллельных сил $P_1=1$ т, $P_2=2$ т, $P_3=4$ т и $P_4=3$ т, отстоящих друг от друга на расстоянии $a=1$ м (фиг. 1. 7, е). Отложим силы в цепочку, как показано справа. Все силы откладываются на одной прямой, но они для большей наглядности несколько смещены друг от друга. Соединяя начало построения A с концом B , получаем равнодействующую R (показана пунктиром). Она равна 2 т, что видно по масштабу сил. Остается найти ее положение, определяемое расстоянием от некоторой определенной точки, например, от силы P_1 . Для этого воспользуемся вышеуказанным свойством равнодействующей.

Сумма моментов составляющих (P_1 , P_2 , P_3 и P_4) относительно точки O , взятой на линии действия силы P_1 , равна $P_1 \cdot 0 + P_2 \cdot a - P_3 \cdot 2a + P_4 \cdot 3a = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 3$ тм. Момент равнодействующей $Rx = 2x$. Приравняв сумму моментов составляющих моменту равнодействующей, получим $3 = 2x$, откуда $x = 1,5$ м.

Ц е н т р т я ж е с т и. Центр тяжести тела является точкой, через которую проходит равнодействующая сил тяжести, действующих на данное тело, при любом его положении. Так как силы тяжести всех частиц, составляющих тело, параллельны друг другу,

определение центра тяжести представляет задачу, аналогичную предыдущей.

Пусть, например, требуется определить центр тяжести плоской фигуры (фиг. 1.8), вырезанной из листа постоянной толщины. Разобьем всю фигуру на малые участки и определим хотя бы приближенно вес и центр тяжести каждого участка. Если участки достаточно малы, то каждый из них можно принять (приближенно) за прямоугольник. Пусть веса участков равны $P_1, P_2, P_3 \dots$ (фиг. 1.8). Равнодействующая их равна их сумме: $R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots = \sum P$. Здесь знак \sum заменяет слово «сумма».



Фиг. 1.8. Определение центра тяжести площади.

Положение равнодействующей определим, как в предыдущей задаче, взяв сумму моментов относительно произвольной точки O . Плечи сил $P_1, P_2, P_3 \dots$ относительно точки O равны соответственно $x_1, x_2, x_3 \dots$. Сумма моментов запишется так: $P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \dots$ или, короче, $\sum Px$. Приравняем полученную сумму моментов составляющих моменту равнодействующей: $\sum Px = Rx_c$. Здесь x_c — расстояние от точки O до искомого центра тяжести по нормали к направлению сил. Найдем

$$x_c = \frac{\sum Px}{R} = \frac{\sum Px}{\sum P}.$$

Вес R пластины можно вычислить, если известны размеры и материал рассматриваемой пластины. Пусть толщина пластины постоянна и равна t , площадь ее боковой поверхности равна F , а материал однороден и имеет удельный вес γ . Умножая площадь на толщину, находим объем Ft пластины. Вес ее равен объему, умноженному на удельный вес: $R = Ft\gamma$. Аналогично выражаются веса участков: $P_1 = f_1t\gamma$, $P_2 = f_2t\gamma$, $P_3 = f_3t\gamma, \dots$, где $f_1, f_2, f_3 \dots$ — площади участков.

Подставляя значения P в формулу для x_c , получаем

$$x_c = \frac{\sum f_1t\gamma}{Ft\gamma}.$$

Сумма, стоящая в числителе, в развернутом виде выражается так:

$$(f_1 t \gamma x_1 + f_2 t \gamma x_2 + f_3 t \gamma x_3 + \dots).$$

Постоянные величины t и γ , входящие во все слагаемые, можно вынести за скобку. Тогда сумма принимает вид

$$t \gamma (f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \dots)$$

или

$$t \gamma \Sigma f x.$$

Следовательно, формула для координаты x_c центра тяжести представится следующим образом:

$$x_c = \frac{t \gamma \Sigma f x}{F t \gamma} = \frac{\Sigma f x}{F}. \quad (9)$$

Значение x_c не зависит от t и γ , а только от площади пластины. Но это справедливо только для пластины постоянной толщины из однородного материала.

Сумма

$$\Sigma f x = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 \dots \quad (9a)$$

называется *статическим моментом площади* относительно оси y по аналогии со статическим моментом силы. Из формулы (9) имеем

$$\Sigma f x = F x_c, \quad (9b)$$

т. е. *статический момент площади равен произведению всей площади на расстояние центра тяжести ее от оси моментов* (в данном случае от оси y). Отсюда, если ось проходит через центр тяжести, то статический момент равен нулю.

Статический момент площади будем обозначать через S с индексом x или y , показывающим ось моментов. В данном случае имеем $\Sigma f x = S_y$. Применяв это обозначение, окончательно запишем формулу для абсциссы центра тяжести x_c так:

$$x_c = \frac{S_y}{F}. \quad (9b)$$

Здесь определена только абсцисса центра тяжести C . Этого обычно бывает достаточно при решении практических задач. Если нужно определить также ординату y_c (фиг. 1. 8), то, рассуждая тем же путем, легко получить формулу

$$y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (9г)$$

§ 6. Равновесие тел

Если равнодействующая всех приложенных к телу сил и момент их относительно любой оси равны нулю, то тело находится, как говорят, в состоянии статического равновесия, т. е. покоя или

равномерного прямолинейного движения. И, наоборот, если тело находится в состоянии равновесия, то равнодействующая и момент всех сил, действующих на тело, относительно любой оси, равны нулю.

Рассмотрим подробнее эти условия. Если равнодействующая R равна нулю, то и каждая из трех ее проекций R_x , R_y и R_z равна нулю. Но проекция равнодействующей на всякую ось равна сумме проекций составляющих. Следовательно, первое условие равновесия приводит к следующим трем уравнениям:

$$R_x = \sum P_x = 0, \quad R_y = \sum P_y = 0, \quad R_z = \sum P_z = 0.$$

Здесь $\sum P_x$, $\sum P_y$ и $\sum P_z$ — суммы проекций всех сил, приложенных к телу, соответственно на оси x , y и z . При этом заметим, что оси x , y и z не обязательно должны быть перпендикулярны друг другу и проходить через одну и ту же точку. Они лишь не должны быть параллельны друг другу. Написанные равенства носят название уравнений проекций. Суммы проекций $\sum P_x$, $\sum P_y$ и $\sum P_z$ часто обозначают так: $\sum X$, $\sum Y$ и $\sum Z$. Применяя эти обозначения, получаем уравнения проекций в виде

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0. \quad (10)$$

Аналогично второе условие равновесия приводит к трем уравнениям моментов:

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0. \quad (11)$$

Здесь $\sum M_x$, $\sum M_y$ и $\sum M_z$ — суммы моментов всех сил, приложенных к телу, относительно трех осей — x , y и z .

Уравнения равновесия (10) и (11) имеют широчайшее применение в строительной механике. Сформулируем их словесно: *если система сил, расположенных как угодно в пространстве, является уравновешенной, то суммы проекций всех этих сил на три оси, не параллельные друг другу, и суммы моментов их относительно трех осей равны нулю.* Проекции сил и моменты понимаются алгебраически, т. е. с учетом их знаков.

Если все силы системы пересекаются в одной точке, то, взяв оси x , y и z проходящими через эту точку, получим, что плечи всех сил относительно осей x , y и z равны нулю, и, следовательно, моменты всех сил равны нулю независимо от величин сил (как говорят, тождественно), т. е. уравнения (11) отпадают. Для сил, пересекающихся в одной точке, возможно составить только три уравнения равновесия — уравнения проекций (10).

Случай плоской системы сил. Если все силы лежат в одной плоскости, то условия их равновесия выражаются следующими тремя уравнениями:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0. \quad (12)$$

Первые два из них — уравнения проекций. Одно уравнение проекций из общей системы уравнений (10) в данном случае отпадает, так как сумма проекций сил, лежащих в одной плоскости, на ось, перпендикулярную к этой плоскости, тождественно равна нулю.

Последнее уравнение из системы уравнений (12) есть уравнение моментов относительно любой оси, перпендикулярной к плоскости сил или, что то же, относительно любой точки, взятой в плоскости сил. Остальные два уравнения моментов из общей системы уравнений (11) в данном случае отпадают.

Сформулируем окончательно условия равновесия сил, лежащих в одной плоскости.

Если система сил, расположенных в одной плоскости, является уравновешенной, то суммы проекций всех этих сил на две оси (не параллельные друг другу) и сумма моментов их относительно произвольно взятой точки равны нулю¹.

Применение уравнений (10) и (11) иллюстрируется во многих главах книги и особенно в главе XV. Уравнения (12) используются в каждой главе. В следующем параграфе показано применение уравнений равновесия для определения реакций опор.

§ 7. Реакции опор

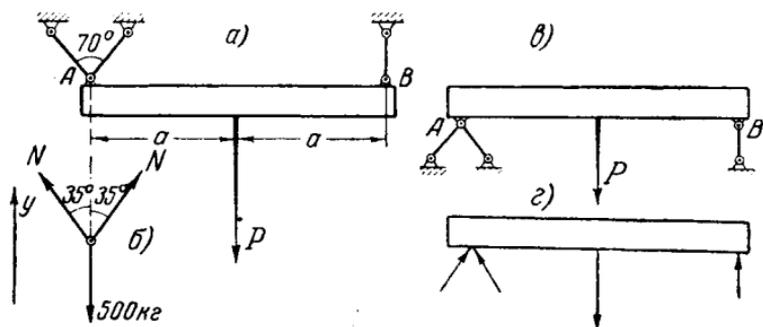
Во многих технических задачах нагрузки, действующие на систему, лежат в одной плоскости, в которой расположена и сама система. В этих случаях опорные устройства рассматриваются также с точки зрения обеспечения неподвижности системы в плоскости. Для ознакомления с опорными устройствами и определением опорных реакций в настоящем параграфе рассматривается именно закрепление бруса в плоскости. Опорные устройства, обеспечивающие неподвижность системы в пространстве, будут рассмотрены в дальнейшем.

Для того чтобы прикрепить брус, нужны те или иные опоры. Различают три основных типа опор: 1) *подвижная опора*, 2) *неподвижная опора* и 3) *защемление или заделка*. На следующих примерах покажем эти типы опор и определение их реакций, т. е. тех сил, которые опоры передают на брус.

Брус AB (фиг. 1.9,а) подвешен на трех проволочных тягах. Сила $P=1000$ кг, и все тяги расположены в одной плоскости (в плоскости чертежа). Определим усилия в тягах. Точка приложения нагрузки P расположена на равных расстояниях от точек подвеса A и B . Поэтому на точки A и B передаются одинаковые силы $\frac{P}{2}=500$ кг. В точке B передаваемая сила уравновешивается усилием одной тяги, следовательно, усилие этой тяги также равно 500 кг. В точке A сила 500 кг воспринимается двумя

¹ Каждое уравнение проекций может быть по желанию заменено уравнением моментов относительно некоторой новой точки.

тягами (фиг. 1.9,б). Чтобы определить усилия N этих тяг, используем условия равновесия. Так как сила 500 кг уравнивается двумя силами N , сумма проекций всех трех сил на любую ось должна быть равна нулю. Возьмем сумму проекций на ось y : $\sum Y = -500 + 2 \cdot N \cos 35^\circ = 0$. Проекция силы 500 кг

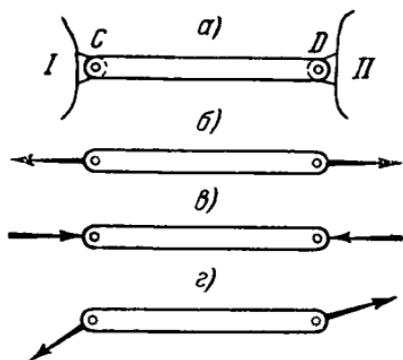


Фиг. 1.9. Реакции опор.

a —брус имеет неподвижную опору A , состоящую из двух стержней, и подвижную опору B , состоящую из одного стержня; b —реакции N опорных стержней уравнивают приходящую на них нагрузку; c —случай, когда опорные стержни работают на сжатие; z —реакции опорных стержней.

взята со знаком минус, так как направление ее противоположно принятому направлению оси y . Учитывая, что $\cos 35^\circ = 0,819$ (по табл. 2 в § 3), находим

$$N = \frac{500}{2 \cos 35^\circ} = \frac{500}{2 \cdot 0,819} = 306 \text{ кг.}$$



Фиг. 1.10. Условия работы стержня с шарнирами по концам.

a —стержень, соединяющий блоки I и II , имеет шарниры на концах C и D ; b и $в$ —возможные случаи равновесия такого стержня; при ином положении сил равновесие невозможно (фиг. z).

Если прикрепление бруса осуществлено стержнями, расположенными так же, как тяги в рассмотренном случае, но не сверху, а снизу (фиг. 1.9,в), то усилия в стержнях будут такие же, как полученные выше, но не растягивающие, а сжимающие. Реакции стержней показаны на фиг. 1.9,г.

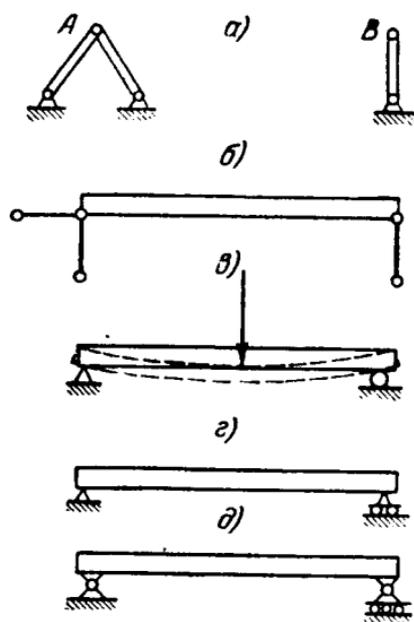
Присоединение концов прикрепляющих стержней предполагается шарнирным, таким образом их концевые сечения могут свободно поворачиваться. Только при этом условии усилие прикрепляющего стержня всегда будет направлено по оси стержня. Действительно, пусть стержень

CD соединяет тело I и тело II друг с другом (фиг. 1. 10,а), причем в точках C и D имеются идеальные цилиндрические шарниры. Идеальным шарниром называется соединение двух или нескольких конструктивных элементов, допускающее взаимный поворот их относительно оси шарнира без трения. Изобразим стержень CD отдельно (фиг. 1. 10,б) и покажем силы, которые могут действовать на него со стороны тел I и II . Так как в шарнирах отсутствует трение, то моменты на наш стержень передаваться не могут. Могут передаваться только силы, причем, очевидно, взаимно противоположные и равные друг другу (фиг. 1. 10,б или 1. 10,в), так как ни при какой другой нагрузке (например, фиг. 1. 10,г) стержень в равновесии не будет.

Равнодействующая системы сил, представляющих действие опоры на сооружение, называется *реакцией опоры*. Реакция опоры B , образованной одним стержнем (фиг. 1. 9), в соответствии с вышесказанным всегда направлена по оси этого стержня. Реакция опоры A , составленной из двух стержней, равна сумме усилий этих стержней. Таким образом при определении реакций опор в случае одностержневой опоры будем иметь одну неизвестную величину, а в случае двухстержневой — две.

Опоры A и B , показанные на фиг. 1. 9,в, изобразим отдельно от бруса (фиг. 1. 11,а). Одностержневая опора является *подвижной* опорой: точка B , прикрепленная одним стержнем, терять возможность перемещаться в направлении стержня, но имеет возможность двигаться в направлении, перпендикулярном оси стержня. Двухстержневая опора, наоборот, является *неподвижной*: точка A тела, прикрепленная двумя стержнями, перемещаться не может ни вправо, ни влево, ни вверх, ни вниз.

Неподвижность точки можно обеспечить стержнями любого направления, необходимо лишь, чтобы угол между ними был отличен от нуля и 180° . На фиг. 1. 11,б показана неподвижная опора, состоящая из горизонтального и вертикального стержней.

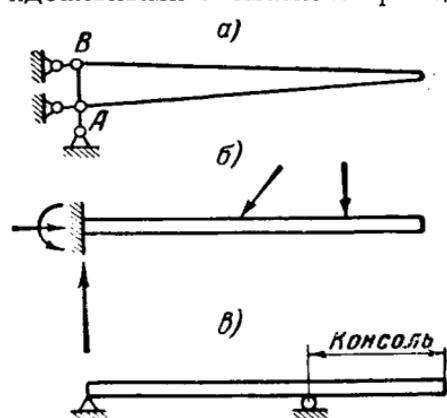


Фиг. 1. 11. Способы изображения опор.

Неподвижная опора (левая) изображается двумя стержнями (фиг. а и б), треугольником (в и г) или неподвижным шарниром (д). Подвижная опора (правая) изображается одним стержнем (а и б), валиком (в) или катком (г и д).

Неподвижная и подвижная опоры балки иногда могут быть представлены также в виде призмы и валика (фиг. 1. 11, в). Призма при наличии в балке соответствующего надреза осуществляет неподвижную опору, т. е. будет препятствовать и вертикальному и горизонтальному смещениям балки. Валик может кататься и, следовательно, горизонтальному перемещению балки препятствовать не будет. Его сопротивление (реакция) всегда перпендикулярно к поверхности катания. Шарнирные опоры называют также цилиндрическими. Иногда подвижную опору изображают в виде призмы, положенной на два (или три) валика (фиг. 1. 11, г и д).

Действительные опоры не всегда совпадают с указанными идеальными схемами и приводятся к ним только приблизительно.



Фиг. 1. 12. Консоль.

а—консоль, прикрепленная тремя стержнями; б—консоль заделанная (защемленная); в—консольная балка.

Защемлением или *заделкой* называют такое закрепление конца бруса, при котором заделанный конец не может ни перемещаться поступательно, ни поворачиваться. На фиг. 1. 12, а показана заделка бруса в плоскости чертежа тремя стержнями, присоединенными шарнирно. В самом деле, прикрепляя точку А двумя стержнями, мы оставляем свободу поворота бруса относительно точки А. Прикрепляя затем точку В третьим стержнем, мы неподвижно закрепляем сечение АВ бруса и, следовательно, весь брус. Реакция заделки, представляемая усилиями трех прикрепляющих стержней, опре-

делится при помощи трех уравнений равновесия.

Заделка иногда изображается (и осуществляется) в виде стенки (фиг. 1. 12, б). Реакциями заделки в этом случае будут две силы и момент. Балку, заделанную одним концом, иногда называют *консолью*. Консолью называют также свешивающуюся часть балки, лежащей на двух или нескольких опорах (фиг. 1. 12, в).

Определение опорных реакций производится обычно следующим образом. Опоры отбрасываются и заменяются соответствующими усилиями: катковая опора — усилием, нормальным плоскости катания; шарнирная — произвольно направленным усилием или, что то же, двумя усилиями по произвольно выбранным, обычно взаимно перпендикулярным, направлениям; заделка — двумя усилиями, как и шарнирная опора, и парой.

Величины усилий определяются из условий равновесия системы.

Пример 1. Балка с левым заделанным концом нагружена силами $P_1=3$ т, $P_2=4$ т, $P_3=1$ т и сосредоточенным моментом $M_1=8$ тм (фиг. 1.13,а), лежащими в одной плоскости (плоскости чертежа). Расстояния сил от заделки $a_1=1$ м, $a_2=3$ м, $a_3=4$ м. Определить опорные реакции.

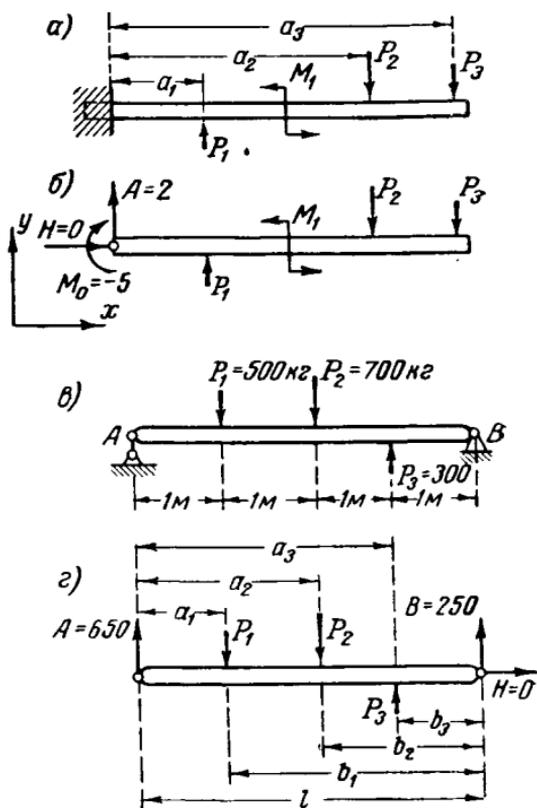
Отбросим мысленно опору и заменим ее действие на балку неизвестными реакциями A , H и M_0 . Направления их нам также неизвестны и мы выбираем их сперва произвольно (фиг. 1.13,б). Балка находится в равновесии под действием приложенной нагрузки и реакций заделки. Для определения неизвестных реакций воспользуемся уравнениями равновесия (12).

Напишем уравнение, выражающее условие, что алгебраическая сумма проекций всех сил на горизонтальную ось равна нулю: $\sum X = H = 0$ (на горизонтальную ось дает проекцию только одна сила H). Таким образом при вертикальной нагрузке балки горизонтальная реакция в заделке отсутствует.

Рассмотрим условие, что алгебраическая сумма проекций сил, приложенных к балке, на вертикальную ось y (фиг. 1.13,б) равна нулю: $\sum Y = A + P_1 - P_2 - P_3 = 0$. Из этого уравнения находим $A = -P_1 + P_2 + P_3 = -3 + 4 + 1 = 2$ т. Вертикальная реакция равна алгебраической сумме всех вертикальных сил, приложенных к балке.

Пара сил не влияет на величину реакции, так как сумма проекций сил, составляющих пару, на любую ось равна нулю.

Для определения реактивного момента M_0 используем условие, что алгебраическая сумма моментов всех действующих на балку сил относительно любой точки равна нулю. Выразим это условие, беря сумму моментов относительно точки A , лежащей на оси балки у заделки: $\sum M_A = M_0 - P_1 a_1 - M_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 = 0$.



Фиг. 1.13. Примеры определения реакций опор.

а и *б*—случай заделанной консоли. Реакциями заделки являются силы A и H и момент M_0 ; *в* и *г*—случай простой балки. Реакциями опор являются силы A , B и H .

Отсюда

$$M_0 = P_1 a_1 + M_1 + P_2 a_2 - P_3 a_3 = 3 \cdot 1 + 8 - 4 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = -5 \text{ тм.}$$

Момент заделки, называемый также опорным моментом консоли, равен алгебраической сумме моментов всех сил нагрузки относительно опорного сечения. Силы A и H не вошли в уравнение, так как они проходят через точку A и не дают момента.

Реакция A получилась со знаком плюс, следовательно, она имеет именно то направление, которое мы предположили. Но опорный момент получился отрицательным — его действительное направление противоположно выбранному.

Пример 2. Определить реакции опор балки, изображенной на фиг. 1. 13, в.

Освобождаемся от опор, заменяя их действие реактивными силами A , B и H , направление которых выбираем произвольно (фиг. 1. 13, г). Расстояние каждой силы до левой опоры обозначаем a , до правой — b с соответствующим индексом. Составляем уравнения равновесия. При определении составляющих реакций, перпендикулярных оси балки, обычно используют уравнения моментов, что позволяет находить реакции левой и правой опор независимо и таким образом уменьшает вероятность ошибки. В данном случае сперва составляем сумму моментов относительно правого опорного шарнира B , принимая во внимание, что реакции B и H не дают момента относительно него;

$$\sum M_B = Al - P_1 b_1 - P_2 b_2 + P_3 b_3 = 0.$$

Отсюда находим

$$A = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 - P_3 b_3}{l} = \frac{500 \cdot 3 + 700 \cdot 2 - 300 \cdot 1}{4} = 650 \text{ кг.}$$

Затем составляем сумму моментов относительно левого опорного шарнира A :

$$\sum M_A = P_1 a_1 + P_2 a_2 - P_3 a_3 - Bl = 0.$$

В это уравнение не вошли силы A и H , так как они проходят через точку A и не дают момента относительно нее. Из уравнения получаем

$$B = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 - P_3 a_3}{l} = \frac{500 \cdot 1 + 700 \cdot 2 - 300 \cdot 3}{4} = 250 \text{ кг.}$$

Обе реакции получились со знаком плюс, это означает, что направление их выбрано правильно. Если бы какая-нибудь из реакций получилась со знаком минус, то это указывало бы, что ее действительное направление обратно выбранному.

Для проверки полученных значений вертикальных реакций возьмем сумму проекций на вертикаль:

$$\Sigma Y = A - P_1 - P_2 + P_3 + B = 0.$$

Подставляем числовые значения:

$$650 - 500 - 700 + 300 + 250 = 0.$$

После подсчета убеждаемся, что условие равновесия удовлетворяется, следовательно, реакции определены правильно.

Горизонтальная составляющая реакции опоры B определится из условия равенства нулю суммы проекций сил на ось x . Получим

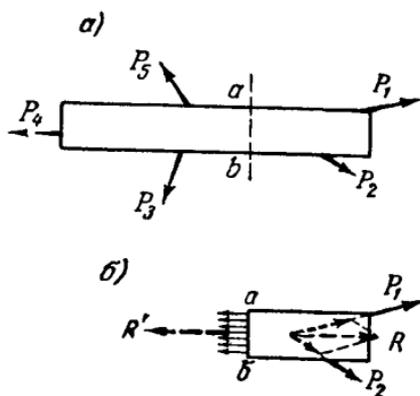
$$\Sigma X = H = 0,$$

т. е. горизонтальная реакция опоры B равна нулю.

§ 8. Метод сечений

Выше мы уже пользовались для определения реакций опор методом сечений: отбрасывались или, что то же, рассекались прикрепляющие стержни и усилия их заменялись внешними силами, которые затем определялись из уравнений равновесия. Метод сечений является основным методом определения внутренних усилий в элементах конструкции. Он основан на рассмотрении равновесия части конструкции. Если вся конструкция целиком находится в равновесии, то и каждая ее часть также находится в равновесии. Применяя к последней уравнения равновесия, можно определить те или иные внутренние усилия в системе. Поясним сказанное примером.

Пусть тело (брус) (фиг. 1.14, а) находится в равновесии под действием пяти внешних сил P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 . Некоторые из этих сил могут быть нагрузками, другие — реакциями опор. Отделим мысленно часть нашего тела сечением ab (фиг. 1.14, б). На нее действуют две внешние силы P_1 и P_2 , направленные в правую сторону. Силы P_1 и P_2 , очевидно, уравниваются внутренними силами сопротивления материала, так как рассматриваемая часть тела, так же как и все тело, находится в состоянии равновесия. Упомянутые внутренние силы показаны на



Фиг. 1.14. Метод сечений.

a —требуется определить внутренние силы по сечению ab . b —проводя сечение рассматриваем равновесие, отрезанной части бруса. Равнодействующая R' внутренних сил должна уравнивать равнодействующую R внешних сил.

фиг. 1. 14,б стрелками слева. Они представляют собой воздействие левой, отброшенной, части тела на рассматриваемую часть. Внутренние силы наглядно можно представить, если предположить, что обе части тела склеены и снова работают совместно. Силы, действующие на слой клея, и есть рассматриваемые внутренние силы. Расположенный рядом со слоем клея слой материала бруса находится в тех же силовых условиях, что и слой клея.

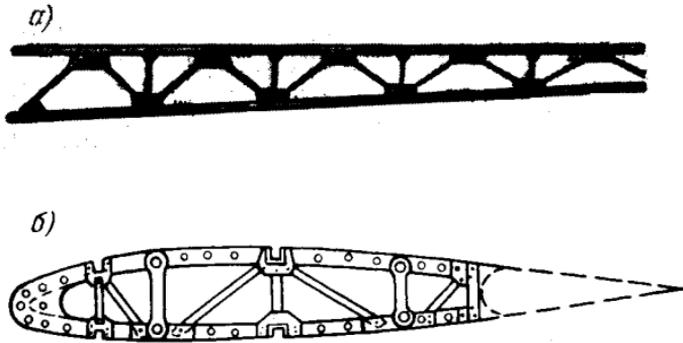
Равнодействующую внутренних сил можно найти из условия, что она равна равнодействующей внешних сил, действующих на отсеченную часть. Сложив в нашем примере силы P_1 и P_2 (фиг. 1. 14,б), получим их равнодействующую R , равную равнодействующей R' внутренних сил. Мерой внутренних сил является сила, отнесенная к единице площади сечения, называемая *напряжением*. Если бы в нашем примере можно было считать, что внутренние силы равномерно распределены по площади сечения ab , то напряжение равнялось бы равнодействующей R' , деленной на площадь сечения. Напряжение выражает собой интенсивность внутренних сил и позволяет судить о степени нагруженности материала.

Глава II

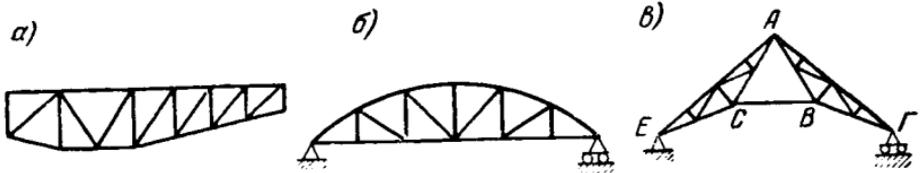
РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ

§ 1. Примеры плоских ферм

На фигурах 2.1 и 2.2 показаны примеры плоских ферм: лонжерон крыла самолета, нервюра крыла, схемы боковой фермы фюзеляжа, мостовой фермы и стропильной фермы.



Фиг. 2.1. Примеры плоских ферм.
а—лонжерон крыла самолета; б—нервюра крыла.

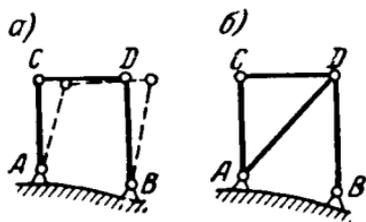


Фиг. 2.2. Примеры плоских ферм.
а—боковая ферма фюзеляжа с треугольной решеткой; б—ферма балочного моста с ездой по низу; в—стропильная ферма.

Плоской фермой называется стержневая конструкция, ось стержней которой находятся в одной плоскости, являющаяся

геометрически неизменяемой и в том случае, когда все узлы шарнирны.

Геометрически неизменяемой (или просто неизменяемой) строительной системой называется конструкция, элементы которой могут перемещаться относительно друг друга лишь за счет деформируемости материала стержней. На фиг. 2.3 даны примеры изменяемой и неизменяемой систем. Система трех стержней, шарнирно соединенных между собой и с твердым телом AB (фиг. 2.3,а), является изменяемой системой. Эта система деформируется (см. пунктир) без изменения длины стержней; расстояния между точками системы, принадлежащими различным стержням, при этом изменяются, как, например, расстояния



Фиг. 2.3.

а — геометрически изменяемая система; б — геометрически неизменяемая система.

между точками B и C или между точками A и D . Вводя стержень, препятствующий этим перемещениям, например, стержень AD (фиг. 2.3,б), получаем неизменяемую систему, деформация которой зависит только от деформации стержней.

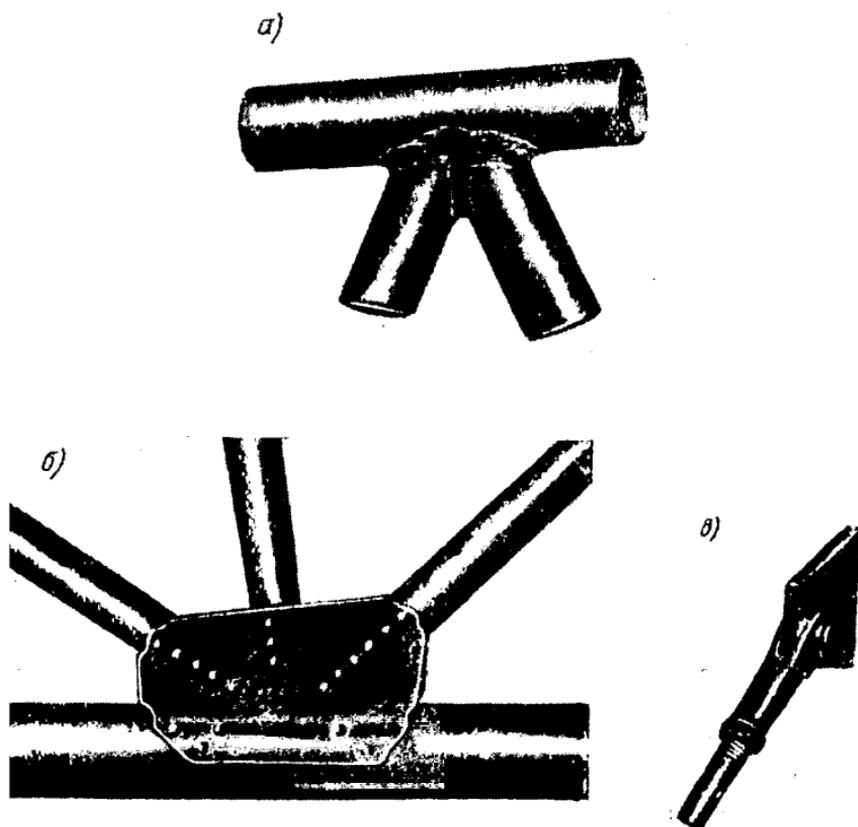
Концы стержней соединяются в узлах, которые бывают сварными или клепаными или, редко, болтовыми — шарнирными. На фиг. 2.4,а показан сварной узел лонжерона, на фиг. 2.4,б — узел клепаной фермы. На фиг. 2.4,в изображено шарнирное присоединение стержня при помощи болта. Первые два типа узлов — сварной и клепаный — являются жесткими соединениями: соединенные в узле концы стержней не могут поворачиваться друг относительно друга. Шарнирные соединения, наоборот, допускают взаимный поворот соединенных в узле концов стержней вокруг оси шарнира.

При определении усилий все узлы фермы считают шарнирными, даже если в действительности они выполнены жесткими. Ферма с шарнирными узлами является расчетной схемой действительной фермы. Такое допущение не приводит к большим ошибкам при определении усилий в стержнях фермы. Усилия действительной фермы, как показывают более точный расчет и опыт, мало отличаются от усилий в ферме с шарнирными узлами.

Условимся о наименованиях частей фермы, принятых для ферм, типа изображенных на фиг. 2.1 и 2.2. Верхние стержни образуют так называемый *верхний пояс* фермы, нижние стержни — *нижний пояс*. Стержни, связывающие пояса между собой, образуют так называемую решетку. Вертикальные элементы решетки носят название *стоек*, наклонные — *раскосов*. Участок фермы между двумя соседними стойками называется *панелью*.

Плоская ферма является неизменяемой только в своей плоскости. Она может воспринимать только нагрузку, действующую

в плоскости фермы. Нагрузку, перпендикулярную к своей плоскости, плоская ферма сама воспринимать не может. Для восприятия неизбежных боковых нагрузок приходится конструировать дополнительные поперечные связи, что приводит к пространственной конструкции; таковы и все конструкции, приведенные выше,— крыло, фюзеляж, мост, кровля и др. Таким обра-



Фиг. 2. 4. Конструктивные формы узлов.

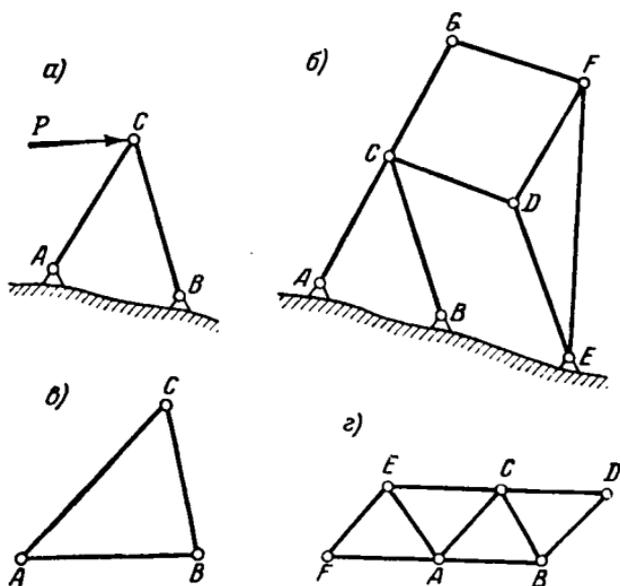
a—сварной узел мотофермы; *б*—клепанный узел лонжерона; *в*—шарнирное прикрепление расчалки (цилиндрический шарнир).

зом плоская ферма является обычно составной частью пространственной. Случаи ее самостоятельного существования очень редки. Однако плоская ферма часто может быть выделена из пространственной и рассчитана отдельно. В настоящей главе рассматривается расчет плоских ферм.

§ 2. Образование простейших ферм

При конструировании ферм первым вопросом является обеспечение геометрической неизменяемости. На этот важный вопрос часто можно дать ответ, проследив образование системы.

Прикрепленная ферма. Представим себе две точки A и B (фиг. 2.5,а), прикрепленные к земле или другой неизменяемой системе. Пусть обе эти точки находятся в плоскости чертежа. Мы хотим прикрепить к ним при помощи стержней, присоединенных шарнирно, некоторую третью точку C , находящуюся также в плоскости чертежа, так, чтобы она в этой плоскости перемещаться не могла. Если поставим один стержень AC , то точка C не сможет перемещаться в направлении AC , но в направлении,



Фиг. 2.5. Образование простейших плоских ферм.

а — первичная простейшая прикрепленная ферма; б — простейшая прикрепленная ферма (последовательно присоединены узлы D , F и G); в — первичная простейшая свободная ферма — шарнирный треугольник; г — простейшая свободная ферма (к первичному треугольнику последовательно присоединены узлы D , E , F).

к нему перпендикулярном, она сможет перемещаться, так как стержень AC может поворачиваться вокруг шарнира A . Чтобы воспрепятствовать этому перемещению, поставим еще стержень BC . Тогда точка C станет неподвижной. Два стержня AC и BC полностью закрепляют точку C в своей плоскости. Полученная жесткая система двух стержней, соединенных шарнирно, является первичной простейшей прикрепленной плоской фермой. Такая система может воспринимать нагрузку, например, силу P (фиг. 2.5,а), и выдерживать ее в пределах прочности и устойчивости стержней. Если нужно присоединить еще один узел, то понадобятся еще два стержня. Так прикрепляем к опоре E и узлу C новый узел D (фиг. 2.5,б). Стержнями EF и DF можно прикрепить узел F , стержнями FG и CG — узел G и так далее

можно присоединять узлы каждый двумя новыми стержнями. Ферма, образованная описанным путем, называется *простейшей прикрепленной фермой*. Очевидно, число стержней s такой фермы равно удвоенному числу присоединенных узлов n :

$$s = 2n. \quad (1)$$

Неизменяемость прикрепленной фермы обуславливается ее связью с опорами и в случае удаления опор вся система или ее часть перестает быть неизменяемой.

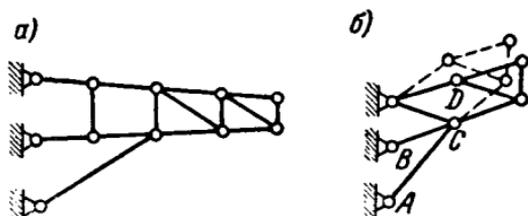
С в о б о д н а я ф е р м а. Теперь проследим образование простейшей свободной фермы. Пусть имеем стержень AB (фиг. 2. 5, *в*). Прикрепим к концам этого стержня узел C при помощи стержней AC и BC ; получаем треугольник ABC — неизменяемую систему из трех стержней — первичную свободную ферму.

К полученному треугольнику могут быть прикреплены новые узлы (фиг. 2. 5, *г*): при помощи стержней BD и CD присоединяем узел D , при помощи стержней CE и AE — узел E ; узел E можем использовать для прикрепления нового узла, стержнями EF и AF прикрепляем узел F и т. д. Для прикрепления каждого узла требуется два стержня. Получаемая таким образом неизменяемая система называется *простейшей свободной фермой*. Ее неизменяемость не связана с опорами. Из ферм, изображенных на фиг. 2. 1 и 2. 2, первая является прикрепленной фермой, остальные — свободными.

Установим зависимость между количеством стержней s и узлов n в свободной ферме. В первичном треугольнике ABC (фиг. 2. 5, *г*) мы имели три узла и три стержня. Следовательно, новых узлов присоединено $n - 3$. Для присоединения каждого нового узла требовалось по два стержня, т. е. всего $(n - 3) \cdot 2$. Прибавляем сюда три стержня исходного треугольника, получаем число стержней s свободной фермы:

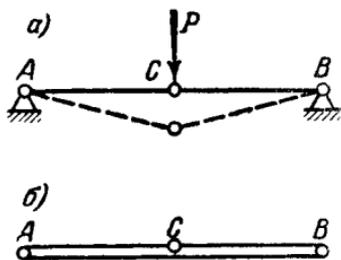
$$s = (n - 3) \cdot 2 + 3 = 2n - 3. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) дают необходимое число стержней для образования фермы. При числе стержней меньшем, чем требуется по формулам (1) или (2), система будет изменяема. Например, система, показанная на фиг. 2. 6, *а*, является механизмом. Число прикрепленных узлов равно восьми. Необходимое соответствующее число стержней по формуле (1) для прикрепленной фермы равно 16. В системе же всего 15 стержней. Введя



Фиг. 2. 6. Примеры изменяемых систем. *а*—система с недостаточным количеством стержней; *б*—система с неправильным расположением стержней.

раскос в первую или вторую панель, получим неизменяемую систему — ферму. Однако выполнение условий, требуемых формулами (1) или (2), не является достаточным признаком геометрической неизменяемости системы. Необходимо, чтобы стержни были правильно расположены. При неправильном расположении стержней система и при достаточном количестве стержней может быть изменяемой. Система, изображенная на фиг. 2.6,б, представляет пример неправильного расположения стержней; она является изменяемой. Возможная деформация системы без деформации ее стержней показана на чертеже пунктиром. Заменяв стержень AC (или BC) на CD , получим неизменяемую систему (простейшую ферму).



Фиг. 2.7. Примеры мгновенно изменяемых систем.

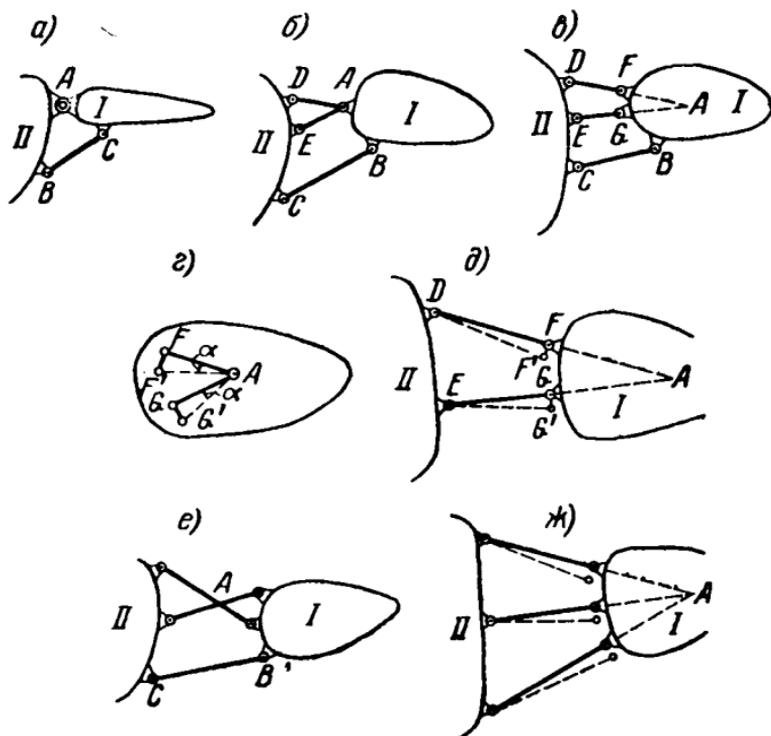
a — двухстержневая система с расположением шарниров на одной прямой. Малая сила P вызывает большую деформацию системы и большие усилия в стержнях; $б$ — предельный случай трехшарнирного треугольника — шарниры расположены на одной прямой.

шесу перемещению узла. Такие системы, обладающие подвижностью в первое мгновение действия нагрузки, называются *мгновенно изменяемыми* (в § 4 приведены другие примеры мгновенно изменяемых систем). В конструкциях, несущих нагрузки, мгновенно изменяемые системы недопустимы как по причине большой деформации, так и из-за весьма больших внутренних усилий, возникающих в них. Поэтому при образовании ферм путем присоединения каждого нового узла двумя стержнями нужно следить, чтобы эти стержни не лежали на одной прямой, т. е. не составляли бы продолжение один другого.

§ 3. Соединение ферм друг с другом. Сложные фермы

Соединение двух ферм. Пусть дана ферма I (фиг. 2.8,а), которую необходимо жестко прикрепить к другой ферме (или к земле) II . Фермы I и II изображены в виде двух жестких дисков, так как расположение стержней в них в данном

случае нас не интересует. Присоединяя диск I к диску II шарниром A , замечаем, что у диска I остается еще свобода поворота относительно диска II вокруг шарнира A . Чтобы сделать присоединение неизменяемым, вводим стержень BC , не проходящий через шарнир A .



Фиг. 2.8. Соединение двух дисков друг с другом.

a —диск I прикреплен к диску II при помощи неподвижного шарнира и стержня; b —прикрепление при помощи трех стержней (два стержня заменяют неподвижный шарнир); $в$ —прикрепление при помощи трех стержней—два стержня образуют фиктивный шарнир в точке A ; $г$ —перемещения точек F и G при повороте диска вокруг точки A ; $д$ —малым перемещениям FF' и GG' соответствует мгновенный центр поворота A ; e —прикрепление при помощи трех стержней—два стержня образуют фиктивный шарнир (A); $ж$ —направления прикрепляющих стержней проходят через одну точку—изменяемая система.

На фиг. 2.8,б показан другой вариант такого же прикрепления. Сперва прикрепляем одну точку A диска I к диску II при помощи двух стержней DA и EA . Точка A выполняет роль шарнира A предыдущего варианта. Постановкой стержня BC , не проходящего через точку A , завершаем прикрепление. Замечаем на этом примере, что два стержня равносильны шарниру.

На фиг. 2. 8,в показан третий вариант неизменяемого соединения двух дисков. Он отличается от предыдущего тем, что не содержит стержней, пересекающихся в одном шарнире. Направления стержней DF и EG пересекаются в точке A , называемой *фиктивным шарниром*. Можно показать, что соединение является неизменяемым, если направление третьего стержня CB не проходит через точку A . Для доказательства рассмотрим диск (фиг. 2. 8,з), который поворачивается вокруг произвольной точки A на угол α . Тогда некоторая точка F диска опишет дугу FF' , а другая какая-либо точка G — дугу GG' , причем, если угол α мал, то эти дуги приближенно можно заменить перпендикулярами к радиусам AF и AG . Обратно, если известны направления FF' и GG' перемещений двух точек F и G диска при вращении его на малый угол, то можно найти центр поворота A как точку пересечения радиусов FA и GA , проведенных перпендикулярно к направлениям перемещений точек F и G . Возвратимся к фиг. 2. 8,в. Отбросим стержень BC (фиг. 2. 8,д) и посмотрим, как переместятся точки F и G диска I , если считать диск II неподвижным. Стержни DF и EG могут только поворачиваться относительно неподвижных точек D и E . Точки F и G , принадлежащие диску I , очевидно, переместятся в направлениях, перпендикулярных к направлениям стержней DF и EG (при малых перемещениях). Следовательно, по доказанному выше, точка A является в первый момент движения центром поворота диска I . Эта точка называется *мгновенным центром вращения* (в последующее мгновение центром вращения уже будет другая точка, определяемая новым положением стержней DF и EG ; центр вращения непрерывно перемещается). Стержень CB препятствует указанному вращению (если его направление не проходит через точку A) и соединение в целом является неизменяемым.

Аналогичное прикрепление изображено на фиг. 2. 8,е; оно является неизменяемым потому, что стержень CB не проходит через фиктивный шарнир A .

Если направление стержня BC проходит через фиктивный шарнир A , система мгновенно изменяема (фиг. 2. 8,ж); диск I поворачивается вокруг точки A на более или менее значительный угол (соответствующие положения прикрепляющих стержней показаны пунктиром). Мгновенно изменяемым является также прикрепление параллельными стержнями. Точка пересечения этих стержней находится бесконечно далеко, поэтому один диск может перемещаться поступательно относительно другого. При параллельных стержнях одинаковой длины получается механизм.

Итак, система из двух дисков, т. е. из двух неизменяемых систем, соединенных тремя стержнями, неизменяема, если эти стержни (или их продолжения) не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу.

Пример 1. Определим, является ли неизменяемой изображенная на фиг. 2.9,а система из девяти стержней, шарнирно соединенных по концам. Проверяем количество стержней. В данной системе шесть узлов. Необходимое количество стержней по формуле (2) равно $2 \cdot 6 - 3 = 9$. Следовательно, при условии правильного расположения стержней рассматриваемая система может быть фермой. Анализируем систему с точки зрения образования. Она не является простейшей фермой, т. е. не может быть образована последовательным присоединением узлов, а образована путем соединения двух простейших ферм. Действительно, система состоит из двух треугольников ABC и DEF (являющихся заведомо неизменяемыми системами), соединенных тремя стержнями BF , AD и CE , не пересекающимися в одной точке (на фиг. 2.9,б эти стержни показаны пунктиром). Система является неизменяемой.

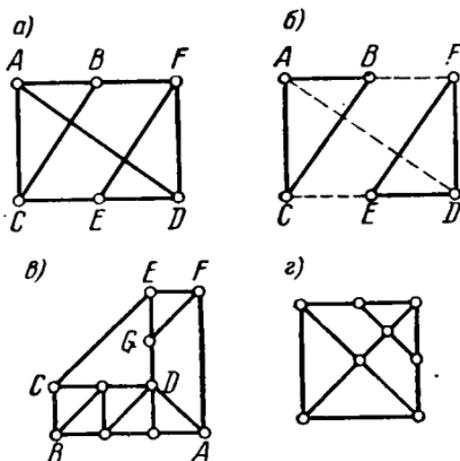
Задачи. 1. Доказать геометрическую неизменяемость системы, представленной на фиг. 2.9,в.

Указание. Рассмотреть соединение простейших ферм $ABCD$ и EFG между собой.

2. Показать, что система, изображенная на фиг. 2.9,г, является мгновенно изменяемой.

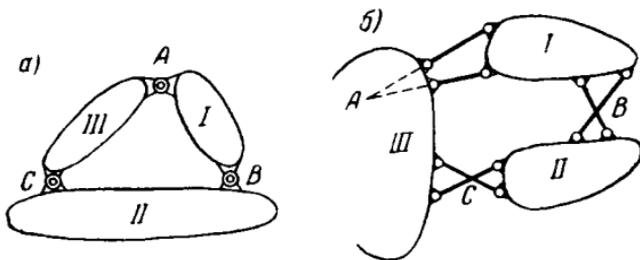
Трехшарнирная система. Три неизменяемые системы I , II и III , соединенные шарнирно (фиг. 2.10,а), составляют также неизменяемую систему, если шарниры не лежат на одной прямой, подобно тому как три стержня образуют первичную ферму — треугольник. Шарниры трехшарнирной системы могут быть фиктивными, как, например, в системе, изображенной на фиг. 2.10,б; она является неизменяемой, так как фиктивные шарниры A , B и C не лежат на одной прямой.

Система, изображенная на фиг. 2.11,а, также может быть истолкована как трехшарнирная. Для этого три стержня, например, DE , JF и HG рассматривают как диски I , II и III , а остальные стержни — как соединяющие. Стержень DE соединен со стержнем JF стержнями JD и FE , образующими фиктивный шарнир A . Стержни JF и HG соединены стержнями JH и FG , образующими фиктивный шарнир в точке B . Стержни DE и HG также соединены между собой двумя стержнями DG и EH , образующими фиктивный шарнир в точке C . Фиктивные шарниры A ,



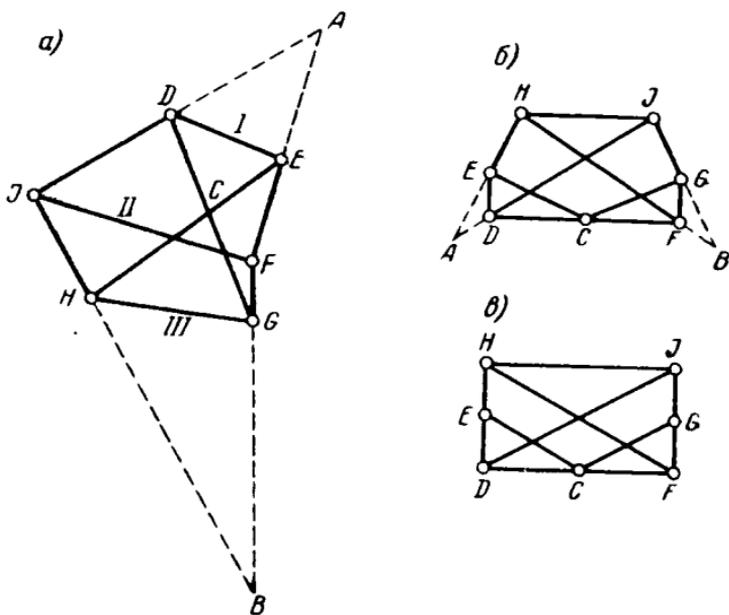
Фиг. 2.9. К исследованию неизменяемости сложных ферм.

а — заданная сложная ферма; б — анализ ее образования; в и г — примеры для упражнений — исследовать неизменяемость.



Фиг. 2. 10. Соединение трех дисков в одну неизменяемую систему.

a—трехшарнирная система. Шарниры *A*, *B* и *C* не должны лежать на одной прямой; *б*—соединение при помощи шести стержней, образующих фиктивные шарниры *A*, *B* и *C*, не лежащие на одной прямой.



Фиг. 2. 11. К исследованию неизменяемости сложных ферм.

a—стержни *I*, *II* и *III* соединяются между собой шестью другими стержнями, образующими фиктивные шарниры в точках *A*, *B* и *C*, не лежащих на одной прямой—система неизменяема; *б* и *в*—примеры для упражнений—исследовать неизменяемость.

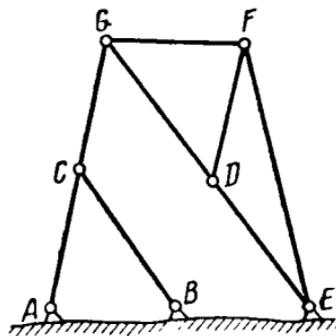
B и C не лежат на одной прямой, следовательно, рассматриваемая система является неизменяемой.

Задачи. 1. Доказать геометрическую неизменяемость системы, показанной на фиг. 2. 11,б.

Указание. Выделить из системы три элемента, стержень HJ и треугольники CDE и CGF , являющиеся неизменяемыми системами каждый в отдельности, и затем рассмотреть соединение этих элементов между собой.

2. Доказать изменяемость системы, изображенной на фиг. 2. 11,в.

Сложные фермы. Фермы, не являющиеся простейшими, называются *сложными*. Они могут быть получены соединением простейших ферм друг с другом. Выше (фиг. 2. 9,а; 2. 9,в; 2. 11,а; 2. 11,б) были даны примеры образования сложных ферм таким путем. Сложная ферма получается из простейшей также путем ее преобразования. Если изменить расположение стержней в простейшей ферме, то можно получить так называемую *преобразованную ферму*. В качестве примера рассмотрим простейшую ферму, изображенную на фиг. 2. 5,б. Выбросим стержень CD . Система станет изменяемой. Введя стержень DG (фиг. 2. 12), снова получим неизменяемую систему. В этом нетрудно убедиться: неизменяемая часть FGE , состоящая из двух треугольников, прикреплена к неизменяемой системе точек $ACBE$ при помощи шарнира E и стержня GC , направление которого не проходит через точку E ; следовательно, новая система неизменяема. Полученная в результате преобразования ферма уже не является простейшей — ее нельзя получить последовательным присоединением узлов.

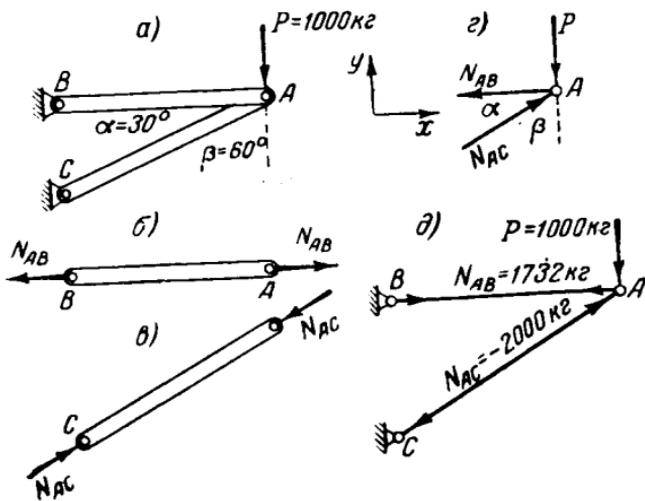


Фиг. 2. 12.

§ 4. Определение усилий в прикрепляющих стержнях

Прикрепление узла. Пусть имеем точку A (фигура 2. 13,а), прикрепленную двумя стержнями AB и AC к неизменяемой системе. В узле A приложена сила $P = 1000$ кг. Требуется определить силы N_{AB} и N_{AC} , действующие на прикрепляющие стержни. Ясно, что подкос AC сжат, а тяга AB растянута. Так как концы стержней прикреплены шарнирно, каждый из стержней находится под действием только сил, направленных по его оси. На фиг. 2. 13,б показана отдельно тяга AB и действующие на нее растягивающие силы: справа — сила, передаваемая шарниром A под действием нагрузки P , слева — реакция опоры B . Очевидно, эти силы одинаковы. На

фиг. 2.13, в показан отдельно подкос AC и действующие на него сжимающие силы N_{AC} . Чтобы определить силы N_{AB} и N_{AC} , рассмотрим равновесие узла A . На фиг. 2.13, г показан отдельно узел A и действующие на него силы: нагрузка $P=1000$ кг, усилие подкоса N_{AC} и усилие тяги N_{AB} . Под влиянием этих сил узел находится в равновесии (собственным весом узла пренебрегаем). Применим уравнения равновесия — два уравнения проекций (уравнение моментов для сил, пере-



Фиг. 2.13. Определение усилий в двухстержневом узле.

a — заданная двухстержневая система; b и c — силы, действующие на стержни системы (верхний стержень растянут, нижний — сжат); $г$ — силы, действующие на узел; $д$ — найденные значения и направления усилий стержней.

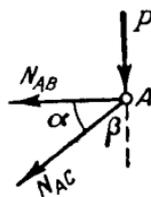
секающихся в одной точке, тождественно удовлетворяется при выборе за центр моментов точки пересечения). Проведем произвольно оси координат (фиг. 2.13, г). Взяв суммы проекций на эти оси всех сил, действующих на узел, получим два уравнения равновесия в следующем виде:

$$\sum X = -N_{AB} + N_{AC} \cos \alpha = 0; \quad \sum Y = -P + N_{AC} \cos \beta = 0.$$

Первое уравнение выражает условие, что сумма проекций на ось x всех сил, действующих на узел, равна нулю. Сила P в это уравнение не вошла, так как ее проекция на ось x равна нулю. Проекции сил N_{AB} и N_{AC} имеют различные знаки. Второе уравнение выражает условие, что сумма проекций всех сил на ось y равна нулю. В это уравнение не входит сила N_{AB} , перпендикулярная к оси y . Из второго

уравнения найдем $N_{AC} = \frac{P}{\cos \beta}$. Подставляя сюда числовые значения $P = 1000 \text{ кг}$ и $\cos \beta = \cos 60^\circ = 0,5$, будем иметь $N_{AC} = \frac{1000}{0,5} = 2000 \text{ кг}$. Подставим полученное значение усилия N_{AC} в первое уравнение и, учитывая, что $\cos \alpha = \cos 30^\circ = 0,866$, получим $-N_{AB} + 2000 \cdot 0,866 = 0$; отсюда $N_{AB} = 2000 \cdot 0,866 = 1732 \text{ кг}$. Таким образом стержень AC сжат силой 2000 кг , а стержень AB растянут силой 1732 кг .

На фиг. 2. 13,д направления найденных усилий изображены стрелками: показаны реакции стержней, т. е. усилия, производимые концами стержней на примыкающие узлы. Усилие растяжения в стержне обозначено стрелками на нем, направленными от концов стержня (от узлов) к его середине (на стержне AB — фиг. 2. 13,д), так как если стержень растянут, то он производит на примыкающие к его концам узлы стягивающее действие (его реакции направлены от узлов). Усилие сжатия в стержне обозначено стрелками обратного направления (стержень AC на фиг. 2. 13,д), так как если стержень сжат, то он производит своими концами распирающее действие на примыкающие узлы (его реакции направлены к узлам).



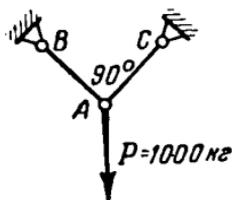
Фиг. 2. 14. Составляя уравнения равновесия, неизвестные усилия следует сперва предполагать положительными.

Общий метод решения. В рассмотренном примере направления усилий стержней очевидны. Но не всегда можно заранее предвидеть, какой из стержней сжат и какой растянут. В сложных случаях нагрузки или расположения стержней в узле направления неизвестных усилий являются также неизвестными. Поэтому приходится в начале решения задаваться направлениями усилий произвольно. Получение отрицательного ответа после решения означает, что направление соответствующего усилия в действительности обратно предположенному. Удобно задаваться усилиями растяжения, которые считаются положительными. Тогда отрицательный результат в решении всегда будет означать сжатие. Задаваясь положительными направлениями искомых усилий N_{AB} и N_{AC} в нашем примере, как показано на фиг. 2. 14, получим уравнения проекций в виде

$$\sum X = -N_{AB} - N_{AC} \cos \alpha = 0; \quad \sum Y = -P - N_{AC} \cos \beta = 0.$$

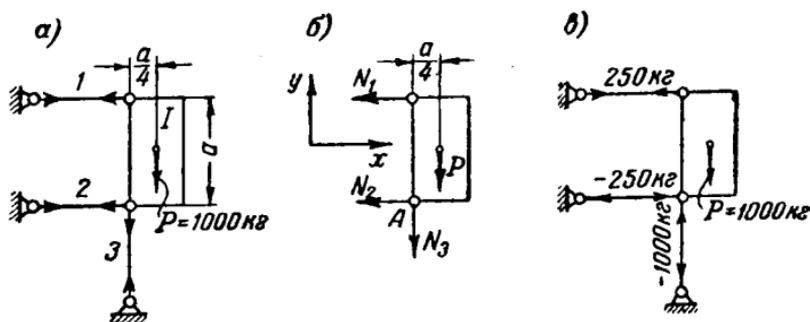
Отсюда $N_{AC} = -2000 \text{ кг}$ (сжатие), $N_{AB} = 1732 \text{ кг}$ (растяжение). В дальнейшем будем придерживаться именно такого метода решения. *Неизвестные усилия будем предполагать при составлении уравнений положительными.* И даже известные усилия стержней, но вводимые в уравнение в общем (буквенном) виде, будем предполагать положительными, вводя действительный знак только при подстановке числовых значений.

Задача. Определить усилия в стержнях AB и AC (фигура 2.15). **Ответ:** $N_{AB} = N_{AC} = 707$ кг.



Фиг. 2.15.

Прикрепление диска. **Пример 1.** Пусть некоторая ферма или диск I (фиг. 2.16.а) прикреплена шарнирно к другой ферме или к земле тремя стержнями 1, 2 и 3. Требуется определить усилия, действующие на эти стержни при силе $P = 1000$ кг, приложенной в центре диска. Применим метод сечений. Отделим мысленно диск и рассмотрим его равновесие (фиг. 2.16.б). На него действуют сила P и уравновешивающие ее неизвестные реакции N_1, N_2 и N_3 прикрепляющих стержней, направленные вдоль стержней, так как последние прикреплены своими концами



Фиг. 2.16. К определению усилий в стержнях, прикрепляющих диск.

a —диск нагружен силой P . Определить усилия в стержнях 1, 2 и 3; b —схема равновесия; $в$ —найденные значения усилий.

шарнирно. Усилия N_1, N_2 и N_3 предполагаем, как выше условлено, положительными, т. е. направленными от узлов. Получаем систему четырех сил в плоскости, которая должна находиться в равновесии. Для плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия (гл. I, § 6). Сумма проекций всех сил на любую ось и сумма моментов их относительно любой точки должны равняться нулю. Постараемся составить уравнения равновесия для удобства решения так, чтобы в каждое уравнение входило как можно меньше неизвестных. Взяв сумму проекций всех сил на ось y (фиг. 2.16.б), получим следующее уравнение (силы N_1 и N_2 , перпендикулярные к оси y , проекций не дают):

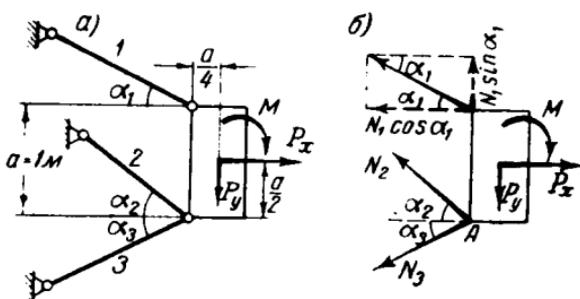
— $P - N_3 = 0$. Отсюда $N_3 = -P = -1000$ кг, т. е. стержень 3 сжат силой 1000 кг (знак минус в решении показывает, что усилие N_3 является не растягивающим, как предполагалось, а сжимающим).

Теперь возьмем сумму моментов относительно точки А. Считая момент, действующий по часовой стрелке, положительным, получаем $P \frac{a}{4} - N_1 a = 0$. Это уравнение также содержит только одно неизвестное усилие, так как усилия N_2 и N_3 , проходящие через точку А, дают моменты относительно этой точки, равные нулю, и, следовательно, в уравнение не входят. Из уравнения находим $N_1 = \frac{P}{4} = \frac{1000}{4} = 250$ кг.

Чтобы определить последнее неизвестное N_2 , возьмем сумму проекций на ось x : — $N_1 - N_2 = 0$. Отсюда $N_2 = -N_1 = -250$ кг. Найденные значения усилий выписаны на фиг. 2. 16, в и там же показаны направления их действия на узлы. Стержень 1 растянут, а стержни 2 и 3 сжаты.

Следует стремиться соответствующим выбором оси проекций или точки моментов получить в каждом уравнении только одно неизвестное усилие. Если этого не сделать, то решение уравнений будет сложнее. Для плоской системы можно составить только три уравнения статики и, следовательно, можно определять неизвестные усилия в прикрепляющих стержнях только при условии, что число их не превышает трех.

Пример 2. Рассмотрим более сложный случай (фиг. 2. 17, а). Прикрепляющие стержни 1, 2 и 3 образуют с горизонталью (с



Фиг. 2. 17. К определению усилий в стержнях, прикрепляющих диск.

a —диск нагружен двумя силами и моментом. Определить усилия в стержнях 1, 2 и 3; б—схема равновесия.

осью x) углы соответственно $\alpha_1 = 25^\circ$, $\alpha_2 = 40^\circ$ и $\alpha_3 = 30^\circ$. К диску в его плоскости приложены силы $P_x = 2000$ кг, $P_y = 1000$ кг и момент $M = 200$ кгм. Требуется определить усилия N_1 , N_2 и N_3 в прикрепляющих стержнях 1, 2 и 3.

Разрезав стержни 1, 2 и 3, выделим диск с действующими на него нагрузками (фиг. 2. 17,б) и составим для него уравнения равновесия. Возьмем сумму моментов относительно точки А, через которую проходят стержни 2 и 3. В уравнение войдет только одно неизвестное усилие N_1 . Чтобы выразить момент этого усилия относительно точки А, разложим предварительно силу N_1 на составляющие $N_1 \cos \alpha_1$ и $N_1 \sin \alpha_1$, параллельные осям x и y . На фиг. 2. 17,б эти составляющие показаны пунктиром. Вертикальная составляющая проходит через точку А и, следовательно, момента не дает. Только горизонтальная составляющая дает момент. Уравнение моментов относительно точки А, таким образом, имеет вид (моменты, действующие по часовой стрелке, считаем положительными):

$$P_y \frac{a}{4} + P_x \frac{a}{2} + M - (N_1 \cos \alpha_1) a = 0$$

или после подстановки числовых значений

$$1000 \frac{1}{4} + 2000 \frac{1}{2} + 200 - (N_1 \cos 25^\circ) 1 = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\cos 25^\circ = 0,906$, получаем $N_1 = 1600$ кг.

Чтобы определить остальные неизвестные усилия N_2 и N_3 , составим два уравнения проекций: $\sum X = 0$ и $\sum Y = 0$. Первое уравнение запишется так (сила P_y и момент M проекций не дают):

$$P_x - N_1 \cos \alpha_1 - N_2 \cos \alpha_2 - N_3 \cos \alpha_3 = 0.$$

Подставляя сюда числовые значения $P_x = 2000$ кг, $N_1 = 1600$ кг, $\cos \alpha_1 = 0,906$, $\cos \alpha_2 = 0,766$, $\cos \alpha_3 = 0,866$, получаем

$$0,766 N_2 + 0,866 N_3 = 550. \quad (3)$$

Второе уравнение проекций (на ось y)

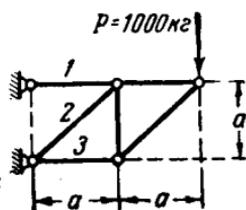
$$-P_y + N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 - N_3 \sin \alpha_3 = 0.$$

Подставляем числовые значения: $P_y = 1000$ кг, $N_1 = 1600$ кг, $\sin \alpha_1 = 0,423$, $\sin \alpha_2 = 0,643$, $\sin \alpha_3 = 0,5$. Уравнение принимает вид

$$0,643 N_2 - 0,5 N_3 = 323. \quad (4)$$

Решая уравнения (3) и (4) совместно, находим $N_2 = 591$ кг и $N_3 = 113$ кг. Итак, все стержни растянуты.

Задача 1. Определить усилия в прикрепляющих стержнях 1, 2 и 3 (фиг. 2. 18).
 Ответ: $N_1 = 2000$ кг, $N_2 = -1414$ кг, $N_3 = -1000$ кг.

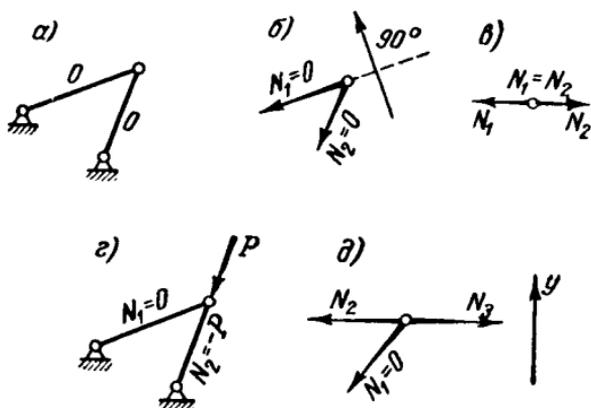


Фиг. 2. 18.

§ 5. Определение усилий в стержнях ферм методом вырезания узлов

Нулевые стержни. Предварительно сделаем несколько замечаний о стержнях, в которых усилия равны нулю. В ряде случаев эти стержни легко выявить сразу же, что может облегчить расчет.

Случай ненагруженного узла. Если узел, состоящий из двух стержней (фиг. 2.19,а), не несет нагрузки, то усилия в стержнях равны нулю. Чтобы подтвердить это положение,



Фиг. 2.19. Случай, когда усилия в стержнях заведомо равны нулю.

а — двухстержневой узел не несет нагрузки — усилия в стержнях равны нулю; б — убеждаемся в этом, составляя уравнения равновесия; в — частный случай: угол между стержнями равен 180° — усилия в стержнях могут быть не равны нулю; г — двухстержневой узел нагружен в направлении одного из стержней — другой стержень „нулевой“; д — два стержня трехстержневого узла образуют одну прямую. Усилия в третьем стержне равно нулю.

вырежем узел (фиг. 2.19,б) и составим уравнение проекций на ось x , перпендикулярную к направлению первого стержня. Сумма проекций будет равна нулю только в том случае, если усилие N_2 равно нулю. Точно также, взяв сумму проекций на ось, перпендикулярную ко второму стержню, найдем, что $N_1=0$. Приведенное положение нельзя применить к случаю, когда угол между стержнями составляет 180° (фиг. 2.19,в). В этом случае в стержнях могут быть одинаковые усилия $N_1=N_2$, величину которых из условий равновесия узла найти нельзя. Напомним, что такое присоединение узла не обеспечивает его неподвижности.

Таким образом, если узел, образованный двумя не лежащими на одной прямой стержнями, не нагружен, то усилия в стержнях, его образующих, равны нулю.

Случай отдельно стоящего стержня. Если сила, действующая на узел, состоящий из двух стержней, направлена вдоль одного из этих стержней (фиг. 2. 19, *з*), то она воспринимается этим стержнем, а усилие в другом стержне равно нулю. Последний стержень называется отдельно стоящим.

Аналогично, если узел, в котором сходятся три стержня и два из них (2 и 3) расположены на одной прямой (фиг. 2. 19, *д*), не нагружен (или нагружен в направлении этой прямой), то усилие в третьем, отдельно стоящем, стержне 1 равно нулю. Чтобы убедиться в этом, составим уравнение проекций на ось y , перпендикулярную к направлению стержней 2 и 3. Сумма проекций на ось y не может равняться нулю, если усилие в стержне 1 не будет равно нулю. Следовательно, $N_1 = 0$.

Определив неработающие стержни, переходят к определению усилий в остальных стержнях. Основным методом решения этой задачи является метод сечений. Отрезается та или иная часть фермы, действие остальной части системы на отсеченную заменяется силами, определяемыми из условий равновесия отсеченной части. В зависимости от того, какая часть фермы отсекается, различают целый ряд способов расчета ферм.

Наиболее часто применяется способ вырезания узлов, заключающийся в том, что последовательно отрезаются узлы фермы, действие фермы на узел заменяется силами, величины которых определяются из уравнений равновесия узлов. Для большей простоты решения узлы нужно отсекают в определенной последовательности, а именно так, чтобы в каждом из них иметь не более двух неизвестных усилий.

На нижеследующих примерах показан расчет ферм способом вырезания узлов.

Случай простейшей фермы. Дана ферма (фиг. 2. 20, *а*), нагруженная двумя силами $P_1 = 2000$ кг и $P_2 = 1000$ кг. Углы, образуемые направлениями стержней с осью x , параллельной нижнему поясу BE фермы, равны: $\alpha_1 = 20^\circ$, $\alpha_2 = 50^\circ$, $\alpha_3 = 45^\circ$. Требуется определить усилия в стержнях фермы.

Выясним нулевые стержни. Узел E содержит два стержня, не лежащие на одной прямой, и нагрузки не несет. Следовательно, усилия в обоих стержнях равны нулю. Стойки GD и CH в узлах G и C являются отдельно стоящими стержнями. Так как к этим узлам внешних сил не приложено, усилия в стойках равны нулю.

Обратимся к определению усилий в других стержнях. Рассмотрим узел F . На него действуют внешняя сила P_2 и усилия стержней FD и FG . Усилие стержня FE равно нулю. Узел F показан отдельно на фиг. 2. 20, *б* — усилия N_{FG} и N_{FD} предположены, как всегда, положительными (растягивающими). Составим для вырезанного узла два уравнения проекций. Взяв сумму проекций на ось x , будем иметь

$$-N_{FG} \cos \alpha_1 - N_{FD} \cos \alpha_3 = 0.$$

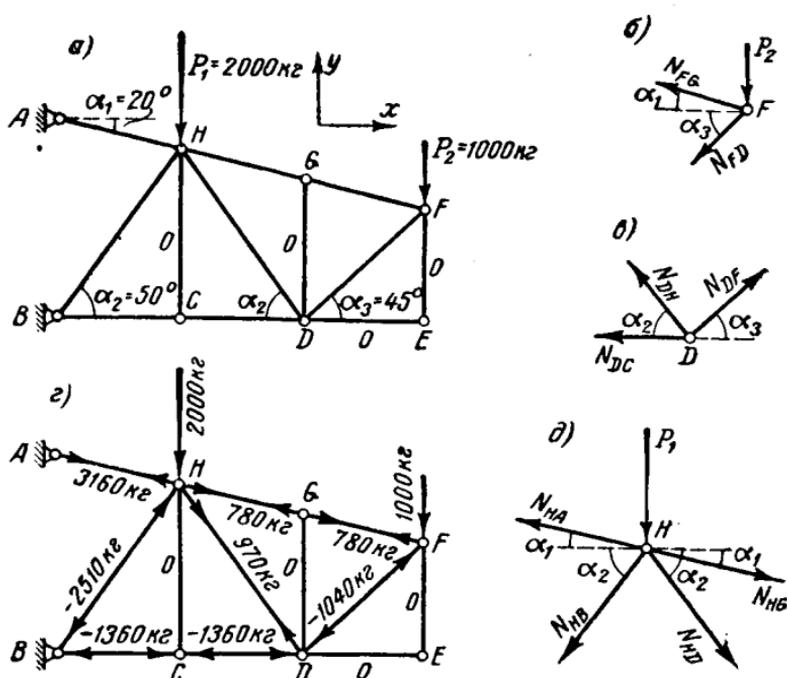
Сумма проекций на ось y

$$N_{FG} \sin \alpha_1 - N_{FD} \sin \alpha_3 - P_2 = 0.$$

Подставим в эти уравнения числовые значения

$$\cos \alpha_1 = 0,940, \quad \cos \alpha_3 = 0,707, \quad \sin \alpha_1 = 0,342,$$

$$\sin \alpha_3 = 0,707, \quad P_2 = 1000 \text{ кг.}$$



Фиг. 2. 20. Пример определения усилий в стержнях фермы способом вырезания узлов.

a —заданная система; b , $в$ и $д$ —схемы равновесия узлов F , D и H ; $г$ —полученные значения усилий.

Получим

$$0,940N_{FG} + 0,707N_{FD} = 0;$$

$$0,342N_{FG} - 0,707N_{FD} = 1000. \quad (5)$$

Сложив уравнения, найдем $1,282N_{FG} = 1000$, откуда $N_{FG} = \frac{1000}{1,282} = 780 \text{ кг}$. Подставив полученное значение N_{FG} в какое-либо из уравнений (5), определим $N_{FD} = -1040 \text{ кг}$. Знак минус показывает, что стержень сжат.

Переходим к узлу D . В этом узле имеем два неизвестных усилия N_{DC} и N_{DH} (усилие $N_{DG} = 0$, как было указано выше).

Найдем их из уравнений равновесия узла. Вырезая узел (фиг. 2. 20, в) и направляя усилия стержней от узла, получаем

$$\sum X = -N_{DC} - N_{DH} \cos \alpha_2 + N_{DF} \cos \alpha_3 = 0;$$

$$\sum Y = N_{DH} \sin \alpha_2 + N_{DF} \sin \alpha_3 = 0.$$

Из последнего уравнения определяем

$$N_{DH} = -N_{DF} \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_2} = -(-1040) \frac{0,707}{0,766} = 970 \text{ кг.}$$

Подставляя этот результат в первое уравнение, после вычислений находим $N_{DC} = -1360 \text{ кг}$. Полученные значения усилий выписаны на фиг. 2. 20. г. Рассматривая далее узлы G и C, находим усилия $N_{GH} = 780 \text{ кг}$ и $N_{CB} = -1360 \text{ кг}$. Чтобы определить усилия N_{HA} и N_{HB} , рассматриваем равновесие узла H (фиг. 2. 20, д). Уравнения проекций имеют вид

$$\sum X = -N_{HA} \cos \alpha_1 - N_{HB} \cos \alpha_2 + N_{HD} \cos \alpha_2 + N_{HG} \cos \alpha_1 = 0,$$

$$\sum Y = N_{HA} \sin \alpha_1 - N_{HB} \sin \alpha_2 - N_{HD} \sin \alpha_2 - N_{HG} \sin \alpha_1 - P_1 = 0$$

или после подстановки числовых значений

$$-N_{HA} \cdot 0,940 - N_{HB} \cdot 0,643 = -1357,$$

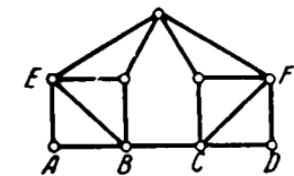
$$N_{HA} \cdot 0,342 - N_{HB} \cdot 0,766 = 3010,$$

откуда $N_{HB} = -2510 \text{ кг}$ и $N_{HA} = 3160 \text{ кг}$.

Изложенный метод определения усилий удобен, когда при рассмотрении каждого вырезанного узла в нем имеется не более двух неизвестных усилий, так как для узла можно составить только два уравнения равновесия. Первым следует вырезать узел, содержащий не более двух стержней.

При решении простейшей фермы порядок вырезания обратен порядку образования. Так при расчете фермы, представленной на фиг. 2. 5, б, следовало бы сперва вырезать узел G (который при образовании фермы был присоединен последним) и затем вырезать узлы в таком порядке: F, D, C.

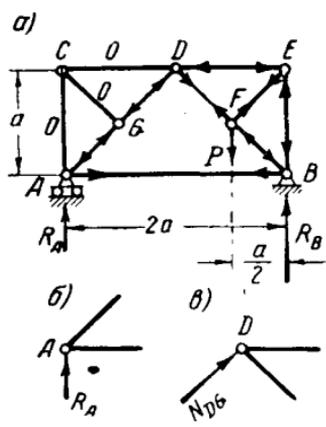
Случай сложной фермы. Фермы, изображенные на фиг. 2. 11, а, 2. 11, б и 2. 12, менее удобно решать способом вырезания узлов, так как в них нет ни одного узла,



Фиг. 2. 21. Сложная ферма. Неудобна для расчета только способом вырезания узлов.

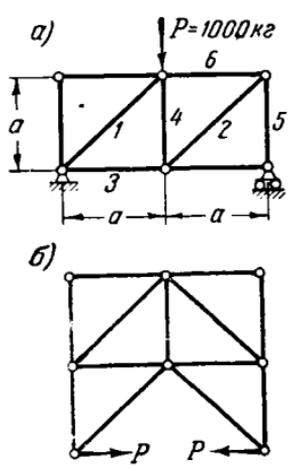
содержащего только два стержня, с которого можно начать решение. Ферму, показанную на фиг. 2. 21, также нерационально решать способом вырезания узлов; вырезав узлы A и D, мы быстро определили бы усилия стержней AB, AE, DC и DF, но в каждом из остальных узлов было бы не менее трех стержней с неизвестными усилиями.

Но иногда и сложные фермы просто решаются способом последовательного вырезания узлов. На фиг. 2. 22,а изображена ферма, состоящая из двух простейших ферм ACD и BDE , соединенных друг с другом шарниром D и стержнем AB . В узле F приложена вертикальная сила P . Не определяя до конца усилий в стержнях фермы, проследим лишь порядок решения этой задачи. Прежде всего найдем опорные реакции. Затем выявим стержни с нулевыми усилиями. В узле G стержень GC является отдельно стоящим, усилие в нем равно нулю. Остающиеся в узле C два стержня CD и CA не составляют продолжения один другого. Так как узел не нагружен, усилия в этих стержнях равны нулю. Обращаясь к узлу A , имеем здесь два неизвестных усилия. На фиг. 2. 22,б узел A показан отдельно; стержень AC не изображен, так как усилие в нем равно нулю. Как видно из фигуры, вертикальная реакция R_A опоры A вызывает сжатие стержня AG и растяжение стержня AB . Отмечаем знаки усилий на стержнях стрелками (фиг. 2. 22,а). В стержне GD будет, очевидно, такое же усилие, как и в стержне AG . Переходим к узлу D . Сжатый стержень GD действует на узел, как показано на фиг. 2. 22,в. Это усилие вызывает сжатие стержня DE и растяжение стержня DF . Далее переходим к узлу E , из рассмотрения которого устанавливаем, что стержень BE сжат, а стержень EF растянут. Наконец, взяв в узле B сумму проекций на горизонталь, находим, что стержень FB сжат, учитывая, что знак усилия N_{AB} уже известен из предыдущего. Второе уравнение для узла B — уравнение проекций на вертикаль и два уравнения равновесия узла F — должны автоматически удовлетвориться, что и может быть использовано для контроля решения.



Фиг. 2. 22. Сложная ферма. Удобна для расчета способом вырезания узлов.

Последовательность рассмотрения узлов: G, C, A, G, D, E, B .



Фиг. 2. 23.

Задачи. 1. Определить по приведенному плану усилия в стержнях рассмотренной фермы, взяв $P = 1000$ кг и отношение высоты фермы к ее пролету равным $\frac{1}{2}$ (фиг. 2. 22).

2. Определить усилия в стержнях фермы, изображенной на фиг. 2. 23,а.

Указание. Предварительно следует найти реакции опор. **Ответ:** $N_1 = -707$ кг, $N_2 =$

$=707 \text{ кг}$, $N_8=500 \text{ кг}$, $N_4=N_5=N_6=500 \text{ кг}$. Усилия остальных стержней равны нулю.

3. Определить знаки усилий в стержнях фермы на фиг. 2.23,б.

§ 6. Способ сквозных сечений

В настоящем параграфе изложим другой способ определения усилий в стержнях ферм, называемый способом сквозных сечений, также широко распространенный в расчетной практике.

Если требуется определить усилие в одном или нескольких стержнях фермы, не решая ее полностью, то способ сквозных сечений в большинстве случаев быстрее ведет к цели, чем способ вырезания узлов. В некоторых случаях оба способа применяются совместно.

Способ сквозных сечений уже применялся нами при определении усилий в прикрепляющих стержнях. Он, как и способ вырезания узлов, основан на применении метода сечений, но при этом производится не вырезание одного узла, а разрезание всей фермы на две части «насквозь». Затем рассматривается равновесие отрезанной части фермы, причем при составлении уравнений моментов или проекций стараются выбрать точку моментов или ось проекций так, чтобы уравнение равновесия содержало по возможности только одно неизвестное усилие.

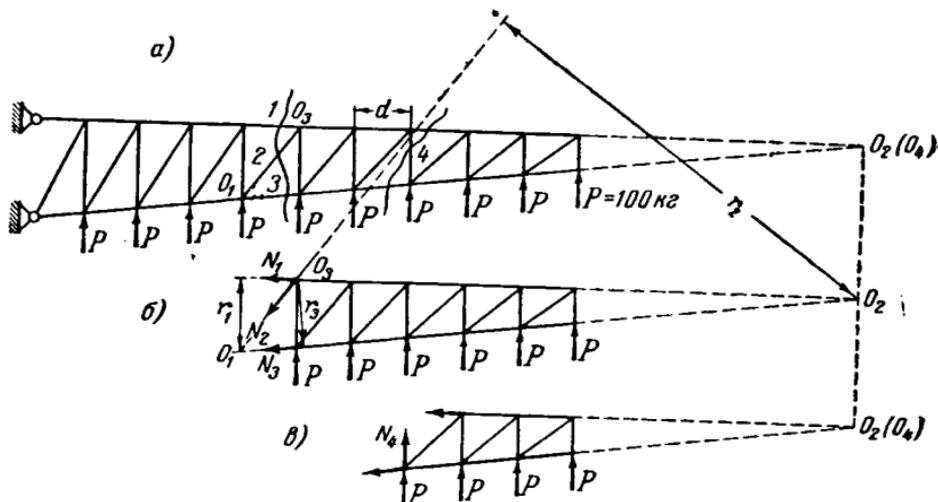
Выбор точки моментов. Покажем на примерах выбор точки, относительно которой выгодно взять сумму моментов при составлении уравнения равновесия по способу сквозных сечений.

Пример 1. Пусть требуется определить усилие в стержне 1 верхнего пояса фермы, показанной на фиг. 2.24, при нагрузке снизу одинаковыми силами $P=100 \text{ кг}$ каждая. Длина панели равна d .

По способу вырезания узлов для решения задачи нужно было бы рассмотреть последовательно все узлы, расположенные по правую (или левую) сторону от стержня 1. Быстрее достигнем цели, если воспользуемся способом сквозных сечений. Проведем разрез фермы, показанный на чертеже волнистой линией. На фиг. 2.24,б изображена отдельно отрезанная часть фермы. Вместо разрезанных стержней 1, 2 и 3 приложены их усилия N_1 , N_2 и N_3 , которые еще неизвестны. Усилия N_1 , N_2 и N_3 можно найти на основании того условия, что отрезанная часть фермы под влиянием приходящейся на нее нагрузки (шести сил P) и усилий N_1 , N_2 и N_3 находится в равновесии. Чтобы определить усилие N_1 , удобно взять уравнение моментов относительно точки O_1 , в которой пересекаются направления неизвестных усилий N_2 и N_3 ; в это уравнение войдет только искомое неизвестное усилие N_1 :

$$-Pd - P_2d - P_3d - P_4d - P_5d - P_6d - N_1r_1 = 0.$$

Здесь r_1 — плечо силы N_1 относительно точки моментов O_1 ; его можно измерить непосредственно на чертеже. Из уравнения получим $N_1 = -\frac{21Pd}{r_1}$. Отрицательный знак ответа показывает, что стержень 1 сжат.



Фиг. 2.24. К определению усилий в стержнях ферм способом моментных точек.

а — требуется определить усилия в стержнях $1, 2, 3$ и 4 ; *б* — сечение для определения усилий N_1, N_2 и N_3 . Точки моментов соответственно O_1, O_2 и O_3 ; *в* — сечение для определения N_4 . Точка моментов — O_4 (совпадает с O_2).

Пример 2. Определить усилие N_3 в стержне нижнего пояса той же панели. За точку моментов следует принять O_3 — точку пересечения направлений стержней 1 и 2 . Уравнение моментов (фиг. 2.24,б) — $Pd - P2d - P3d - P4d - P5d + N_3r_3 = 0$ содержит только одно неизвестное усилие N_3 . Через r_3 обозначено плечо силы N_3 относительно точки O_3 . Из уравнения получим $N_3 = \frac{15Pd}{r_3}$.

Пример 3. Рассмотрим определение усилия N_2 в раскосе. Если усилия N_1 и N_3 уже найдены, то усилие N_2 определяется из уравнения проекций на вертикаль:

$$N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + N_3 \cos \alpha_3 + \Sigma P = 0,$$

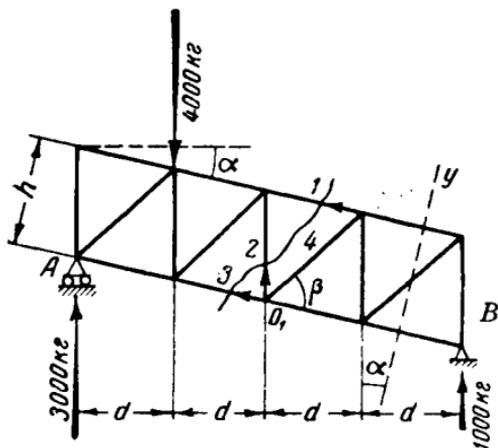
где α_1, α_2 и α_3 — углы, образуемые направлениями стержней $1, 2$ и 3 с вертикальной осью проекций. Силы P , параллельные оси проекций, проектируются в натуральную величину.

Если же усилия N_1 и N_3 неизвестны, то для определения усилия N_2 можно воспользоваться уравнением моментов относительно точки O_2 , где пересекаются направления 1 и 3 (фиг. 2.24,б),

если она не слишком удалена от фермы. Таким образом исключаются из уравнения неизвестные N_1 и N_3 .

В случае если точка O_2 не находится в пределах чертежа, приходится применять первый способ, предварительно определив усилия N_1 и N_3 .

Пример 4. Аналогично определяется усилие в стойке. Пусть требуется найти усилие N_4 стойки 4 (фиг. 2. 24,а). Проводя сечение, как показано пунктиром, разрезаем стойку и еще два поясных стержня. Отрезанная часть фермы показана на фиг. 2. 24,в. Составляем уравнение моментов сил, действующих на отрезанную часть, относительно точки O_2 , где пересекаются направления неизвестных усилий поясов. В уравнение будет входить только искомое неизвестное N_4 . В случае, если точка O_2 находится за пределами чертежа, следует поступать, как указано в примере 3.



Фиг. 2. 25. Случай фермы с параллельными поясами. Усилия в стойках и раскосах определяются способом проекций.

какой-либо из опор. Взяв сумму моментов всех сил, действующих на ферму, относительно опоры А и приравняв ее нулю, получим $4000 \cdot d - R_B 4d = 0$. Отсюда найдем реакцию R_B опоры В:

$$R_B = \frac{4000d}{4d} = 1000 \text{ кг.}$$

Теперь проводим сечение через ферму так, чтобы разрезать стержень 1, усилие в котором нам нужно определить, и рассмотрим равновесие правой отсеченной части фермы. Напишем для нее уравнение моментов относительно точки O_1 , где пересекаются остальные неизвестные усилия (N_2 и N_3):

$$-1000 \cdot 2d - N_1 h = 0.$$

Отсюда искомое усилие

$$N_1 = -1000 \cdot 2 \frac{d}{h} = -2000 \frac{50}{60} = -1667 \text{ кг.}$$

Описанный способ сквозных сечений, основанный на применении уравнений равновесия в виде уравнений моментов, называется

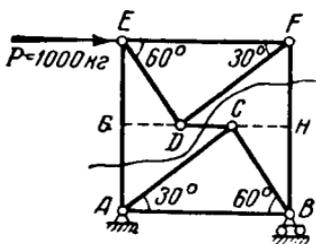
ся также *способом моментных точек*. Еще раз повторим его содержание. Проводя сквозное сечение и заменяя рассеченные стержни их усилиями, составляем уравнение моментов сил, приложенных к одной из двух отсеченных частей фермы, относительно точки, в которой пересекаются направления всех рассеченных стержней, кроме того стержня, усилие в котором ищется. Тогда неизвестным в уравнении будет только искомое усилие, легко из него определяемое. Из сказанного вытекает, что данный способ применим в том случае, когда направления всех рассеченных стержней, кроме того, усилие в котором нас интересует, пересекаются в одной точке.

Пример 6. Определить усилие в стойке 2 фермы с параллельными поясами (фиг. 2. 25). Способ моментных точек неприменим, так как нет точки, где бы пересекались направления двух остальных рассеченных стержней. Стержни 1 и 3 параллельны и точка их пересечения находится бесконечно далеко. В данном случае следует применить разновидность способа сквозных сечений, называемую иногда *способом проекций*. Для отсеченной части фермы при этом уравнение равновесия пишется в виде уравнения проекций сил на ось, перпендикулярную к направлению поясов (ось y на фиг. 2. 25). Проекции усилий поясов N_1 и N_3 на эту ось равны нулю, следовательно, в уравнении неизвестным будет только искомое усилие N_2 . Уравнение имеет в нашем случае такой вид:

$$N_2 \cos \alpha + R_B \cos \alpha = 0.$$

Отсюда $N_2 = -R_B = -1000$ кг (стойка сжата). Так же определяются усилия и в раскосах.

Задачи. 1. Определить усилия в стержнях фермы, показанной на фиг. 2. 26. *Указание.* Проводим сквозное сечение, как показано на фигуре, и, рассматривая равновесие треуголь-

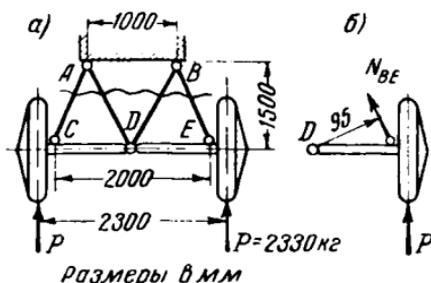


Фиг. 2. 26. Пример комбинированного применения способов сквозных сечений и вырезания узлов.

ника EFD , определяем усилия стержней AE и BF по способу моментных точек (беря моменты относительно точек G и H) и стержня DC —по способу проекций, после чего заканчиваем задачу методом вырезания узлов. *Ответ:* $N_{DC} = -100$ кг, $N_{FB} = -500$ кг, $N_{EA} = 500$ кг, $N_{ED} = N_{CB} = -500$ кг, $N_{DF} = N_{CA} = 866$ кг, $N_{EF} = -750$ кг, $N_{AB} = 250$ кг.

2. Определить усилие в раскосе 4 (фиг. 2. 25), считая, что $\beta = 60^\circ$ и $\alpha = 15^\circ$. *Ответ:* $N_4 = 1114$ кг.

3. Определить усилия в подкосах шасси (фиг. 2. 27, а), если



нагрузка P на колесо составляет 2330 кг. *Указание.* Сперва из рассмотрения равновесия полуоси (фиг. 2. 27, б) определяется $N_{BE} = N_{AC}$. Затем, отрезая всю ось, как показано на фиг. 2. 27, а, из уравнения проекций $\sum Y = 0$ можно найти $N_{BD} = N_{AD}$. *Ответ* $N_{BE} = N_{AC} = -2820$ кг, $N_{BD} = N_{AD} = 365$ кг.

Фиг. 2. 27. Пример комбинированного применения способов моментных точек и способа проекций.

зывать уравнения моментов относительно точек D , B и A . *Ответ:* $N_{BE} = -2820$ кг, $N_{AC} = 0$, $N_{DB} = -1220$ кг, $N_{AD} = -1592$ кг.

4. Решить предыдущую задачу при условии, что нагружено лишь правое колесо. *Указание.* Использовать уравнения моментов относительно точек D , B и A .

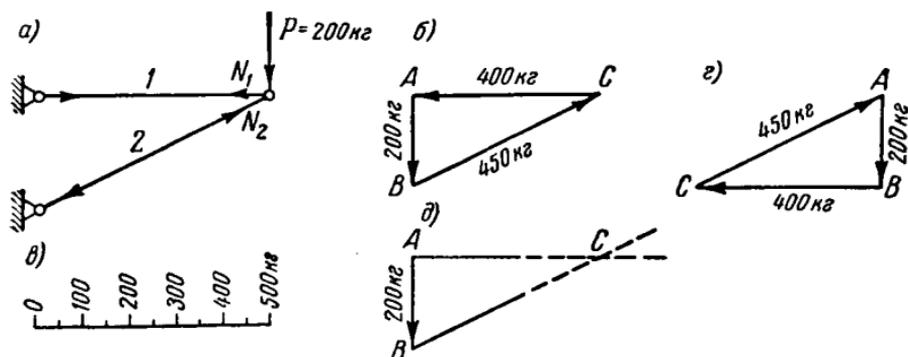
§ 7. Графические способы определения усилий в стержнях ферм

Равнодействующая системы сил, как было показано в гл. I, § 5 (фиг. 1. 7), замыкает многоугольник, составленный из этих сил. Следовательно, если система сил является уравновешенной (а при этом равнодействующая всех сил равна нулю), то силовой многоугольник будет замкнутым. На этом основаны графические способы определения усилий в стержнях ферм, также широко распространенные и во многих случаях представляющие преимущества перед рассмотренными выше аналитическими методами. Графические способы являются по существу применением метода сечений, причем условия равновесия используются в графической форме.

Вернемся к способу вырезания узлов, но вместо составления уравнений равновесия для узла будем пользоваться сформулированным выше графическим условием равновесия, также позволяющим, как мы увидим, определить два неизвестных усилия в каждом узле.

В кронштейне, состоящем из двух стержней 1 и 2 (фиг. 2. 28), внешняя сила $P = 200$ кг уравновешивается усилиями стержней 1 и 2. Стержень 1 растянут, т. е. его усилие N_1 направлено от узла; стержень 2 сжат, его усилие N_2 направлено к узлу. Если все три силы P , N_1 и N_2 , сходящиеся в узле, отложить в виде векторов в одинаковом масштабе друг за другом, то они образуют замкнутый треугольник сил (фиг. 2. 28, б). Отрезок AB , направленный вниз, изображает силу $P = 200$ кг в масштабе, показанном на фиг. 2. 28, в. Отрезок BC , параллельный стержню 2, изобра-

жает усилие стержня 2, и отрезок CA — усилие стержня 1. Усилия N_1 и N_2 , измеренные на чертеже в том же масштабе, составят соответственно 400 и 450 кг. Направление усилий в силовом треугольнике $ABCA$ совпадает с направлением обхода периметра против часовой стрелки. Оно может быть и обратным (как, например, на фиг. 2. 28,з), но направления отдельных усилий от этого не меняются. Как видим, направления усилий совпадают с действительными в обоих вариантах силовых треугольников. Вектор BC (фиг. 2. 28,б) направлен так же, как усилие N_2 , и вектор CA — так же, как усилие N_1 .



Фиг. 2. 28. Определение усилий в двухстержневом узле графически.

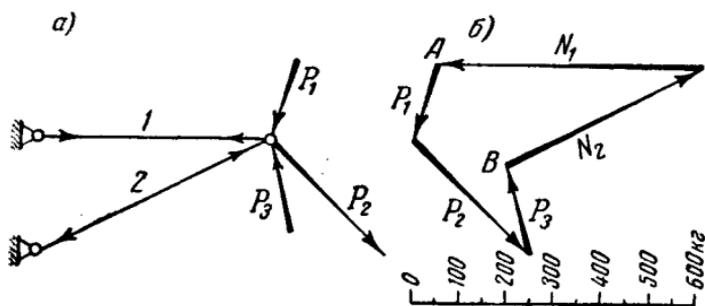
а — схема узла и нагрузки; б — треугольник равновесия узла; в — масштаб сил; г — другой вариант треугольника равновесия; д — способ построения треугольника равновесия.

Из изложенного вытекает способ определения усилий N_1 и N_2 , если бы они были неизвестны. Откладываем силу $P=200$ кг (фиг. 2. 28,д) в виде вектора AB , затем через начало и конец этого вектора проводим прямые, параллельные стержням 1 и 2, усилия в которых нужно определить. Получаем нужный нам треугольник сил ABC , стороны которого BC и CA равны усилиям N_2 и N_1 в том же масштабе, в каком была отложена сила P . Направления усилий в треугольнике определяются направлением силы P .

В случае нескольких сил решение не меняется. Рассмотрим задачу, подобную предыдущей, но с большим количеством известных сил в узле. Силы P_1 , P_2 и P_3 (фиг. 2. 29) известны по направлению и по величине. Требуется определить усилия в стержнях 1 и 2.

Силы P_1 , P_2 , P_3 , N_1 и N_2 должны попрежнему образовать замкнутый многоугольник сил, так как все эти силы взаимно уравновешивают друг друга. Отсюда получаем следующий порядок решения задачи. Откладываем, соблюдая параллельность, известные силы P_1 , P_2 и P_3 цепочкой в любой последовательности, но в одном и том же масштабе, причем так, чтобы силы были направлены одна вслед за другой по периметру получае-

мого многоугольника (фиг. 2.29,б). Точка A есть начало построения. Отложив силы P_1 , P_2 и P_3 , приходим в точку B . Проводя затем, как и в предыдущем случае, через точки A и B прямые, параллельные стержням 1 и 2, находим усилия N_1 и N_2 . Направления их в силовом многоугольнике определяются направлением известных сил: все силы направлены по периметру в одну и ту же сторону. Полученные направления усилий N_1 и N_2 переносим на чертеж узла (фиг. 2.29,а). Усилие N_1 направлено от узла, следовательно, стержень 1 растянут, а усилие N_2 — к узлу, стержень 2 сжат. Величины усилий берем по масштабу. Построение



Фиг. 2.29. Случай действия нескольких сил на двухстержневой узел.

а — схема узла и нагрузки; б — многоугольник равновесия.

на фиг. 2.29,б выполнено для сил $P_1=180$ кг, $P_2=355$ кг, $P_3=210$ кг. Масштаб сил указан на чертеже. Получаемые усилия в стержнях: $N_1=580$ кг, $N_2=-480$ кг.

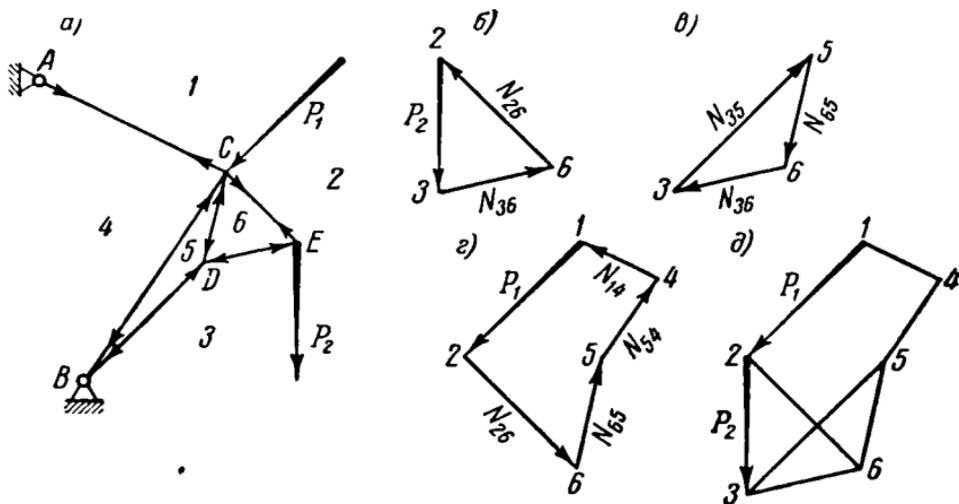
Диаграмма усилий. Для графического расчета применяют особый способ обозначения стержней и усилий. Обозначим цифрами или буквами поля — участки площади чертежа между стержнями и силами (см. пример на фиг. 2.30,а). Тогда стержни и усилия будут обозначаться номерами прилегающих полей. Например, стержень CE обозначится 62 (шесть — два) или 26, а его усилие — N_{62} . Сила P_1 будет называться силой 12, реакция опоры B — силой 34 и т. д.¹

Ферма, показанная на фиг. 2.30,а, является простейшей, но произвольные направления стержней и нагрузок усложняют аналитическое решение. Поэтому целесообразно воспользоваться графическим методом. Последовательно вырезая узлы, применим способ, изложенный выше.

Первым рассмотрим узел E , где имеется два неизвестных усилия N_{36} и N_{26} . С других узлов начать нельзя: в узле D — три, а в

¹ При большом числе стержней в случае цифрового обозначения полей обозначение стержней пишут, разделяя номера полей знаком тире, например, 12-24 и т. д. В этих случаях иногда удобно применять буквенные обозначения.

узле C — четыре неизвестных. На фиг. 2.30,б изображен силовой треугольник равновесия для узла E . Сперва отложена известная сила P_2 в виде отрезка 32 (в соответствии с новым правилом обозначения); из ее концов проведены до их взаимного пересечения прямые, параллельные стержням 36 и 26 (стержни DE и CE на фиг. 2.30,а); через точку 3 проведена прямая 36 , параллельная стержню 36 , а через точку 2 — прямая 26 , параллельная стержню 26 . Стрелкам дано замкнутое течение. Полученные направления усилий N_{36} и N_{26} переносим на чертеж узла



Фиг. 2.30. Построение диаграммы усилий для простейшей фермы.

а — схема фермы и нагрузки; б — треугольник равновесия узла E ; в — треугольник равновесия узла D ; г — многоугольник равновесия узла C ; д — общая диаграмма усилий, содержащая в себе многоугольники равновесия всех узлов (E , D и C).

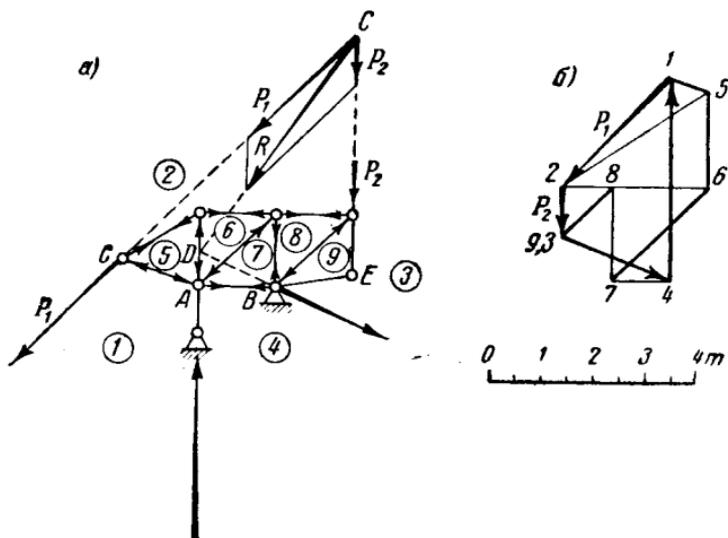
(фиг. 2.30,а): первое направлено к узлу E , второе — от узла. У противоположных концов этих стержней проставляем стрелки обратных направлений.

Переходим к узлу D . Здесь два неизвестных усилия — N_{35} и N_{65} . Отложим сперва известное усилие N_{36} (фиг. 2.30,в). Затем, проводя из его концов прямые, параллельные стержням 35 и 65 , найдем усилия N_{35} и N_{65} . Полученные направления усилий показываем стрелками у узла D . У узлов B и C на фиг. 2.30,а проставляем стрелки обратного направления. Переходя к узлу C , имеем три известных силы: P_1 , N_{26} и N_{65} и две неизвестных: N_{54} и N_{14} . На фиг. 2.30,г показан соответствующий многоугольник равновесия.

Мы рассмотрели здесь метод вырезания узлов, причем для удобства объяснения многоугольник равновесия для каждого узла рисовали отдельно. Обычно эти многоугольники изображаются в контакте друг с другом (фиг. 2.30,д). Образующийся общий силовой многоугольник фермы называется *диаграммой усилий*.

В диаграмме направления усилий стержней не указываются стрелками, так как каждая сторона диаграммы выражает одновременно два взаимно противоположных усилия, относящихся к двум противоположным концам стержня. Направление усилия определяется, если мысленно восстановить многоугольник равновесия соответствующего узла.

Рассмотрим теперь ферму на двух опорах. На фиг. 2.31,а изображена плоская ферма, левая опора A которой является под-



Фиг. 2.31. Построение диаграммы усилий для простейшей фермы.

а — ферма на двух опорах (A и B) несет нагрузки P_1 и P_2 . Сложив их графически, определяем реакции опор (силы 34 и 41 — фиг. б); б — полная диаграмма усилий. Сжатие отмечено жирными линиями.

вижной, правая B — неподвижной. Требуется найти усилия в стержнях фермы при нагрузке двумя силами $P_1=3000$ кг и $P_2=1000$ кг.

Определим реакции опор графическим путем. Для этого найдем точку C пересечения направлений сил P_1 и P_2 и произведем здесь графическое сложение этих сил. Масштаб показан на фиг. 2.31,б. Полученная равнодействующая R должна уравновеситься двумя реакциями опор. Если три силы взаимно уравновешивают друг друга, то их направления пересекаются в одной точке; направление реакции A вертикально, оно пересекается с направлением силы R в точке D , следовательно, через эту же точку проходит и направление реакции B . Отложив силы P_1 и P_2 на фиг. 2.31,б (в соответствии с нумерацией полей, принятой на фиг. 2.31,а, эти силы обозначены цифрами 12 и 23), проведем линии 14 и 34 параллельно направлениям реакций A и B до их пе-

ресека в точке 4. Полученные отрезки 14 и 34 изображают реакции опор. Замкнутый многоугольник 12341 есть многоугольник внешних сил.

Перейдем к определению усилий в стержнях фермы. Начнем с узла *E*. Так как узел *E* не нагружен и содержит только два стержня, усилия в обоих стержнях равны нулю (см. фиг. 2. 19,а). Следовательно, на диаграмме усилий (фиг. 2. 31,б) точка 9 совмещается с точкой 3. Чтобы определить точку 8, проведем через точку 9 прямую, параллельную стержню 98, а через точку 2 — параллельную стержню 28; пересечение этих прямых дает точку 8. Далее определяем точку 7, проводя прямые, параллельные стержням 87 и 47, через имеющиеся точки 8 и 4 (фиг. 2. 31,б), соответствующие полям, граничащим с полем 7 (фиг. 2. 31,а). Затем таким же путем находим точку 6, исходя из соседних полей 7 и 2, и точку 5, исходя из полей 6 и 1. Соединяя теперь точку 5 с точкой 2, получаем последнее усилие N_{25} ; направление этого усилия должно быть параллельно направлению стержня 52, что служит проверкой правильности и точности построения диаграммы.

Направления усилий показаны на фиг. 2. 31,а. Они определены в результате рассмотрения многоугольников равновесия узлов. Например, к узлу *A* примыкают поля 4, 1, 5, 6 и 7 и в нем сходятся пять сил, которые образуют на фиг. 2. 31,б силовой многоугольник 415674. Направление силы 41 (реакция *A*) известно; отсюда определяются направления всех остальных усилий, так как они должны идти по многоугольнику в одну сторону: усилие 15, следовательно, направлено вправо, к узлу, т. е. стержень 15 сжат; усилие 56 — вниз, тоже по направлению к узлу; усилие 67 — к узлу, а усилие 74 — от узла. Усилия сжатия иногда показывают на диаграмме жирными линиями, усилия растяжения — тонкими. Значения усилий, измеренные по масштабу на диаграмме, приведены в следующей таблице.

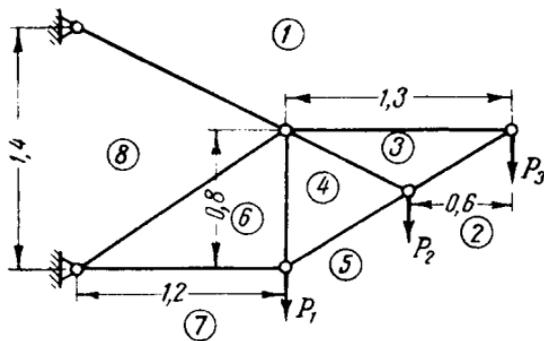
Таблица 3

Наименование стержня	25	26	28	15	47	39	56	78	67	89
Усилие в тоннах	3,00	2,88	1,00	-0,82	1,09	0	-1,90	1,85	-2,61	-1,41

Задачи. 1. Построить диаграмму усилий для фермы, показанной на фиг. 2. 32. Дано: $P_1=800$ кг, $P_2=600$ кг и $P_3=1000$ кг. Ответ см. табл. 4.

Таблица 4

Наименование стержня	81	31	32	45	67	86	64	43
Усилие в тоннах	3,70	1,65	-1,89	-2,55	-2,16	-1,35	2,13	0,60



Фиг. 2.32.

2. Проверить графическим путем усилия в ферме, рассчитанной в § 5 (фиг. 2.20) аналитически.

Контрольные вопросы

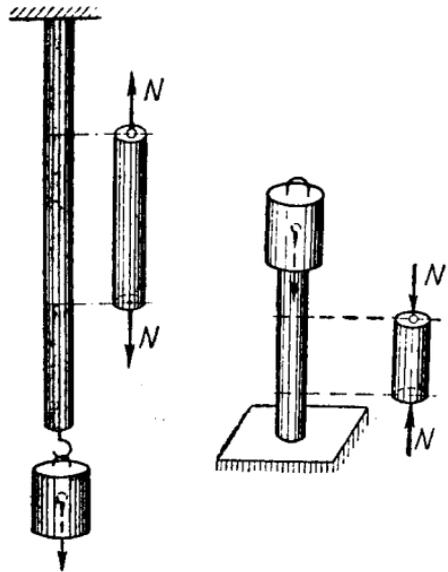
1. Что называется плоской фермой?
2. Дайте определение геометрической неизменяемости системы.
3. Какая система называется мгновенно изменяемой?
4. Какая ферма называется прикрепленной и какая свободной?
5. Какова зависимость между количеством узлов и необходимым количеством стержней для прикрепленной плоской фермы?
6. То же — для свободной фермы.
7. Что называется простейшей фермой?
8. Какие фермы называются преобразованными?
9. Какое количество стержней необходимо для прикрепления диска к другому диску и как они должны быть расположены?
10. Какое количество стержней необходимо для соединения трех дисков в одну неизменяемую систему? Как они должны быть расположены?
11. Как определяются усилия в соединяющих стержнях?
12. Перечислить случаи, когда усилия в стержнях фермы заведомо равны нулю.
13. В чем состоит способ вырезания узлов и когда он применяется?
14. В чем состоит способ сквозных сечений? Как выбирается точка моментов? Когда применяется способ проекций?
15. На каком свойстве силового многоугольника основан графический способ определения усилий?
16. Укажите порядок построения диаграммы усилий при расчете плоской фермы.

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

§ 1. Нормальные напряжения

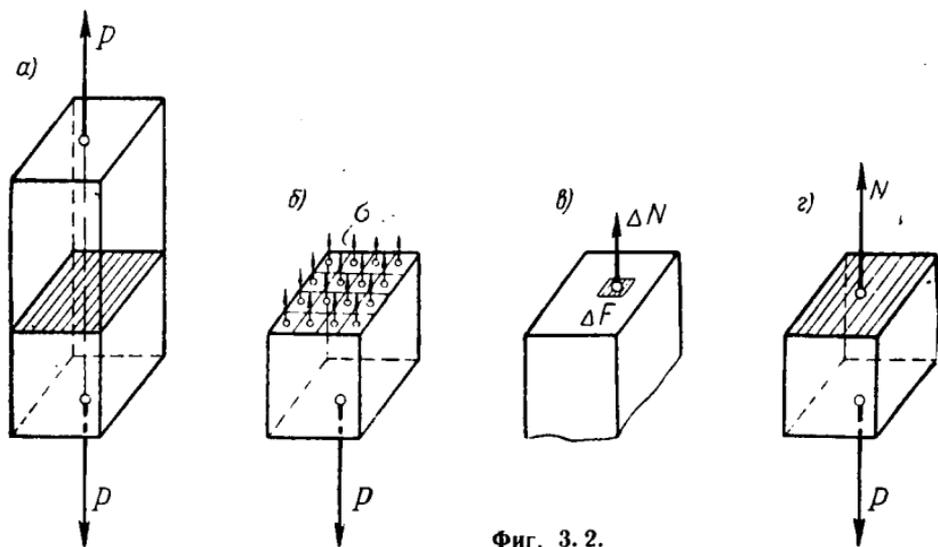
В различных сооружениях и машинах можно указать большое число деталей, работающих на растяжение или сжатие. Вертикальный стержень с защемленным верхним концом растягивается грузом, подвешенным к его нижнему концу, а стержень, опирающийся нижним концом, сжимается поставленным на него грузом (фиг. 3.1). В предыдущей главе показано, что стержни ферм оказываются сжатыми или растянутыми. Все гибкие детали, как тросы, ленты, проволока, цепи, могут воспринимать только растягивающие силы. Во время вспышки газов в цилиндре мотора шатун будет сжат, а шпильки, крепящие гильзу к блоку, растянуты. В полете самолета тяги ручного и ножного управления, стержни подмоторной рамы, стержни ферменного фюзеляжа также работают на растяжение или сжатие.

Рассмотрим призматический стержень с прямой осью, к которому приложены силы P , проходящие строго по его оси, т. е. через центры тяжести сечений (фиг. 3.2,а). Эти силы вызывают *центральное растяжение* стержня. Собственный вес стержня, как правило, мал в сравнении с силами P и потому в расчет, за исключением особо оговариваемых случаев, не принимается. Вообразим, что стержень рассечен плоскостью, перпендикулярной к его



Фиг. 3.1. Осевое растяжение и сжатие стержня.

оси (на фиг. 3. 2,а эта плоскость заштрихована). Такое сечение называется поперечным. Его площадь обозначим через F . Отбросим мысленно верхнюю часть стержня и рассмотрим только нижнюю (фиг. 3. 2,б). Действие верхней, отброшенной части на рассматриваемую нижнюю приводится к силам, распределенным сплошь по всему поперечному сечению. Интенсивность этих сил называется напряжением (глава I, § 8). Напряжение, направленное перпендикулярно к сечению, называется *нормальным* и обо-



Фиг. 3. 2.

а — рассекаем мысленно растянутый стержень; б — распределение нормальных напряжений по сечению; в — элементарная сила ΔN (действующая на элементарной площадке ΔF); г — полная сила N в сечении (уравновешивает приложенную нагрузку P).

значается греческой буквой σ . Возьмем в сечении около произвольной точки малую площадку ΔF (фиг. 3. 2,в). На эту площадку приходится малая растягивающая сила ΔN . Нормальное напряжение σ в данной площадке и в данной точке сечения может быть принято равным отношению малой силы ΔN к малой площади ΔF :

$$\sigma = \frac{\Delta N}{\Delta F}. \quad (1)$$

Напряжение имеет размерность $\frac{\text{сила}}{\text{площадь}} = \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ или $\frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$.

Зависимость напряжения от растягивающих сил получается из условия равновесия отсеченной части. Внутренние силы должны уравновесить внешнюю нагрузку P . Они дают в сечении равнодействующую N (фиг. 3. 2,г), направленную вдоль оси стержня противоположно силе P и равную ей. Эта равнодействующая называется продольной или осевой силой. Если известен закон распределения напряжений по сечению, то, зная их равнодействующую-

щую, легко найти напряжение в каждой точке сечения. Опыт показывает, что прямые, нанесенные на боковой поверхности растягиваемого стержня перпендикулярно его оси до начала деформации, и после деформации остаются прямыми, перпендикулярными оси. Это позволяет сделать предположение о том, что сечение после деформации остается плоским (гипотеза плоских сечений). Гипотеза плоских сечений приводит к выводу, что при растяжении (сжатии) бруса напряжения распределяются по сечению равномерно, а следовательно,

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}, \quad (2)$$

т. е. нормальное напряжение в поперечном сечении центрально растянутого стержня равно частному от деления растягивающего усилия на площадь поперечного сечения. Формула (2) справедлива независимо от формы поперечного сечения стержня. Если стержень сжат, а не растянут, то напряжения направлены в противоположном направлении, но их величина попрежнему вычисляется по формуле (2).

Условие прочности. Надежная работа стержня возможна лишь в том случае, когда напряжения в нем не превосходят некоторого определенного предела. Это наибольшее напряжение, при котором гарантирована нормальная и долговременная работа стержня, называется *допускаемым напряжением* и обозначается $[\sigma]$. Условие прочности состоит в том, что действительное напряжение не должно превосходить допускаемое:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (3)$$

Относительно допускаемого напряжения пока заметим, что оно зависит от свойств материала, характера нагружения, назначения сооружения и ряда других причин и, конечно, должно быть ниже того напряжения, при котором наступает разрушение. Более подробно об этом будет сказано ниже. Выражение (3) является основной расчетной формулой для определения напряжения при растяжении или сжатии и позволяет решать следующие важнейшие практические задачи.

Подбор сечения. Дано растягивающее (или сжимающее) усилие N и допускаемое напряжение $[\sigma]$. Требуется найти площадь F поперечного сечения стержня. Из формулы (3) получаем $F \geq \frac{N}{[\sigma]}$. С такими задачами приходится иметь дело при проектировании, когда внешние силы устанавливаются нормами и известен материал, из которого должна быть сделана деталь.

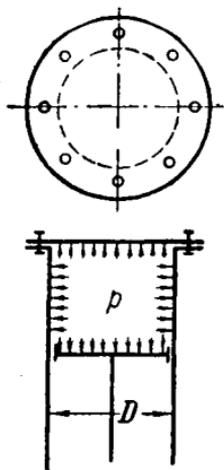
Определение грузоподъемности. Даны размеры поперечного сечения стержня и допускаемое напряжение $[\sigma]$ материала, из которого он сделан. Требуется установить наиболь-

шую силу N , которую безопасно может выдержать стержень. Из формулы (3) получаем $N < F[\sigma]$.

С задачами такого рода приходится встречаться в тех случаях, когда при изменившихся эксплуатационных условиях необходимо установить наибольшие нагрузки, которые способно выдержать уже существующее сооружение.

Проверка прочности. Дано усилие N , площадь поперечного сечения стержня F и допускаемое напряжение материала $[\sigma]$. Необходимо найти напряжение и сравнить его с допускаемым. Задача решается по формуле (3).

Подбор сечения по равнопрочности. При ремонте стержней часто приходится решать такую задачу. Известна площадь F_1 сечения ремонтируемого стержня; известно допускаемое напряжение $[\sigma]_1$ материала стержня. Необходимо подобрать площадь F_2 сечения соединяющей детали (муфты, бужа, накладок), если материал детали имеет допускаемое напряжение $[\sigma]_2$. Решается эта задача так. Наибольшая сила, которую может выдержать ремонтируемый стержень, равна $N = F_1[\sigma]_1$. Соединяющая деталь должна выдерживать по крайней мере ту же силу $N = F_2[\sigma]_2$. Приравняв правые части этих двух равенств, получаем $F_1[\sigma]_1 = F_2[\sigma]_2$. Отсюда площадь сечения соединяющей детали $F_2 = \frac{[\sigma]_1}{[\sigma]_2} F_1$.



Фиг. 3.3. Давление газов в цилиндре стремится разорвать болты, прикрепляющие крышку.

Пример 1. Цилиндр двигателя внутреннего сгорания имеет внутренний диаметр $D = 160$ мм (фиг. 3.3). Число болтов, крепящих крышку к цилиндру, $n = 8$. При вспышке горючей смеси в

цилиндре развивается давление $p = 60$ кг/см². Определить диаметр d болтов, если допускаемое напряжение стали, из которой сделаны болты, $[\sigma] = 1000$ кг/см².

Определяем полное давление на крышку цилиндра:

$$P = p \frac{\pi D^2}{4} = 60 \frac{3,14 \cdot 16^2}{4} = 12080 \text{ кг.}$$

Усилие, приходящееся на один болт, равно $N = \frac{P}{n} = \frac{12080}{8} = 1510$ кг. Необходимая площадь поперечного сечения болта $F = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{1510}{1000} = 1,51$ см², но $F = \frac{\pi d^2}{4}$; следовательно, болты должны иметь диаметр

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,51}{3,14}} = 1,4 \text{ см} = 14 \text{ мм.}$$

Пример 2. Какой груз P можно поднять тросом, свитым из 20 проволок диаметром $d=0,4$ мм, если допускаемое напряжение материала проволок $[\sigma]=8000$ кг/см².

Каждая проволока может выдержать груз

$$P_1 = \frac{\pi d^2}{4} [\sigma] = \frac{3,14 \cdot 0,04^2}{4} 8000 = 10,1 \text{ кг.}$$

Тросом можно поднять груз $P=20P_1=202$ кг.

Пример 3. Проверить прочность кронштейна, рассмотренного в § 4 главы II (фиг. 2.13), считая, что подкос AC деревянный и имеет круглое сечение диаметром $d_1=6$ см, а тяга AB стальная— диаметром $d_2=1,6$ см. Допускаемое напряжение стали 1000 кг/см² и дерева 100 кг/см².

Вычисляем напряжения:

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{4 \cdot 2000}{3,14 \cdot 6^2} = 70,7 \text{ кг/см}^2 < 100 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = \frac{4 \cdot 1732}{3,14 \cdot 1,6^2} = 860 \text{ кг/см}^2 < 1000 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, и подкос и тяга оказываются прочными. В данном примере предполагается, что подкос достаточно короткий и ему не угрожает боковое выпучивание. Это явление рассматривается в гл. XIV.

Пример 4. Поврежденную хроманселевую трубу $D \times D_1=30 \times 27$ мм (фиг. 3.4) необходимо отремонтировать постановкой муфты. Даны допускаемые напряжения трубы $[\sigma]_1=1200$ кг/см² и муфты $[\sigma]_2=700$ кг/см². Определить поперечные размеры муфты.

Площадь сечения ремонтируемой трубы

$$F_1 = \frac{\pi}{4} (D^2 - D_1^2) = \frac{3,14}{4} (3,0^2 - 2,7^2) = 1,34 \text{ см}^2.$$

Пользуясь условием равнопрочности, находим площадь сечения муфты

$$F_2 = \frac{[\sigma]_1}{[\sigma]_2} F_1 = \frac{1200}{700} 1,34 = 2,30 \text{ см}^2.$$



Фиг. 3.4. Ремонт разорванного стержня. Накладываемая муфта должна быть равнопрочной стержню.

Внутренний диаметр муфты берем равным внешнему диаметру трубы $D=3,0$ см. Из формулы для площади сечения $F_2 = \frac{\pi}{4}(D_2^2 - D^2)$ находим внешний диаметр муфты

$$D_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\pi} + D^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,30}{3,14} + 3,0^2} = 3,45 \text{ см.}$$

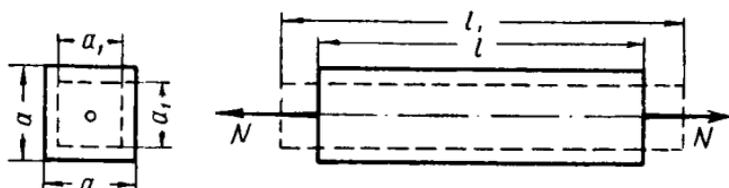
Муфту нужно сделать из трубы 35×30 мм.

Задачи. 1. По данным примера 3 определить, какой предельный допускаемый груз может выдержать кронштейн. *Ответ:* 1160 кг.

2. Поврежденную трубу в примере 4 необходимо отремонтировать бужем (внутренней вставкой), взяв внешний диаметр бужа равным внутреннему диаметру D_1 трубы. Найти внутренний диаметр D_2 бужа, если допускаемое напряжение для него $[\sigma]_2 = 700$ кг/см². *Ответ:* $D_2 = 2,09$ см.

§ 2. Деформация призматического стержня

Опыты показывают, что при растяжении длина стержня увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются. У резинового стержня эта деформация получается настолько большой, что она ясно видна невооруженным глазом. Деформацию при растяже-



Фиг. 3. 5. При растяжении стержня его длина увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются.

нии металлических стержней можно заметить путем измерения специальными приборами. Пусть первоначальная длина стержня равна l (фиг. 3. 5), а длина после деформации растяжения l_1 . Один из поперечных размеров стержня до деформации обозначим через a и после деформации a_1 . Приращение длины стержня вследствие деформации растяжения $\Delta l = l_1 - l$ называется *абсолютным удлинением*. Изменение поперечных размеров $\Delta a = a - a_1$ называется *абсолютным поперечным сужением*. Величины Δl и Δa зависят от размеров стержня, первая от длины, а вторая от поперечного размера. Они характеризуют деформацию данного стержня. Отношение абсолютного удлинения к первоначальной длине стержня называется *относительным удлинением*. Обозначим относительное удлинение через ϵ . Тогда по определе-

нию $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$. Это отвлеченная величина, не зависящая от размеров стержня. Аналогично величина $\epsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}$ называется *относительным поперечным сужением*. Опытным установлено, что отношение ϵ_1 к ϵ имеет для каждого материала постоянное значение

$$\mu = \frac{\epsilon_1}{\epsilon}. \quad (4)$$

Назовем величину μ *коэффициентом поперечной деформации*¹. Он связывает поперечную деформацию с продольной деформацией при одноосном растяжении (или сжатии). Коэффициент μ определяют из опытов на растяжение или сжатие путем измерения продольной и поперечной деформации при одной и той же нагрузке.

Значения коэффициента μ для некоторых материалов

Сталь	0,25—0,3	Пробка	0,00
Дуралюмин	0,32—0,36	Фанера	0,07
Медь	0,31—0,34	Целлулоид	0,39
Свинец	0,45	Каучук	0,47

Зависимость между напряжением и деформацией. Растягивая или сжимаемая стержень, легко обнаружить, что с увеличением силы N абсолютное удлинение стержня увеличивается. При одинаковой нагрузке у длинных стержней оно больше, чем у коротких. У стержней с одинаковой длиной и с различной площадью поперечного сечения абсолютное удлинение тем меньше, чем больше площадь F . Опытными установлено, что в определенных границах нагрузки *абсолютное удлинение Δl прямо пропорционально растягивающему усилию N и длине l стержня и обратно пропорционально площади F поперечного сечения:*

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}. \quad (5)$$

Здесь $\frac{1}{E}$ является коэффициентом пропорциональности. Величина E называется модулем упругости при растяжении (сжатии) или модулем *продольной упругости*. Он характеризует способность данного материала деформироваться под действием нагрузки. Деля обе части равенства (5) на первоначальную длину l , получаем относительное удлинение $\epsilon = \frac{N}{EF}$.

¹ Коэффициент μ называют коэффициентом Пуассона.

Произведение EF называется *жесткостью* стержня при растяжении и сжатии. Чем больше это произведение, тем меньше деформация, тем более жестким является данный стержень. Подставляя в выражение относительной деформации значение $\sigma = \frac{N}{F}$ преобразуем формулу (5) к виду

$$\sigma = E \epsilon, \quad (6)$$

который выражает в наиболее простой форме закон пропорциональности¹. Этот закон, как указывалось, справедлив только в определенных пределах, о чем подробнее сказано ниже.

Модуль упругости имеет такую же размерность, как и напряжение $[\text{кг/см}^2]$, так как величина ϵ безразмерна. Значение модуля E определяется опытным путем.

Модуль упругости E некоторых материалов
кг/см²

Сталь 3	2·10 ⁶ —2,1·10 ⁶
Дуралюмин	7·10 ⁵
Медь, бронза, латунь	1·10 ⁶
Чугун	1,15·10 ⁶ —1,6·10 ⁶
Дерево вдоль волокон	10 ⁵

Пример 1. Стальная труба, имеющая длину $l=2$ м и площадь поперечного сечения $F=2$ см², растянута силой $N=2$ т. Определить абсолютное и относительное удлинения трубы.

Полагая модуль упругости $E=2 \cdot 10^6$ кг/см², находим абсолютное удлинение по закону пропорциональности:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{2000 \cdot 200}{2\,000\,000 \cdot 2} = 0,1 \text{ см.}$$

Относительное удлинение $\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,1}{200} = 0,0005$.

Следует обратить внимание на то, что абсолютные и относительные деформации очень малы.

Пример 2. Груз $P=8660$ кг подвешен на двух одинаковых стальных стержнях 1 и 2 (фиг. 3. 6). Дано: высота $h=2$ м, угол $\alpha=30^\circ$, допускаемое напряжение $[\sigma]=1000$ кг/см². Необходимо: 1) подобрать площади сечений стержней и 2) определить опускание δ узла A под действием груза.

Вырезая узел A (фиг. 3. 6,б) и рассматривая его равновесие, получаем два уравнения проекций:

$$N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0,$$

$$N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - P = 0.$$

¹ Закон пропорциональности, выражаемый формулой (5), был установлен в 1678 г. Р. Гуком и называется *законом Гука*.

Отсюда находим

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2 \cos \alpha} = \frac{8660}{2 \cdot 0,866} = 5000 \text{ кг.}$$

Необходимая площадь сечения стержня

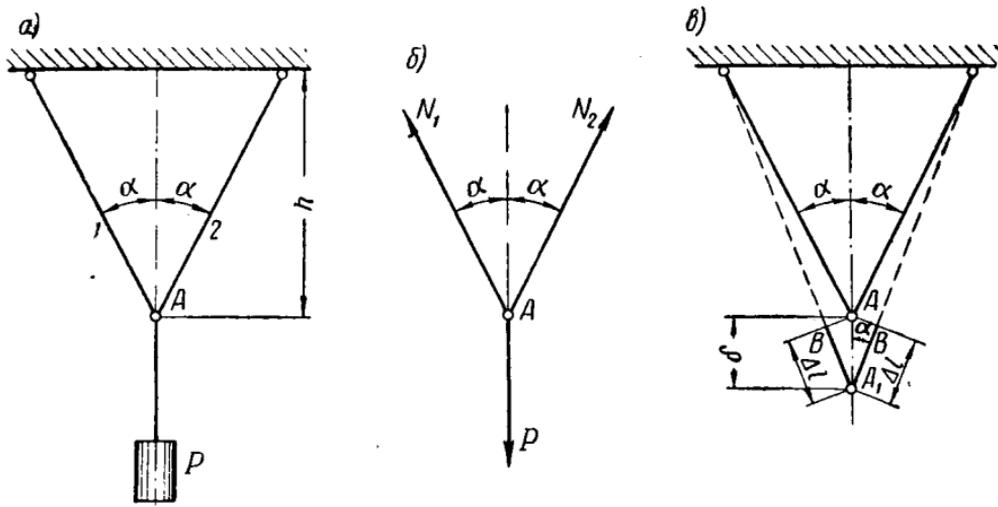
$$F = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{5000}{1000} = 5 \text{ см}^2.$$

Длина стержня

$$l = \frac{h}{\cos \alpha}.$$

Каждый стержень удлинится на

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{Nh}{EF \cos \alpha} = \frac{5000 \cdot 200}{2000000 \cdot 0,866 \cdot 5} = 0,115 \text{ см.}$$



Фиг. 3.6. Пример расчета двухстержневого узла.

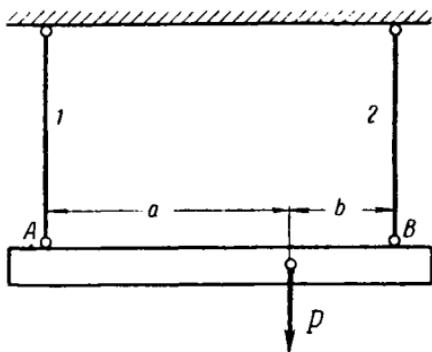
a — груз P удерживается тягами 1 и 2; *б* — усилия тяг одинаковы; *в* — перемещение узла в результате деформации тяг.

В результате удлинения стержней узел A опустится в положение A_1 (фиг. 3.6, *в*). Так как удлинения малы, можно принять, что: 1) новый угол между стержнями равен первоначальному α и 2) удлинения стержней Δl равны отрезкам A_1B , отсекаемым перпендикулярами, опущенными из точки A на новые положения стержней. Из треугольника AA_1B находим

$$\delta = \frac{\Delta l}{\cos \alpha} = \frac{0,115}{0,866} = 0,133 \text{ см.}$$

Задача 1. Брус AB подвешен на двух одинаковых стержнях 1 и 2 (фиг. 3.7) и нагружен силой $P=3 \text{ т}$. Дано: $a=2 \text{ м}$, $b=1 \text{ м}$, длина стержней $l=1 \text{ м}$, допускаемое напряжение для стержней

$[\sigma]=1000 \text{ кг/см}^2$ и модуль $E=2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. Подобрать площадь сечения F стержней. Определить, как опустятся точки A и B и



Фиг. 3. 7.

на какой угол α наклонится брус (изгибом бруса пренебречь).
 Ответ: $F=2 \text{ см}^2$; опускание точки A — $0,025 \text{ см}$, точки B — $0,05 \text{ см}$;
 $\alpha=0,0000833$ радиана= $0,00477^\circ$.

§ 3. Диаграмма растяжения

Для испытания материалов изготовляют специальные образцы определенных стандартных размеров. Для испытаний на растяжение чаще всего применяют круглые, так называемые «нор-



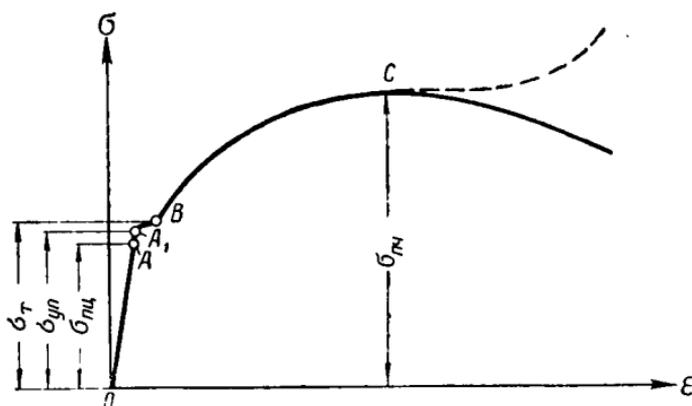
Фиг. 3. 8.

a — нормальный круглый образец для испытания на растяжение; b — шейка на разорванном образце из пластичного материала (мягкой стали).

мальные» образцы, у которых отношение расчетной длины к диаметру сечения равно 10 (фиг. 3. 8,а). Круглые цилиндрические головки на концах образца служат для захвата в машине, а назначение конических частей образца — избежать концентрации (местного увеличения) напряжений вблизи расчетной части

образца. Образцы испытывают на специальных испытательных машинах, которые не только показывают нагрузку в любой момент испытания, но и автоматически чертят диаграмму, отмечающую одновременно изменение величины силы и соответствующей ей деформации. Нагружение образца обычно, за исключением специальных испытаний, производится статически, т. е. нагрузкой, постепенно возрастающей от нуля до конечного значения.

Рассмотрим диаграмму, получаемую при растяжении круглого образца из мягкой стали. На диаграмме при ее вычерчивании откладываются в некоторых масштабах по вертикали растяги-



Фиг. 3.9. Диаграмма растяжения мягкой стали.
 $\sigma_{пц}$ — предел пропорциональности; $\sigma_{уп}$ — предел упругости; σ_t — предел текучести; $\sigma_{пч}$ — предел прочности.

вающая сила $N = \sigma F$, а по горизонтали абсолютное удлинение $\Delta l = \epsilon l$. Если вертикальный масштаб изменить, разделив на первоначальную площадь поперечного сечения образца F , а горизонтальный разделить на расчетную длину l , то диаграмма будет изображать зависимость между напряжением σ , отнесенным к первоначальной площади поперечного сечения, и относительным удлинением ϵ (фиг. 3.9). Проследим эту зависимость.

1. Между начальной точкой O и точкой A диаграмма изображается практически прямой линией. На этом участке напряжения σ пропорциональны удлинениям ϵ . Здесь соблюдается закон пропорциональности. Наибольшее напряжение, отнесенное к первоначальной площади поперечного сечения, до которого сохраняется пропорциональность между напряжениями и деформациями, называется *пределом пропорциональности* и обозначается $\sigma_{пц}$. На диаграмме пределу пропорциональности соответствует точка A .

2. Если постепенно уменьшать нагрузку, то пропорционально уменьшается удлинение образца и по снятии нагрузки оно столь мало, что его можно считать исчезнувшим. Такая деформация является *упругой*. Она наблюдается до определенного пре-

дела нагружения. Наибольшее напряжение, отнесенное к первоначальной площади поперечного сечения, при котором остаточные деформации можно считать отсутствующими, называется *пределом упругости* $\sigma_{уп}$. Точка A_1 , соответствующая пределу упругости, лежит вблизи точки A ; пределы упругости и пропорциональности иногда принимают совпадающими.

3. После точки A диаграмма растяжения при возрастании нагрузки начинает отклоняться от направления прямой OA и быстро переходит в почти горизонтальный участок, называемый *площадкой текучести*, удлинения увеличиваются без возрастания напряжений: материал «течет». Напряжение, отнесенное к первоначальной площади поперечного сечения, при котором деформация растет без увеличения нагрузки, называется *пределом текучести* σ_T .

4. За пределом текучести материал упрочняется; нагрузка снова начинает возрастать до своего наибольшего значения N_{max} , после которого сопротивление образца ослабевает в результате появления больших местных деформаций — образования «шейки» (фиг. 3. 8,б). В этом месте поперечное сечение образца сильно уменьшается и происходит разрыв. Напряжение, соответствующее наибольшей разрушающей нагрузке, отнесенное к первоначальной площади поперечного сечения образца, называется *пределом прочности* или *временным сопротивлением* $\sigma_{пч} = \frac{N_{max}}{F}$.

Подобные же диаграммы получаются и для других материалов. Некоторые диаграммы не имеют тех или иных характерных точек, имеющих в диаграмме мягкой стали. Напряжения, определяющие указанные выше характерные точки диаграммы, и относительное удлинение при разрыве для некоторых материалов приведены в табл. 5.

Таблица 5

Механические характеристики некоторых материалов

Материал	Предел пропорциональности $\sigma_{пч}$ кг/см ²	Предел текучести σ_T кг/см ²	Предел прочности $\sigma_{пч}$ кг/см ²	Относит. остаточное удлинение при разрыве %
Углеродистая сталь (сталь 3)	2000	2300	3800—4500	21
Хромоникелевая сталь	7400	7600	9100	21
Дуралюмин	1800	—	3600	16
Бронза (фосфористая)	2800	3200	4500	21
Чугун при растяжении	—	—	1400—1800	0,5
Чугун при сжатии	—	—	6000—10000	—

Хрупкие и пластичные материалы. Из приведенных в табл. 5 данных обращают на себя внимание характеристики чугуна. Растяжение чугуна сопровождается ничтожно малыми деформациями. Если мягкая сталь имеет относительное удлинение при разрыве 16—21%, то у чугуна оно равно только 0,5%. Материалы, разрушающиеся при малых деформациях, называются хрупкими. К хрупким материалам, помимо чугуна, относится стекло, естественные камни, бетон и т. п.

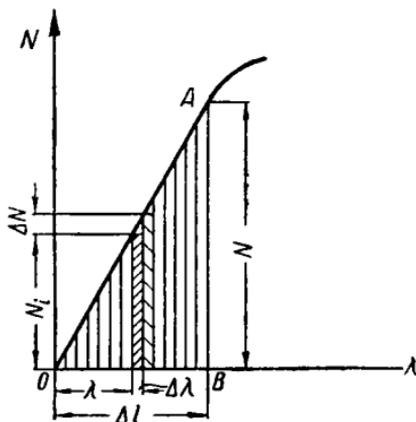
Другая особенность хрупких материалов состоит в том, что они различно сопротивляются растяжению и сжатию. Как правило, характеристика их работы на сжатие выше. Хрупкие материалы обычно употребляются на изготовление деталей, воспринимающих постоянную сжимающую нагрузку, — фундаменты, колонны и т. п.

Материалы, значительно деформирующиеся под действием нагрузки, называются *пластичными*. Наиболее типичными представителями пластичных материалов являются: мягкая сталь, медь, латунь.

Истинное напряжение. Диаграмма зависимости между σ и ϵ была получена делением растягивающей силы N на первоначальную площадь сечения образца F . В действительности же при

растяжении площадь поперечного сечения заметно уменьшается, особенно начиная с момента, соответствующего точке C . Чтобы получить истинное напряжение при том или ином значении растягивающей силы, необходимо силу делить на уменьшенную площадь поперечного сечения. Диаграмма, построенная по истинным напряжениям, показана пунктиром на фиг. 3. 9. Истинное напряжение в шейке и при падении нагрузки непрерывно возрастает вследствие сужения шейки; в момент разрыва оно значительно превосходит предел прочности.

Работа растягивающих сил. В результате деформации стержня точки приложения внешних сил перемещаются и, следовательно, силы совершают работу. Подсчитаем ее, предполагая, что напряжения не превосходят предела пропорциональности. Для этого обратимся к диаграмме растяжения (фиг. 3. 10). Пусть в некоторый момент загрузки растягивающая сила равна N_i ; соответствующее удлинение обозначим λ . В следующий момент сила увеличилась на малую величину ΔN и соответственно возросло удлинение тоже на очень малую величину $\Delta \lambda$. На этом перемещении сила N_i совершает работу, рав-



Фиг. 3. 10. Работа сил растяжения (измеряется площадью диаграммы).

ную произведению силы на пройденный путь: $N_i \Delta l$ и измеряемую на диаграмме площадью густо заштрихованного прямоугольника (фиг. 3. 10). При дальнейшем нагружении уже увеличенная сила ($N_i + \Delta N$) на новом приращении удлинения совершает работу, измеряемую площадью соседнего (редко заштрихованного) прямоугольника. Эта работа добавляется к ранее произведенной работе и т. д. Вся работа A при растяжении стержня равна площади треугольника OBA с основанием Δl и высотой N (фиг. 3. 10):

$$A = \frac{N\Delta l}{2}, \quad (7)$$

где N — конечное значение растягивающей силы;
 Δl — конечное значение удлинения, соответствующего растягивающей силе N .

Работа, затрачиваемая на растяжение в пределах пропорциональности, равна половине произведения конечного значения силы на конечное значение удлинения.

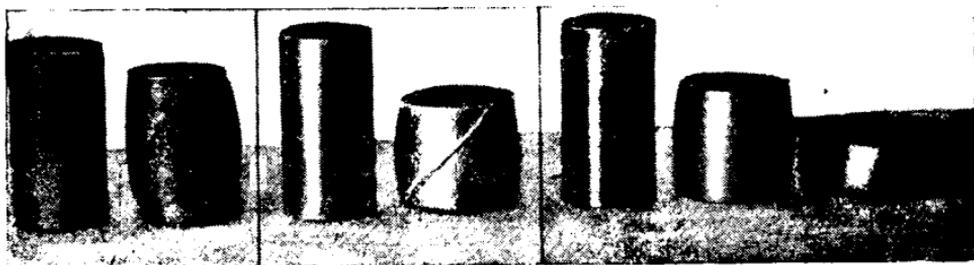
§ 4. Выбор допускаемого напряжения

Наибольшее напряжение, при котором обеспечивается надежная работа стержня, называется *допускаемым напряжением*. Выбор допускаемого напряжения является ответственным моментом при проектировании машин или сооружений; от правильного назначения допускаемого напряжения зависит их прочность и безопасность, а также экономичность и вес. Можно задаться очень низкими допускаемыми напряжениями. Конструкция окажется прочной, но потребует слишком много материала и будет излишне тяжелой. Если допускаемое напряжение принять завышенным, то это может привести к преждевременному разрушению сооружения. Выбирая допускаемое напряжение, необходимо учитывать механические свойства материала, назначение проектируемой конструкции, характер приложения нагрузки, а также другие обстоятельства, указываемые ниже.

Особенности явления сжатия. При сжатии стержня возможно явление потери устойчивости — выпучивание. Величина нагрузки, при которой возможна потеря устойчивости, зависит от соотношения между длиной стержня и его поперечными размерами. Для стержней, у которых длина относительно мала, опасность выпучивания отпадает. Вопрос устойчивости сжатого стержня будет рассмотрен в дальнейшем. Замечания об особенностях явления сжатия, даваемые в настоящем параграфе, относятся к достаточно коротким стержням. Пластичные и хрупкие материалы различно воспринимают сжатие. Диаграмма сжатия для образца из пластичного материала (например, медного или стального) до предела прочности приблизительно такая же, что была получена при растяжении, с теми же характерными величи-

нами, но за пределом прочности величина сжимающего усилия не падает, как при растяжении, а возрастает. Это объясняется значительным увеличением площади поперечного сечения вследствие расплющивания образца. Сколько бы ни росла сжимающая сила, разрушение не наступает. Образец (фиг. 3.11), уменьшаясь в длину, расширяется в поперечном направлении и приобретает бочкообразный вид; такая форма сжатого образца является следствием трения на поверхности соприкосновения образца с опорными плитами машины.

Иначе ведут себя образцы из хрупкого материала. Хрупкие материалы, достигнув предела прочности при сжатии, разрушаются при сравнительно малых деформациях. На фиг. 3.11 пока-



чугун

дуралюмин

сталь

Фиг. 3.11. Характер разрушения различных материалов при сжатии.

Чугун и дуралюмин сдвигаются по косо́й площадке, мягкая сталь сминается.

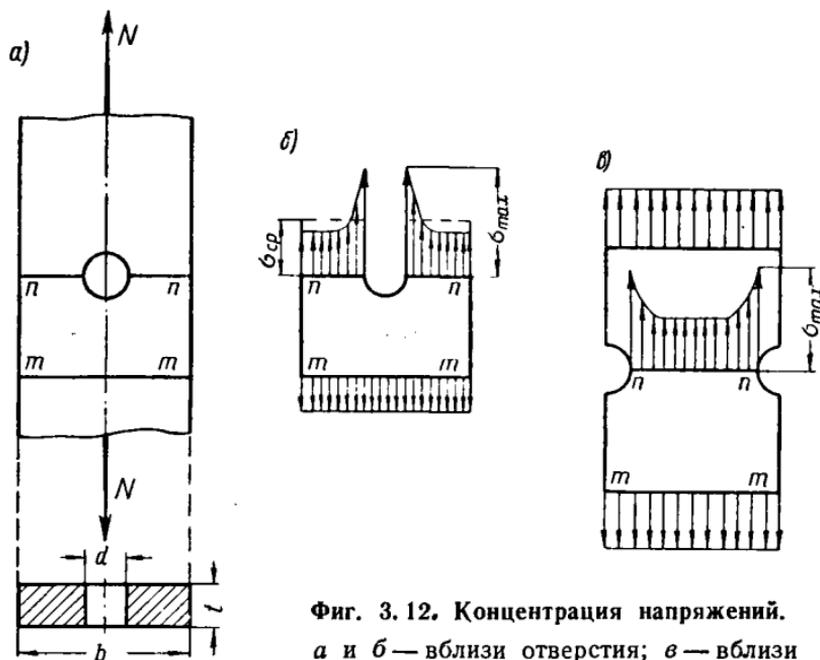
зан чугу́нный образец до и после разрушения. Такой же характер разрушения при сжатии наблюдается и у дуралюминовых образцов, хотя дуралюмин не является представителем хрупких материалов, так как его разрушение происходит при значительных деформациях. Разрушение образцов происходит по плоскости, наклоненной к направлению сжатия примерно на угол 45° (фиг. 3.11). Объяснение последнего обстоятельства приведено ниже.

Концентрация напряжений. При определении напряжений в поперечных сечениях растянутого (или сжатого) стержня было принято допущение, что нормальные напряжения распределяются в сечении равномерно и, следовательно, вычисляются по формуле $\sigma = \frac{N}{F}$. Это оказывается справедливым лишь

в том случае, когда стержень имеет постоянное сечение по всей длине или когда сечения изменяются плавно. Если же сечения изменяются резко, то в областях этих изменений напряжения распределяются неравномерно. Например, неравномерно распределяются напряжения вблизи отверстий и выточек.

Пусть растягивается полоса (фиг. 3.12), имеющая отверстие. В сечении *тт*, достаточно удаленном от отверстия, нормальные напряжения распределяются равномерно. Но в ослабленном се-

чении mn , как показывают опыты, они распределяются неравномерно, достигая наибольшего значения σ_{\max} у отверстия (фиг. 3.12,б), где наблюдается, как говорят, концентрация напряжений. Аналогичная картина наблюдается вблизи выточек, выкружек и т. п. (фиг. 3.12,в). Среднее напряжение $\sigma_{\text{ср}}$ в ослаб-



Фиг. 3.12. Концентрация напряжений.
а и б — вблизи отверстия; в — вблизи выточки.

ленном сечении найдем как отношение продольного усилия N к площади F_{netto} ослабленного сечения:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{N}{F_{\text{netto}}}.$$

Для суждения о прочности материала в области концентрации необходимо знать величину наибольшего напряжения σ_{\max} :

$$\sigma_{\max} = \alpha_{\text{к}} \sigma_{\text{ср}}. \quad (8)$$

Коэффициент $\alpha_{\text{к}}$, указывающий, во сколько раз напряжения в области концентрации больше средних, называется *коэффициентом концентрации*; он определяется как опытным путем, так в ряде случаев и теоретически. Значения коэффициентов концентрации приводятся в справочниках. Для рассматриваемого случая растянутой полосы в зависимости от отношения радиуса отверстия (или выточки) к ширине полосы значение $\alpha_{\text{к}}$ изменяется. При малом отверстии оно достигает величины $\alpha_{\text{к}}=3$.

Пластичные и хрупкие материалы различно реагируют на концентрацию напряжений. Для пластичных материалов, имеющих явно выраженную площадку текучести, концентрация напряже-

ний неопасна: наибольшие напряжения, достигнув предела текучести, больше не растут, а напряжения меньшие при последующем нагружении продолжают увеличиваться до предела текучести. В результате этого напряжения выравниваются по всему сечению и эффект концентрации при статическом нагружении сглаживается. При нагрузках, быстро меняющихся во времени, концентрация напряжений снижает прочность материала, и ее следует учитывать.

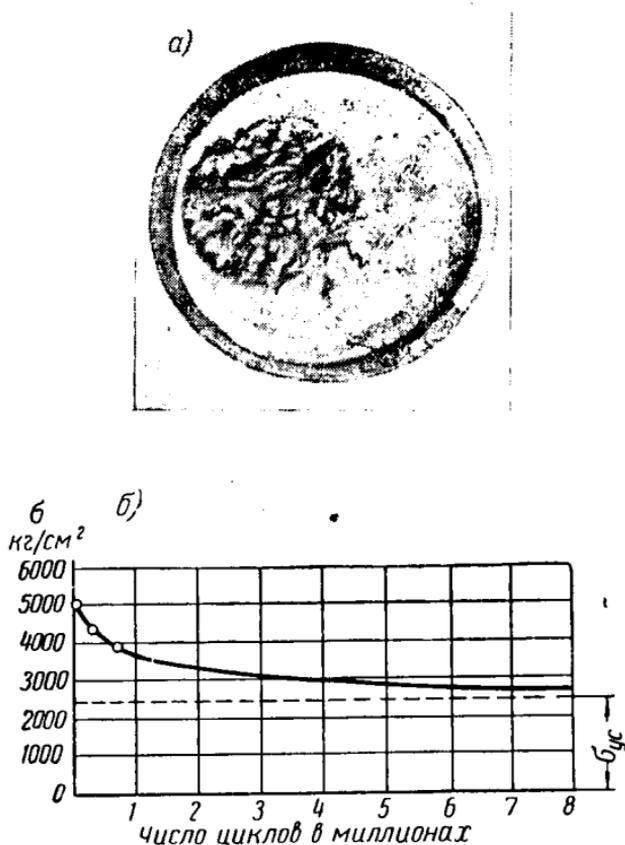
В случае хрупкого материала, имеющего мелкозернистую структуру (закаленные стали), концентрация напряжений оказывает существенное влияние. Неоднородное крупнозернистое строение хрупких материалов нередко является причиной большей концентрации напряжений, чем отверстия или выточки. В силу этого влияние концентрации напряжений, вызванной отверстиями и выточками, может оказаться незаметным.

Необходимо по возможности избегать концентрации напряжений, для чего следует деталям придавать плавные очертания и гладкую поверхность.

Прочность материалов при переменных нагрузках. Во многих деталях машин напряжения во время работы многократно периодически изменяются. Переменные напряжения возникают в коленчатых валах, шатунах, толкателях, клапанных пружинах и т. д. Специальные опыты и многочисленные поломки деталей показывают, что при переменных нагрузках материал может разрушаться при относительно небольших напряжениях, часто меньших предела упругости. Это явление называется «усталостью» материала. Поверхность разрушения при переменных нагрузках (фиг. 3. 13,а) имеет две зоны. Первая зона — на периферии — гладкая, притертая. Вторая — в середине — имеет грубозернистую структуру. Наличие первой зоны указывает, что разрушение началось с образования трещины у поверхности стержня. Эта трещина постепенно увеличивалась, захватывая все большую часть поперечного сечения. Многократные изменения нагрузки вызывали трение между краями трещины и потому образовалась притертая гладкая зона. В конце концов трещина настолько уменьшила поперечное сечение стержня, что он оказался неспособным выдерживать нагрузку и разрушился. Чтобы затруднить образование трещин усталости, поверхность деталей, работающих на переменные нагрузки, следует хорошо обрабатывать и не допускать ее порчи при эксплуатации.

Однократная смена напряжений называется *циклом*. Если наибольшее напряжение растягивающее, а наименьшее такой же величины, но сжимающее, то цикл называется *симметричным*. На основании многочисленных опытов с переменными нагрузками установлено, что: 1) многократные колебания нагрузки могут вызвать разрушение при напряжениях, меньших предела прочности; 2) число колебаний до разрушения зависит от величины наибольшего напряжения и от амплитуды колебания напряжений

(разности между наибольшим и наименьшим напряжением). При одном и том же наибольшем напряжении разрушение наступит тем быстрее, чем больше амплитуда; 3) если напряжение меньше некоторого определенного значения, то разрушение не произойдет при сколь угодно большом числе циклов; это напряжение называется *пределом усталости* и обозначается σ_{yc} .



Фиг. 3. 13.

a — поверхность излома вала, разрушившегося от «усталости». У краев видна притертая зона; *б* — кривая «усталости» при изгибе; σ_{yc} — предел усталости.

Предел усталости устанавливается опытным путем. Для определения σ_{yc} заготавливают серию одинаковых образцов из одного материала и подвергают их действию переменных нагрузок при различных напряжениях до разрушения. Обычно испытания ведутся при симметричном цикле. Снижая напряжения образцов, находят то предельное напряжение, при котором образец не разрушается после 10^7 циклов. Это напряжение и считают пределом усталости σ_{yc} при симметричном цикле. Нанося результаты опытов с серией образцов на график, получают *кривую усталости*

(фиг. 3. 13,б). Каждый материал при каждом определенном цикле напряжений и определенном виде деформации имеет свой предел усталости. Например, предел усталости стали при переменных нагрузках симметричного цикла на растяжение — сжатие составляет около 30% от предела прочности; $\sigma_{yc} = 0,3 \sigma_{пч}$.

Запас прочности. Чтобы обеспечить нормальную работу конструкции, фактические напряжения должны быть не выше допускаемых, определяемых как некоторая часть предела прочности:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пч}}{n}.$$

Величина n , бóльшая единицы, показывающая, во сколько раз допускаемое напряжение меньше предела прочности, называется *коэффициентом запаса прочности по временному сопротивлению*. Этот коэффициент выбирается с таким расчетом, чтобы допускаемые напряжения лежали в пределах упругости. Если последнее не будет соблюдено, то появятся остаточные деформации, которые могут нарушить правильную работу машины или сооружения. На выбор коэффициента запаса и, следовательно, допускаемого напряжения также влияют: в ряде случаев вид деформации детали, например, растягивается она или сжимается; наличие или отсутствие концентрации напряжений; вид нагрузки по характеру ее приложения — статическая, переменная или ударная; свойства материала — хрупкость, пластичность и т. д. Существенное значение для коэффициента запаса имеют и такие факторы, как точность расчета, назначение сооружения и срок его службы. Коэффициент запаса должен быть тем больше, чем менее точно известны силы, действующие на конструкцию, и менее точны расчетные формулы, чем более долговечной должна быть конструкция. Например, самолет, нуждающийся в конструкции легкой и относительно недолговечной, должен иметь меньший запас прочности, чем какое-либо крупное гражданское сооружение, которое должно будет служить десятки, а иногда и сотни лет. Часто основанием для выбора допускаемых напряжений и назначения коэффициента запаса прочности служит практика эксплуатации существующих сооружений. Если опыт показывает, что определенная конструкция, рассчитанная при данном коэффициенте запаса, оказалась в работе прочной, то при проектировании новых сооружений того же типа берут такой же коэффициент запаса. Для самолетных деталей коэффициент запаса устанавливается нормами прочности с учетом всех факторов и условий эксплуатации. В строительной и машиностроительной практике имеются свои нормы. В среднем минимальное значение коэффициента n для пластичных материалов при статической нагрузке равно 2,5, для хрупких материалов значение n берется бóльшим. В некоторых случаях для пластичных материалов до-

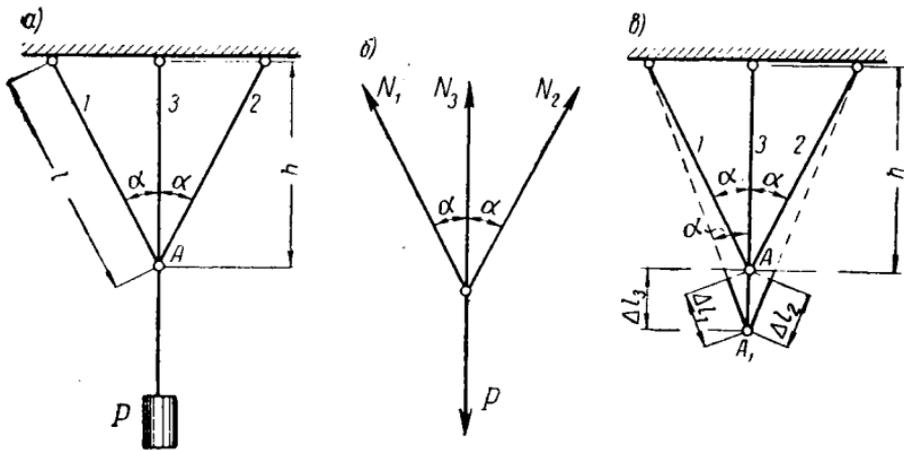
пускаемое напряжение назначается как некоторая часть предела текучести:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n'}$$

Величину n' называют коэффициентом запаса прочности по пределу текучести.

§ 5. Простейшие статически неопределимые задачи

В рассмотренных выше задачах можно было найти усилия в любом элементе системы, пользуясь лишь уравнениями равновесия твердого тела. Однако имеется большое число практически важных задач, при решении которых для определения усилий в



Фиг. 3.14. Пример статически неопределимой задачи.

a — груз P удерживается тремя тягами; b — схема равновесия узла — количество неизвестных усилий превышает количество уравнений равновесия; $в$ — схема деформации системы (дающая дополнительное уравнение).

элементах системы уравнений статики недостаточно. Такие системы называются *статически неопределимыми*. Например, ферма с шарнирными узлами, содержащая стержней больше, чем требуется по формулам (1) и (2) главы II, является статически неопределимой. Статически неопределимые системы будут подробно рассмотрены в главах VII и XII, в настоящем же параграфе показываются основные принципы решения статически неопределимых систем на нескольких простейших примерах.

Чтобы наглядно представить разницу между статически определимой системой и статически неопределимой, сравним две задачи: 1) груз подвешен к двухстержневому узлу (фиг. 3.6, a) и 2) груз подвешен к трехстержневому узлу (фиг. 3.14, a). Первая из них была решена в § 2 при помощи двух уравнений равновесия. Эта задача статически определима. При решении второй задачи, вырезав трехстержневой узел (фиг. 3.14, $б$), попрежнему

получим только два уравнения равновесия, так как все силы пересекаются в одной точке:

$$N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0, \quad (9)$$

$$N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3 - P = 0. \quad (10)$$

Эти уравнения содержат три неизвестных N_1, N_2, N_3 . Задача статически неопределима. Для решения статически неопределимых задач, помимо уравнений равновесия, необходимо составлять дополнительные уравнения, исходя из деформации системы. Рассмотрим конкретные примеры расчета.

Пример 1. Груз $P=1000$ кг подвешен на трех стержнях (фиг. 3.14,а). Первый и второй стержни имеют одинаковую жесткость EF , а третий имеет жесткость $E_3 F_3 = \frac{EF}{2}$. Угол $\alpha=60^\circ$. Требуется определить усилия в стержнях.

Дополнительное уравнение деформации составляем, рассматривая перемещения узла A (фиг. 3.14,в). Принимая во внимание соображения, изложенные в примере 2, § 2, устанавливаем, что $\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha$. Выражаем удлинения через усилия по закону пропорциональности

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF}, \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 h}{E_3 F_3}$$

и подставляем их в уравнение деформации, учитывая, что

$$l = \frac{h}{\cos \alpha}.$$

Тогда

$$\frac{N_1 h}{EF \cos \alpha} = \frac{N_3 h \cos \alpha}{E_3 F_3}. \quad (11)$$

Полученное уравнение совместно с уравнениями равновесия (9) и (10) позволяет определить три неизвестных усилия N_1, N_2 и N_3 . Из уравнения (9) находим, что $N_1 = N_2$. Уравнения (10) и (11) переписываем, принимая во внимание числовые значения P и α и заменяя N_2 через N_1 :

$$N_1 \cdot 0,5 \cdot 2 + N_3 - 1000 = 0,$$

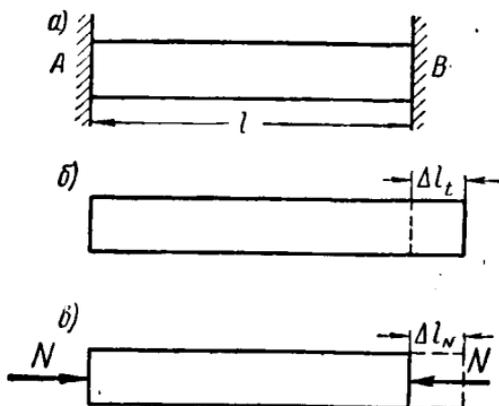
$$\frac{N_1}{0,5} = N_3 \cdot 0,5 \cdot 2.$$

Отсюда находим $N_1 = 333$ кг и $N_3 = 667$ кг.

Пример 2. Температурные напряжения. Стержень длиной l (фиг. 3.15,а) закреплен своими концами в абсолютно неподвижные блоки A и B и нагревается от t_1 до t_2 градусов. Определить напряжения в стержне, если он имеет площадь сечения F , модуль упругости материала стержня E и коэффициент температурного расширения α .

При нагревании стержень расширяется и давит на блоки. Сопротивление блоков передается на стержень в виде сил N (фиг. 3. 15, в). Из условия равновесия в этом случае следует лишь то, что эти силы одинаковы. Обратимся к условию деформации: удлинение Δl_t стержня от нагревания и укорочение Δl_N от действия сил N равны между собой, потому что длина стержня, зажатого блоками, не изменяется:

$$\Delta l_t = \Delta l_N. \quad (a)$$



Фиг. 3. 15. Температурные напряжения в статически неопределимой системе.

a — брус с заделанными концами подвергается нагреванию; b — в свободном состоянии брус удлинился бы на Δl_t ; $в$ — реакции заделки N препятствуют удлинению ($\Delta l_N = \Delta l_t$) — брус напряжен.

Коэффициент α выражает удлинение единицы длины при нагревании на 1°C , а стержень имеет l единиц длины и нагревается на $(t_2 - t_1)$ градусов, следовательно, полное удлинение при нагревании равно $\Delta l_t = \alpha l (t_2 - t_1)$. Укорочение стержня зависит от усилия N по закону пропорциональности: $\Delta l_N = \frac{Nl}{EF}$. Подставляя выражения Δl_t и Δl_N в уравнение деформации (а), получаем

$$\alpha l (t_2 - t_1) = \frac{Nl}{EF}.$$

Отсюда $N = \alpha (t_2 - t_1) EF$. Напряжение в стержне будет $\sigma = \frac{N}{F} = \alpha (t_2 - t_1) E$.

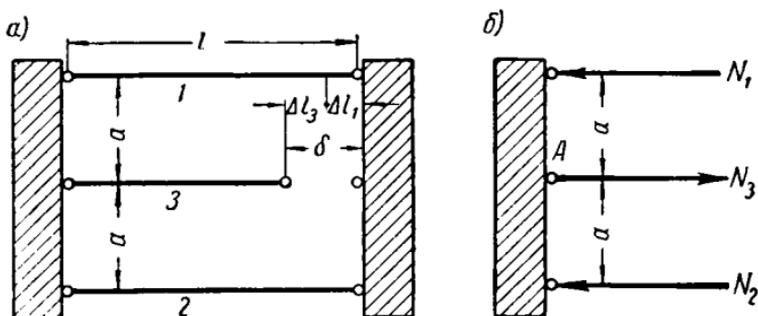
Напряжение, возникающее в стержне от нагрева, пропорционально коэффициенту линейного расширения, модулю упругости E и разности температур, но не зависит ни от длины, ни от размеров поперечного сечения стержня. Температурные напряжения могут быть весьма значительными. Так, например, для стального стержня $\alpha = 0,000\,012$ и $E = 2\,000\,000 \text{ кг/см}^2$. Если $t_2 - t_1 = 50^\circ\text{C}$, то $\sigma = 0,000\,012 \cdot 2\,000\,000 \cdot 50 = 1200 \text{ кг/см}^2$.

Неточность изготовления. Если элементы статически определимой системы изготовлены неточно, то от этого изменяется лишь геометрическая форма конструкции. Если же конструкция статически неопределима и некоторые ее элементы изготовлены неточно, то после сборки такой системы в ней появляются напряжения и при отсутствии нагрузки.

Пример 3. Два абсолютно жестких блока необходимо соединить тремя одинаковыми стержнями длиной l (фиг. 3. 16). Оказалось, что стержень, который решили поставить в середину, изго-

товлен на величину δ короче других. Определить напряжения, которые появляются в стержнях при сборке.

Чтобы собрать систему, необходимо средний стержень растянуть, а крайние сжать. В стержнях появятся усилия: сжимающие в крайних — N_1 и N_2 и растягивающее в среднем — N_3 . Разрезав собранную систему и заменяя действие отброшенной части усилиями N (фиг. 3. 16,б), можно составить только два уравнения равновесия: уравнение моментов, например, относительно точки A , $N_1 a - N_2 a = 0$ и уравнение проекций на горизонтальную ось — $N_1 - N_2 + N_3 = 0$.



Фиг. 3. 16. Неточно изготовленная статически неопределимая система напрягается при сборке.

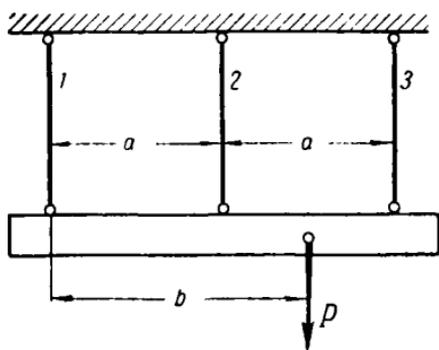
a — средняя тяга изготовлена короче других; b — после сборки она будет растянута, а другие тяги сжаты.

Но неизвестных усилий три, и необходимо обратиться к уравнению деформации. Оно выражает условие, что в результате удлинения среднего стержня на Δl_3 и укорочения крайних на $\Delta l_1 = \Delta l_2$ устраняется разница δ в длинах стержней (фиг. 3. 16,а), т. е. $\Delta l_1 + \Delta l_3 = \delta$. Но по закону пропорциональности $\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF}$ и $\Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EF}$. При подсчете Δl_3 мы принимаем, что средний стержень тоже имеет длину l . Ошибка, при этом получаемая, незначительна. Уравнение деформации, выраженное через усилия, принимает вид $\frac{N_1 l}{EF} + \frac{N_3 l}{EF} = \delta$ или $N_1 + N_3 = \frac{EF\delta}{l}$.

Решая уравнение деформации совместно с уравнениями равновесия, получаем $N_1 = N_2 = \frac{EF\delta}{3l}$, $N_3 = \frac{2EF\delta}{3l}$. Напряжения $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\delta E}{3l}$, $\sigma_3 = \frac{2\delta E}{3l}$. Пусть, например, $E = 2\,000\,000 \text{ кг/см}^2$ и $\delta = \frac{l}{2000}$, тогда

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{2\,000\,000}{3 \cdot 2000} = \frac{1000}{3} = 333 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_3 = 666 \text{ кг/см}^2.$$

Задача. Абсолютно жесткий брус подвешен на трех одинаковых стержнях и нагружен силой $P=6 \text{ т}$ (фиг. 3. 17). Определить усилия в стержнях, если $a=2 \text{ м}$, $b=3 \text{ м}$. **Ответ:** $N_1=0,5 \text{ т}$, $N_2=2 \text{ т}$, $N_3=3,5 \text{ т}$.



Фиг. 3. 17.

§ 6. Расчет по разрушающим нагрузкам

Определение грузоподъемности конструкции или назначение размеров поперечных сечений ее элементов производится исходя из условия прочности $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, при котором требуется, чтобы напряжения ни в одной точке конструкции не превосходили величины допускаемого напряжения. Такой расчет называется *расчетом по допускаемым напряжениям*. Но можно исходить и из другого условия, а именно из условия, чтобы наибольшая действительная нагрузка P_{\max} всей конструкции, умноженная на коэффициент запаса прочности n , не превосходила величины предельной или разрушающей нагрузки $P_{\text{пр}}$, при которой конструкция выходит из работы и перестает выполнять свое назначение:

$$nP_{\max} \leq P_{\text{пр}} \quad (12)$$

Определение грузоподъемности и подбор сечений по этому условию называется *расчетом по разрушающим нагрузкам*. В статически определимых системах при равномерном распределении напряжений, когда материал по всему сечению используется полностью, расчет по любому из этих условий приводит к одним и тем же результатам. Возьмем, например, систему из двух стальных стержней с подвешенным к ним грузом (фиг. 3. 6). Усилия в стержнях (§ 2, пример 2):

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2 \cos \alpha} = N.$$

Из расчета по допускаемым напряжениям находим необходимую площадь сечений стержней

$$F_d \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{P}{2[\sigma] \cos \alpha}.$$

При этом допускаемое напряжение для пластичного материала, каким является сталь, выбирается как некоторая часть предела текучести $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}$. Когда напряжения в каком-либо стержне достигнут предела текучести σ_T , в статически определимой конструкции появятся недопустимо большие деформации и она выйдет из работы. Следовательно, разрушающей нагрузкой следует считать силу $P_{\text{пр}}$, при которой наибольшее напряжение будет равно пределу текучести, т. е. $\frac{N_{\text{пр}}}{F} = \frac{P_{\text{пр}}}{2F \cos \alpha} = \sigma_T$, откуда

$$P_{\text{пр}} = 2\sigma_T F \cos \alpha.$$

Из расчета по разрушающим нагрузкам (12) следует, что $nP \leq P_{\text{пр}} = 2\sigma_{\tau} F \cos \alpha$. Отсюда получаем необходимую площадь поперечных сечений стержней

$$F_{\text{д}} \geq \frac{nP}{2\sigma_{\tau} \cos \alpha}.$$

Подставляя $\sigma_{\tau} = n[\sigma]$ и сравнивая с площадью $F_{\text{д}}$, найденной при расчете по допускаемым напряжениям, убеждаемся, что при одинаковом запасе прочности в обоих расчетах получаются одинаковые результаты.

Иное наблюдается при расчете статически неопределимых систем, у которых распределение усилий между отдельными элементами всегда зависит от длины и жесткости стержней, входящих в данную систему. Рассмотрим, например, систему трех стержней (фиг. 3.14), имеющих одинаковую жесткость $E_1 F_1 = E_2 F_2 = E_3 F_3 = EF$ и нагруженных силой P . В предыдущем параграфе составлены необходимые уравнения равновесия (9) и (10) и уравнение деформации (11). При одинаковой жесткости и симметричном расположении крайних стержней эти уравнения принимают следующий вид:

$$N_1 = N_2 = N; \quad (9')$$

$$2N \cos \alpha + N_3 = P = 0; \quad (10')$$

$$\frac{N}{\cos \alpha} = N_3 \cos \alpha. \quad (11')$$

Решая совместно уравнения (10') и (11'), находим усилия в среднем и крайних стержнях:

$$N_3 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad N = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \cos^2 \alpha.$$

Так как $\cos^2 \alpha$ всегда меньше единицы, то усилие в среднем стержне больше, чем в крайних: $N_3 > N$. По допускаемым напряжениям необходимая площадь стержней определяется из условия прочности (3) по наибольшему усилию, возникающему в данном случае в среднем стержне, и вычисляется по формуле

$$F_{\text{д}} \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{P}{[\sigma] (1 + 2 \cos^3 \alpha)}.$$

Например, если дано, что $P = 4600 \text{ кг}$, $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$ и $\alpha = 30^\circ$, т. е. $\cos \alpha = 0,866$, то необходимая площадь сечения среднего стержня по допускаемым напряжениям равна

$$F_{\text{д}} \geq \frac{4600}{1000 [1 + 2(0,866)^3]} = 2 \text{ см}^2.$$

В крайних стержнях должна быть такая же площадь поперечного сечения, хотя напряжения в них меньше допускаемых и материал этих стержней использован не полностью. Если уменьшить площадь сечений крайних стержней, то усилия изменятся, в частности, усилие в среднем стержне возрастет. Для определения усилий необходимо снова решать уравнения равновесия совместно с уравнением деформации.

При расчете по допускаемым напряжениям наибольшая нагрузка $P_{\text{д}}$, которую безопасно может выдержать конструкция, получается, когда наибольшие напряжения достигнут величины $[\sigma]$ и усилие в среднем стержне станет равным $N_3 = F_{\text{д}} [\sigma]$. Из этого условия находим $P_{\text{д}} = F_{\text{д}} [\sigma] \times (1 + 2 \cos^3 \alpha)$. Умножая допускаемую нагрузку на коэффициент запаса n и принимая во внимание, что $[\sigma] n = \sigma_{\tau}$, получаем предельную нагрузку по допускаемым напряжениям в следующем виде:

$$P'_{\text{пр}} = P_{\text{д}} n = F_{\text{д}} \sigma_{\tau} (1 + 2 \cos^3 \alpha).$$

Но при этой нагрузке напряжения, равные пределу текучести, возникают только в среднем стержне, а в крайних они меньше σ_T . При дальнейшем увеличении нагрузки средний стержень, изготовленный из пластичного материала, легко деформируется, в нем появляются большие остаточные удлинения, а напряжения не растут; он больше не может воспринять возрастания нагрузки и участвует в работе системы, сохраняя постоянное усилие, соответствующее пределу текучести. Если выходит из работы хотя бы один элемент в статически определимой системе, вся конструкция перестает выполнять свое назначение, как это наблюдалось в системе из двух стержней (фиг. 3.6). Этого нельзя сказать про статически неопределимую систему. Так, выход из работы среднего стержня в рассматриваемом примере (фиг. 3.18) вовсе не означает, что вся конструкция разрушена. В оставшихся двух стержнях напряжения еще не достигли предела текучести и, следовательно, нагрузку $P'_{пр}$ можно увеличить на некоторую добавочную величину ΔP , которая будет восприниматься только двумя стержнями. Вместо трехстержневой системы на добавочную нагрузку работает двухстержневая система (фиг. 3.18). Полный отказ конструкции от работы наступит, когда равные между собой напряжения крайних стержней тоже достигнут предела текучести, т. е. усилие каждого стержня достигнет предельного значения $N_{пр} = F\sigma_T$ и наступит текучесть всей конструкции в целом. Нагрузка $P_{пр}$, соответствующая этому состоянию, действительно является разрушающей нагрузкой: к ней уже ничего нельзя добавить; она вычисляется по уравнению равновесия (10'), в которое нужно подставить предельные усилия стержней $N_{пр}$:

$$2F\sigma_T \cos \alpha + F\sigma_T = P_{пр}.$$

Окончательно $P_{пр} = F\sigma_T(1 + 2 \cos \alpha)$. При расчете по разрушающим нагрузкам, исходя из условия (12), $nP \leq F_p \sigma_T(1 + 2 \cos \alpha)$, находим необходимую площадь поперечных сечений стержней:

$$F_p \geq \frac{nP}{\sigma_T(1 + 2 \cos \alpha)} = \frac{P}{[\sigma](1 + 2 \cos \alpha)}.$$

Принимая во внимание заданные выше числовые значения, получаем

$$F_p \geq \frac{4600}{1000(1 + 2 \cdot 0,866)} = 1,68 \text{ см}^2.$$

Сравнивая результаты обоих способов расчета, заключаем, что расчет по разрушающим нагрузкам позволяет проектировать статически неопределимые системы из пластичных материалов более экономичными, чем получаемые на основании расчета по допускаемым напряжениям. При расчете по допускаемым напряжениям за предельную нагрузку принимается величина $P'_{пр}$, при которой предела текучести достигают напряжения только наиболее нагруженного элемента (в рассмотренном примере средний стержень), а возможности менее нагруженных элементов полностью не используются. При расчете по разрушающим нагрузкам предельная грузоподъемность определяется разрушающей силой $P_{пр}$, при которой полностью используется материал всех элементов системы. Второй способ расчета позволяет реализовать *скрытые запасы прочности статически неопределимых систем*, которые первый способ расчета не в состоянии обнаружить. Благодаря второму способу удается повысить расчетную грузоподъемность и добиться действительной равнопрочности всех частей статически неопределимой конструкции. Изложенные выше соображения неоднократно проверя-

лись на опытах с моделями и реальными конструкциями и всегда наблюдалось, что определенная из опыта разрушающая нагрузка близко подходит по величине к разрушающей нагрузке, вычисленной по второму способу расчета. Способ может быть применен лишь в случаях статического нагружения.

Пример 1. Дуралюминовая втулка 1 с площадью поперечного сечения $F_1=3 \text{ см}^2$ вставлена в стальную втулку 2 с площадью сечения $F_2=4 \text{ см}^2$ (фиг. 3.19). Предел текучести и модуль упругости дуралюмина $\sigma_{T1}=2000 \text{ кг/см}^2$, $E_1=700\,000 \text{ кг/см}^2$, стали — $\sigma_{T2}=2400 \text{ кг/см}^2$, $E_2=2\,000\,000 \text{ кг/см}^2$. Определим при коэффициенте запаса $n=2$ наибольшую безопасную нагрузку P , передаваемую на втулки через абсолютно жесткий диск, по двум способам расчета: 1) по допускаемым напряжениям и 2) по разрушающим нагрузкам.

Разрезаем втулки, отбрасываем нижнюю часть и заменяем ее действие усилиями дуралюминовой втулки $N_1=\sigma_1 F_1$ и стальной $N_2=\sigma_2 F_2$ (фиг. 3.19, б). Составляем условие равновесия оставшейся части в виде единственного уравнения суммы проекций на вертикаль $P=N_1+N_2=\sigma_1 F_1+\sigma_2 F_2$. Так как система статически неопределима, составляем дополнительное уравнение деформации из условия, что при абсолютно жестком диске, передающем нагрузку, абсолютные укорочения втулок должны быть одинаковыми и их относительные укорочения $\epsilon_1=\epsilon_2$. Учитывая закон пропорциональности, получаем дополнительное уравнение в виде

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}.$$

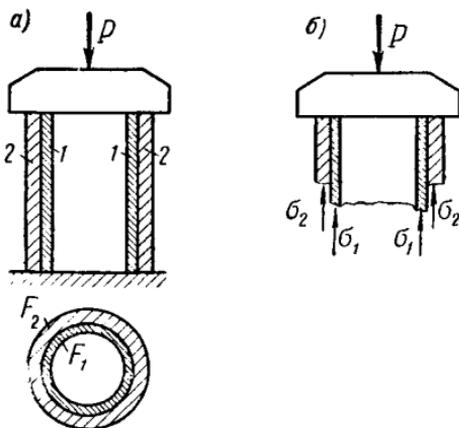
Решая уравнение деформации совместно с уравнением равновесия, находим напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{E_1 F_1 + E_2 F_2} P = \frac{700\,000}{700\,000 \cdot 3 + 2\,000\,000 \cdot 4} P = 0,0693 P;$$

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2} P = \frac{2\,000\,000}{10\,100\,000} P = 0,198 P.$$

По первому способу расчета искомая нагрузка P_d нигде не должна вызывать напряжений выше допускаемых: $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$. В данном примере наибольшие напряжения возникают в стальной втулке. Приравняв их допускаемому напряжению для стали, $[\sigma_2] = \frac{\sigma_{T2}}{n}$, получаем наибольшую безопасную нагрузку

$$P_d = \frac{[\sigma_2]}{0,198} = \frac{\sigma_{T2}}{0,198n} = \frac{2400}{0,198 \cdot 2} = 6060 \text{ кг}.$$



Фиг. 3.19. К расчету по разрушающим нагрузкам.

a — определить силу P , сжимающую дуралюминовую 1 и стальную 2 втулки; *б* — равновесие отсеченной части.

При этом в дуралюминовой втулке напряжения равны $\sigma_1 = 0,0693 \cdot 6060 = 420 \text{ кг/см}^2$. Они значительно меньше допускаемых для дуралюмина

$$[\sigma_1] = \frac{\sigma_{T1}}{n} = \frac{2000}{2} = 1000 \text{ кг/см}^2.$$

По второму способу расчета нужно сначала найти разрушающую нагрузку $P_{пр}$, при которой напряжения обеих втулок достигают предела текучести. Эта нагрузка вычисляется из уравнения равновесия

$$P_{пр} = \sigma_{T1} F_1 + \sigma_{T2} F_2 = 2000 \cdot 3 + 2400 \cdot 4 = 15\,600 \text{ кг.}$$

Учитывая условие (12) расчета по разрушающим нагрузкам, находим безопасную величину нагрузки

$$P_p = \frac{P_{пр}}{n} = \frac{15\,600}{2} = 7800 \text{ кг.}$$

При вычислении разрушающей нагрузки статически неопределимых систем дополнительных уравнений деформаций составлять не нужно.

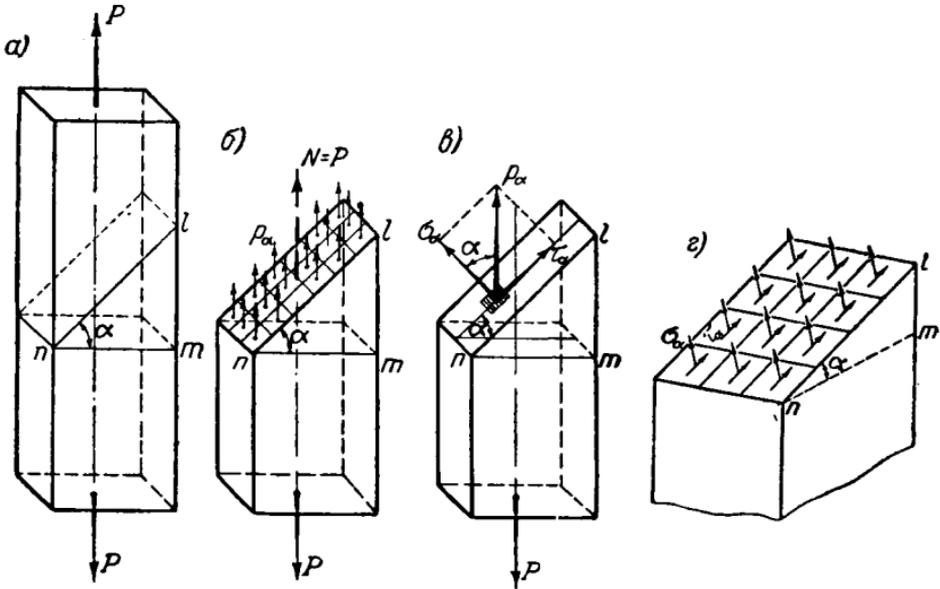
Контрольные вопросы

1. Какой вид деформации называется центральным растяжением?
2. Как называются напряжения в поперечном сечении растянутого (или сжатого) стержня и по какой формуле они вычисляются?
3. Что называется допускаемым напряжением? Сформулируйте условие прочности.
4. Какие задачи решаются с помощью условия прочности?
5. Что называется абсолютным и относительным удлинением стержня?
6. Какая зависимость существует между продольным удлинением и поперечным сужением?
7. Напишите и сформулируйте закон пропорциональности между напряжением и деформацией.
8. Нарисуйте диаграмму растяжения мягкой стали, укажите ее характерные точки и дайте определения предела пропорциональности, предела упругости, предела текучести, предела прочности.
9. Какие материалы называются пластичными и какие хрупкими?
10. Как реагируют материалы на концентрацию напряжений?
11. Что называется пределом усталости и каковы меры борьбы с образованием трещин усталости?
12. Перечислите факторы, влияющие на выбор допускаемого напряжения.
13. Какие задачи называются статически неопределимыми?
14. Каков порядок решения статически неопределимых задач?

СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

§ 1. Напряжения в наклонных сечениях

Исследуем напряжения в наклонных сечениях растянутого стержня. Проведем сечение nl (фиг. 4.1), образующее угол α с поперечным сечением mt . Отбросим верхнюю часть и прило-



Фиг. 4.1. Напряжения в наклонных сечениях.

a — наклонное сечение; *б* — распределение полных напряжений; *в* — составляющие полного напряжения; *г* — распределение нормальных и касательных напряжений.

жим к нижней части внутренние силы взаимодействия между частями, предполагая их распределенными равномерно по наклонному сечению (фиг. 4.1,б), как это было принято в § 1 предыдущей главы для поперечного сечения. Внутренние силы на-

правлены параллельно растягивающей силе, т. е. вдоль оси стержня, и в сумме составляют силу N . Из условия равновесия оставшейся части $N=P$. Разделив силу N на площадь наклонного сечения F_α , получаем в этом сечении напряжение, которое называется *полным напряжением*:

$$p_\alpha = \frac{N}{F_\alpha}. \quad (1)$$

Площадь наклонного сечения F_α можно выразить через площадь поперечного сечения F :

$$F_\alpha = \frac{F}{\cos \alpha}.$$

Подставляя значение F_α в уравнение (1) и принимая во внимание, что $\frac{N}{F} = \sigma$, получаем

$$p_\alpha = \frac{N}{F} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha. \quad (2)$$

Полное напряжение p_α разложим в каждой точке сечения на две составляющих (фиг. 4.1, в). Одну из них, σ_α , направим перпендикулярно к сечению, а вторую, τ_α , — параллельно плоскости сечения. Угол между p_α и σ_α равен углу α между наклонным и поперечным сечениями, так как p_α перпендикулярно поперечному сечению, а σ_α — наклонному. Поэтому $\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha$ и $\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha$. Подставляя сюда p_α из уравнения (2), находим

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (3)$$

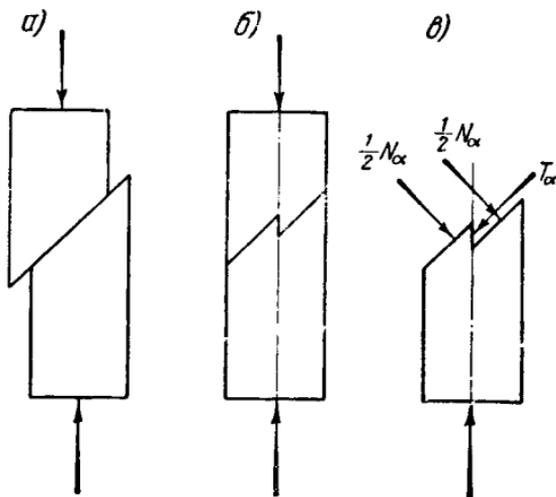
Составляющая σ_α является *нормальным напряжением*, а τ_α — *касательным напряжением* в рассматриваемом наклонном сечении. Они распределены сплошь по всему сечению (фиг. 4.1, г). Таким образом при центральном растяжении или сжатии в любом наклонном сечении одновременно возникают нормальные напряжения σ_α и касательные напряжения τ_α , зависящие от нормальных напряжений σ в поперечном сечении и от угла α между сечениями. Это можно иллюстрировать следующим примером.

Разрежем стержень на две части по наклонной плоскости. Если поверхность разреза гладкая, то при действии сжимающих сил произойдет скольжение одной части относительно другой (фиг. 4.2, а). Но если сечение сделать с зубом (фиг. 4.2, б), то скольжения не будет. Зуб воспримет на себя касательную силу T_α , которая стремится его сколоть (фиг. 4.2, в). В неразрезанном стержне роль зуба выполняют силы сцепления между частицами материала. Они препятствуют скольжению одних частиц относительно других — возникают касательные напряжения τ_α , распределенные по всей наклонной плоскости.

Условимся о правиле знаков. Будем считать растягивающие нормальные напряжения положительными (фиг. 4.3, *а* и *в*), а сжимающие — отрицательными (фиг. 4.3, *б* и *г*). Касательное напряжение будем считать положительным, если оно направлено вправо для наблюдателя *А*, находящегося на рассматриваемой части бруса (фиг. 4.3, *а* и *б*), и отрицательным, если оно направлено влево (фиг. 4.3, *в* и *г*).

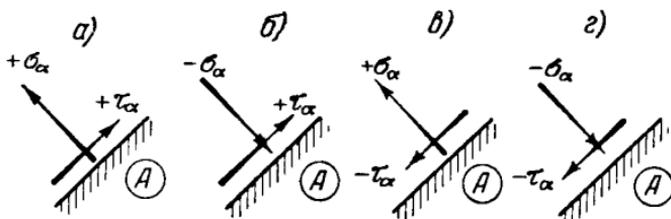
Положительные касательные напряжения создают относительно любой точки на той части бруса, к которой они приложены, момент, вращающий по часовой стрелке. Момент отрицательных касательных напряжений вращает эту часть против часовой стрелки. Угол α считается положительным, если наклонное сечение повернуто относительно поперечного сечения против часовой стрелки (фиг. 4.1).

Рассмотрим, как изменяется напряжение σ_α в зависимости от изменения угла α . По уравнению (3) наибольшее значение



Фиг. 4.2. Появление касательных сил в наклонном сечении.

а — одна часть разрезанного бруса скользит по другой; *б* — скольжение задержано зубом; *в* — касательная сила, скалывающая зуб.



Фиг. 4.3. Правило знаков напряжений.

а — растягивающее нормальное напряжение положительное, положительное касательное напряжение действует по часовой стрелке; *б* — сжимающее нормальное напряжение отрицательно; *в* — отрицательное касательное напряжение действует против часовой стрелки; *г* — оба напряжения отрицательны.

оно имеет при $\alpha=0$, т. е. когда наклонное сечение совпадает с поперечным сечением стержня, потому что косинус угла $\alpha=0$ получает максимальное свое значение, равное единице, и $\sigma_\alpha = \sigma_0 =$

$= \sigma = \frac{N}{F}$. Нормальное напряжение в поперечном сечении растянутого или сжатого стержня по величине больше, чем в любом наклонном сечении. При $\alpha = 90^\circ$, т. е. когда площадка F_α параллельна оси стержня, по уравнению (3) получаем, что $\sigma = 0$, так как $\cos 90^\circ = 0$. Это значит, что при растяжении и сжатии продольные волокна, которые можно мысленно представить в брус, друг на друга не давят.

Исследуем изменение касательных напряжений τ_α . В поперечных сечениях бруса, т. е. когда $\alpha = 0$, касательные напряжения по уравнению (3) равны нулю, так как $\sin 2\alpha = 0$. Наибольшее значение $\sin 2\alpha = 1$ получается при угле $2\alpha = 90^\circ$ или при $\alpha = 45^\circ$. Касательные напряжения здесь достигают наибольшей величины

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}. \quad (4)$$

Наибольшее касательное напряжение при растяжении или сжатии равно по величине половине наибольшего нормального напряжения и возникает на площадке, наклоненной под углом 45° к оси стержня. На площадках, параллельных оси стержня, т. е. когда $\alpha = 90^\circ$, касательные напряжения равны нулю, так как при этом $\sin 2\alpha = \sin 180^\circ = 0$.

Закон парности касательных напряжений. Касательные напряжения в любых двух взаимно перпендикулярных площадках, направленные перпендикулярно линии пересечения площадок, равны по величине и обратны по знаку. Для доказательства этого положения рассмотрим площадку nl (фиг. 4.4,а), наклоненную под углом α . По формуле (3) для нее получаем касательное напряжение $\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$. Теперь рассмотрим другую площадку nm , расположенную под углом 90° к первой. Чтобы получить касательное напряжение на этой площадке, в формулу (3) нужно подставить вместо α угол $\alpha + 90^\circ$:

$$\tau_{\alpha+90} = \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ).$$

Так как

$$\sin 2(\alpha + 90^\circ) = \sin (2\alpha + 180^\circ) = -\sin 2\alpha,$$

то касательное напряжение на площадке nm равно

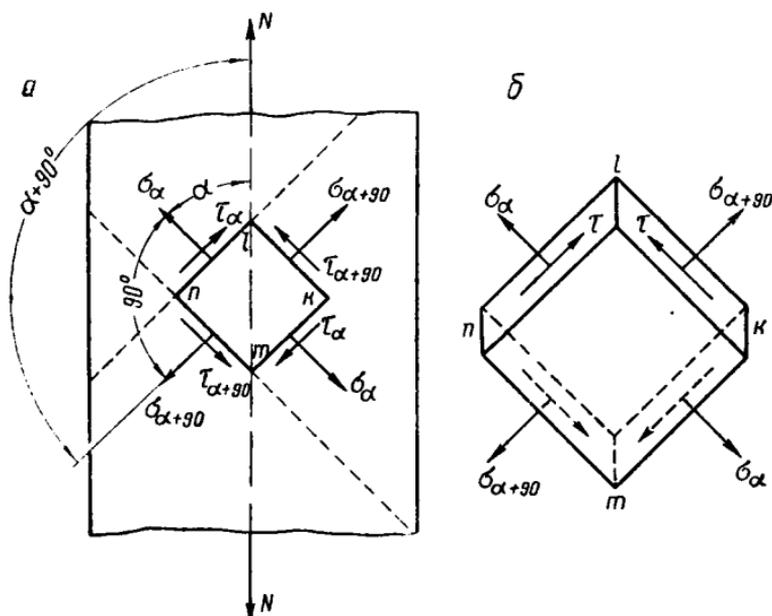
$$\tau_{\alpha+90} = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

Сравнивая его с τ_α , видим, что они равны по величине, но имеют разные знаки

$$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+90}. \quad (5)$$

На фиг. 4.4,б показаны напряжения σ и τ на четырех площадках, ограничивающих прямоугольный элемент $mnlk$, выделенный из стержня.

Закон парности касательных напряжений является общим свойством любого напряженного состояния. Если установлено, что в какой-нибудь площадке возникает касательное напряже-

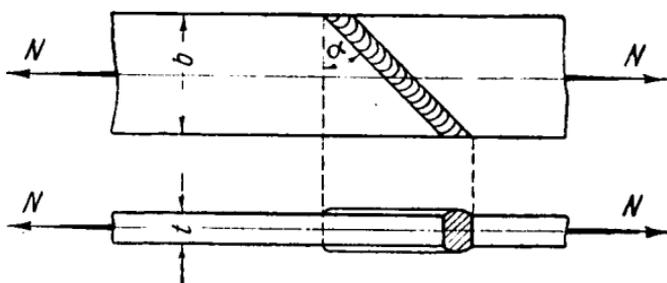


Фиг. 4.4. Закон парности касательных напряжений.

a — взаимно перпендикулярные площадки; b — напряжения во взаимно перпендикулярных гранях элемента бруса.

ние, то в площадке, ей перпендикулярной, также возникает такое же по величине касательное напряжение в соответствии с законом парности.

Пример 1. Определим величину нормальных и касательных напряжений в косом сварном шве, соединяющем две части растя-



Фиг. 4.5. Косой сварной шов.

нутой полосы (фиг. 4.5), если ширина полосы $b=6$ см, толщина $t=0,5$ см, сила $N=2400$ кг и угол $\alpha=45^\circ$.

Нормальное напряжение в поперечном сечении полосы равно

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{N}{bt} = \frac{2400}{6 \cdot 0,5} = 800 \text{ кг/см}^2.$$

По уравнениям (3) находим

$$\sigma_\alpha = 800 \cdot 0,707^2 = 400 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_\alpha = \frac{800}{2} \cdot 1 = 400 \text{ кг/см}^2.$$

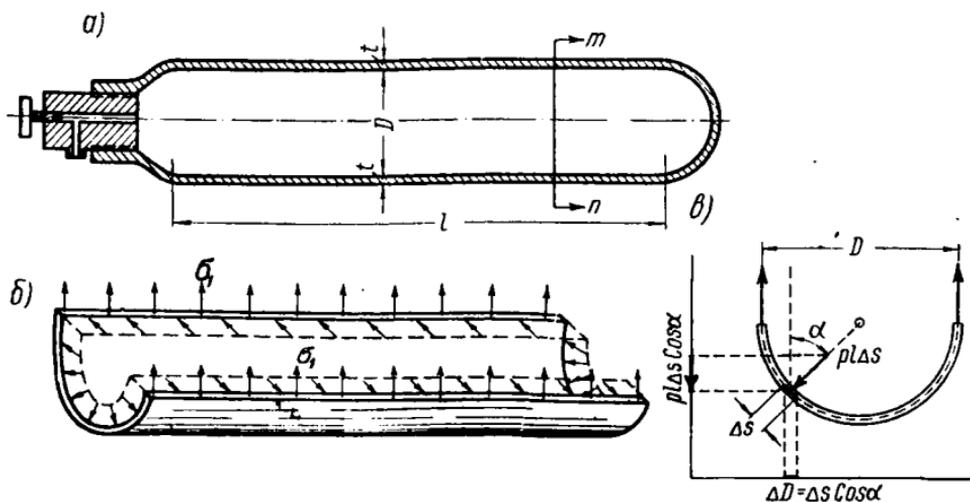
§ 2. Расчет цилиндрического сосуда

До сих пор рассматривалось одноосное напряженное состояние, т. е. растяжение (сжатие) в одном направлении. Но нередки случаи плоского напряженного состояния. Классическим примером являются тонкостенные сосуды, находящиеся под действием внутреннего или внешнего давления: воздушные баллоны, герметические кабины самолетов, паровые котлы, гильзы цилиндров мотора и т. п.

Характерным для перечисленных конструкций является то, что поперечные и продольные размеры их значительно больше толщины стенки. Поэтому они называются тонкостенными. В большинстве случаев они находятся под действием внутреннего давления. Так, аэродромные баллоны содержат сжатый воздух, в герметических кабинах самолетов поддерживается нормальное давление, которое превышает наружное давление в высоких слоях атмосферы; паровые котлы находятся под внутренним давлением водяных паров; гильзы цилиндров мотора во время вспышки горючей смеси испытывают давление газов и т. д.

Рассмотрим определение напряжений в стенках цилиндрического сосуда на примере воздушного баллона (фиг. 4.6). Пусть внутренний диаметр баллона D , толщина стенки t и длина цилиндрической части l . Избыточное давление внутри баллона обозначим p . Оно равномерно распределено по внутренней поверхности и направлено в любой точке перпендикулярно стенке. Найдем сперва напряжения в продольных сечениях баллона. Для этого разрежем его мысленно горизонтальной плоскостью, проходящей через ось цилиндра. Рассмотрим только цилиндрическую часть без днища и горловины, влияние которых имеет местный характер и во многих случаях может не учитываться (фиг. 4.6,б). Площадь продольного сечения в виде двух прямоугольников размерами $l \times t$ равна $F_1 = 2lt$. Нормальные напряжения, обозначенные σ_1 , в этом сечении распределены равномерно, так как давление внутри цилиндра постоянно. Они дают равнодействующую $\sigma_1 F_1 = 2\sigma_1 lt$. Давление p , действуя на полуцилиндр длиной l и диаметром D (фиг. 4.6,б), отрывает одну половину баллона от другой силой $p l D$. Действительно (фиг. 4.6,в), усилие, действующее на элементарную полоску площадью $l \Delta s$ рав-

но $p l \Delta s$; его вертикальная составляющая равна $p l \Delta s \cos \alpha$. Так как $\Delta s \cos \alpha = \Delta D$, то вертикальная составляющая будет равна $p l \Delta D$. Очевидно, что сумма вертикальных составляющих, действующих на отсеченную часть цилиндра, и будет $p l D$.



Фиг. 4.6. К расчету цилиндрического тонкостенного сосуда.

a — общий вид воздушного баллона в разрезе; *б* — силы, действующие на половину баллона, отсеченную продольным разрезом (напряжения в поперечных сечениях не показаны); *в* — определение вертикальной проекции внутреннего давления, действующего на отсеченную половину.

Равнодействующая напряжений $2\sigma_1 t l$ должна равняться силе $p l D$ по условию равновесия вырезанного полуцилиндра:

$$2\sigma_1 t l = p l D.$$

Отсюда

$$\sigma_1 = \frac{p D}{2t}. \quad (6)$$

Теперь определим напряжения в поперечных сечениях баллона.

Так как внутренняя площадь поперечного сечения баллона равна $\frac{\pi D^2}{4}$, а на каждый сантиметр площадки приходится давление p , то общая сила P будет равна

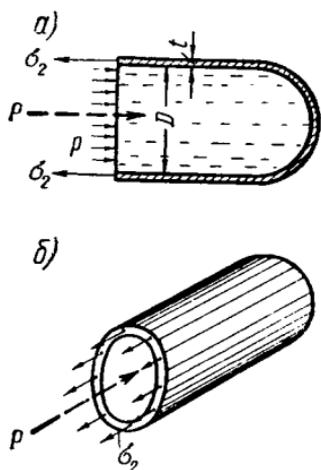
$$p \frac{\pi D^2}{4}.$$

Разрежем баллон поперечным сечением mn (фиг. 4.6, *a*). Действие левой отброшенной части заменяем нормальными напряжениями σ_2 , которые равномерно распределены по окружности (фиг. 4.7, *a* и *б*). Эти напряжения уравнивают силу давления газа. Площадь кольцевого сечения стенки бал-

лона (фиг. 4. 7,б) определим приближенно: толщина стенок t мала по сравнению с диаметром D , поэтому, разрезав и развернув кольцо (фиг. 4. 8), найдем площадь F как площадь прямоугольника со сторонами t и πD , т. е. $F = \pi Dt$. Условия равновесия требуют, чтобы $\sigma_2 \pi Dt = p \frac{\pi D^2}{4}$, откуда нормальные напряжения в поперечном сечении баллона будут

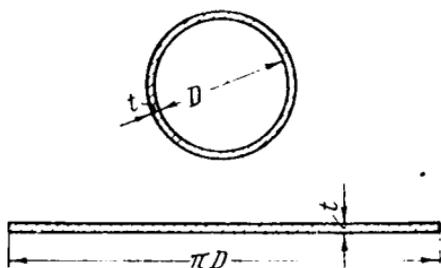
$$\sigma_2 = \frac{P}{F} = \frac{pD}{4t}. \quad (7)$$

Сравнивая формулы (6) и (7), видим, что напряжения в продольном сечении в два раза больше, чем в поперечном. При



Фиг. 4. 7. Напряжения в поперечных сечениях баллона.

a — силы, действующие на часть, отсеченную поперечным разрезом; b — распределение нормальных напряжений в поперечном сечении.



Фиг. 4. 8. Площадь кольца.

повышении давления внутри цилиндра напряжения σ_1 раньше, чем σ_2 , достигнут предела прочности, и произойдет разрушение вдоль образующей.

Пример 1. Определить напряжения σ_1 и σ_2 в гильзе цилиндра двигателя, если её внутренний диаметр $D = 155$ мм, толщина стенки $t = 0,7$ см и давление газов (подразумевается избыточное, т. е. сверх атмосферного) при вспышке $p = 42$ кг/см². Подставляя данные в формулы (6) и (7), находим

$$\sigma_1 = \frac{42 \cdot 15,5}{2 \cdot 0,7} = 464 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_2 = 232 \text{ кг/см}^2.$$

Пример 2. Котел, имеющий диаметр $D = 1,8$ м, подвержен внутреннему избыточному давлению $p = 16$ кг/см². Найти толщину его стенок при условии, чтобы наибольшие напряжения не превосходили 800 кг/см².

Наибольшие напряжения по формуле (6) равны $\sigma_1 = \frac{pD}{2t}$. Отсюда

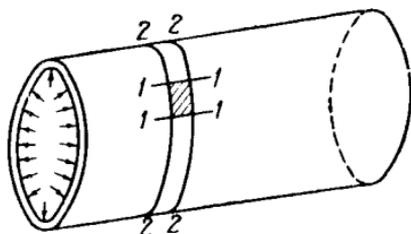
$$t = \frac{pD}{2\sigma_1} = \frac{16 \cdot 180}{2 \cdot 800} = 1,8 \text{ см.}$$

Задачи. 1. Какое максимальное давление можно допустить внутри баллона, если его внутренний диаметр $D=200$ мм, толщина стенки $t=8$ мм и допускаемое напряжение $[\sigma]=2000$ кг/см². **Ответ:** 160 атмосфер.

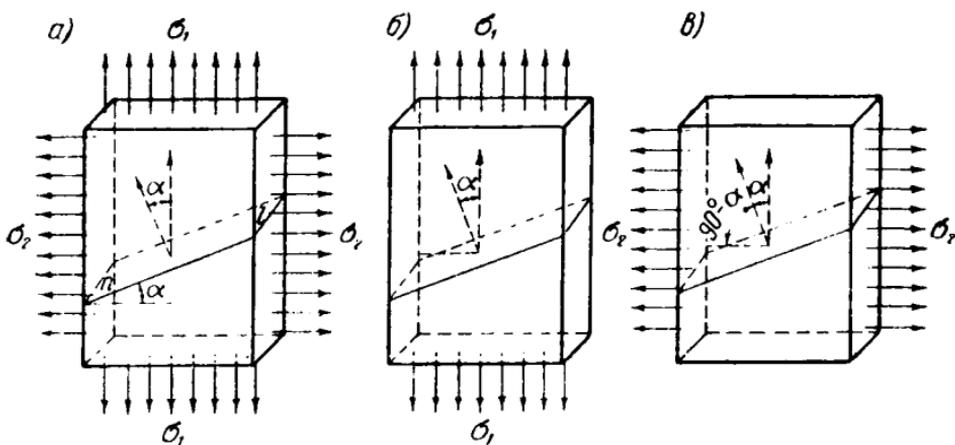
2. Кислородные баллоны испытывают на прочность, наполняя их водой под давлением 225 атмосфер. Какие напряжения возникают в баллоне, имеющем размеры, указанные в предыдущей задаче. **Ответ:** $\sigma_1=2800$ кг/см²; $\sigma_2=1400$ кг/см².

§ 3. Исследование плоского напряженного состояния

Двумя близкими продольными сечениями 1—1 и поперечными 2—2 выделим из сосуда малый элемент (фиг. 4.9). При достаточно большом диаметре сосуда и малых размерах элемента кривизной последнего можно пренебречь и считать, что он плоский. На фиг. 4.10 выделенный элемент изображен в увеличенном масштабе. По продольным сечениям элемента действуют нормальные напряжения σ_1 , а по поперечным — σ_2 , лежащие в плоскости элемента (фиг. 4.10,а). Такой элемент находится в условиях *плоского напряженного состояния*. Линейное растяжение (или сжатие), рассмотренное нами ранее, является частным слу-



Фиг. 4.9. Малый элемент, выделенный из сосуда.



Фиг. 4.10. Плоское напряженное состояние.

а — на элемент действуют нормальные напряжения σ_1 и σ_2 ; б — напряжение $\sigma_2=0$; в — напряжение $\sigma_1=0$.

чаем плоского напряженного состояния. Нормальные напряжения, действующие по граням элемента, могут быть в общем случае не только растягивающими, но и сжимающими.

Условимся большее из двух напряжений плоского напряженного состояния обозначать через σ_1 , а меньшее через σ_2 , учитывая не только абсолютную величину напряжения, но и его знак. Например, $\sigma_1 = 100 \text{ кг/см}^2$ больше, чем $\sigma_2 = -2000 \text{ кг/см}^2$ или $\sigma_1 = -100 \text{ кг/см}^2$ больше $\sigma_2 = -600 \text{ кг/см}^2$.

Определим напряжения σ_α и τ_α в наклонном сечении nl выделенного элемента. Предположим, что напряжения σ_2 отсутствуют и действуют только напряжения σ_1 (фиг. 4. 10, б). В этом случае получается простое растяжение, рассмотренное в § 1 этой главы. По формулам (3) находим нормальные напряжения σ'_α и касательные τ'_α в сечении nl (перпендикуляр к сечению образует угол α с направлением σ_1 , равный углу наклона сечения):

$$\sigma'_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha,$$

$$\tau'_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.$$

Теперь предположим, что отсутствуют напряжения σ_1 , а действуют только напряжения σ_2 (фиг. 4. 10, в). Снова получаем простое растяжение. Угол, образованный перпендикуляром к площадке nl с направлением σ_2 , отрицателен и равен $-(90^\circ - \alpha)$. По формулам (3) в том же наклонном сечении nl теперь получаем напряжения:

$$\sigma''_\alpha = \sigma_2 \cos^2 [-(90^\circ - \alpha)],$$

$$\tau''_\alpha = \frac{\sigma_2}{2} \sin 2 [-(90^\circ - \alpha)].$$

Принимая во внимание, что

$$\cos [-(90^\circ - \alpha)] = \cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

а

$$\sin 2 [-(90^\circ - \alpha)] = -\sin (180^\circ - 2\alpha) = -\sin 2\alpha,$$

найдем

$$\sigma''_\alpha = \sigma_2 \sin^2 \alpha, \quad \tau''_\alpha = -\frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Суммы нормальных напряжений σ'_α и σ''_α и касательных τ'_α и τ''_α равны соответствующим полным напряжениям σ_α и τ_α .

Таким образом окончательные значения нормальных и касательных напряжений в наклонном сечении при растяжении или сжатии по двум взаимно перпендикулярным направлениям будут

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (8)$$

Главные напряжения. Напряжения σ_α и τ_α в наклонной площадке зависят от угла наклона α .

В площадках, перпендикулярных направлениям σ_1 или σ_2 , т. е. при α , равном нулю и 90° , касательные напряжения отсутствуют ($\tau_\alpha = 0$), как это следует из формулы (8). Площадки, на которых нет касательных напряжений, называются *главными площадками*. Нормальные напряжения, действующие в главных площадках, называются *главными напряжениями*. В частности, при простом растяжении или сжатии одной из главных площадок является поперечное сечение, в котором главное напряжение $\sigma = \frac{N}{F}$, а второй главной площадкой является любое продольное сечение, где нормальные напряжения равны нулю. Для тонкостенного цилиндрического сосуда одна главная площадка совпадает с поперечным, а другая — с диаметральной его сечением. Наибольшее касательное напряжение имеет место в площадках, наклоненных к главным под углом $\alpha = 45^\circ$, при этом $\sin 2\alpha = 1$, и

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (9)$$

Наибольшее касательное напряжение в площадках, перпендикулярных плоскости напряженного состояния равно по величине полуразности главных напряжений и действует на площадке, наклоненной под углом 45° к главным¹.

Графическое исследование плоского напряженного состояния. Прямая задача. Задачу отыскания нормальных и касательных напряжений в любом наклонном сечении можно решить также графически.

Возьмем прямоугольную систему координат. По горизонтали будем откладывать нормальные напряжения σ , а по вертикали — касательные напряжения τ (фиг. 4.11). Пусть в некотором масштабе отложены отрезки $OA = \sigma_1$ и $OB = \sigma_2$. На отрезке AB , как на диаметре, строим окружность. Радиус этой окружности

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{OA - OB}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Из центра окружности C под углом 2α проводим радиус CD и опускаем перпендикуляр DE на горизонталь. Отрезок OE в принятом масштабе равен нормальному напряжению σ_α в наклонном сечении, а отрезок DE — касательному напряжению τ_α . В самом деле, отрезок OE состоит из трех отрезков (фиг. 4.11):

$$OB = \sigma_2, \quad BC = r = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

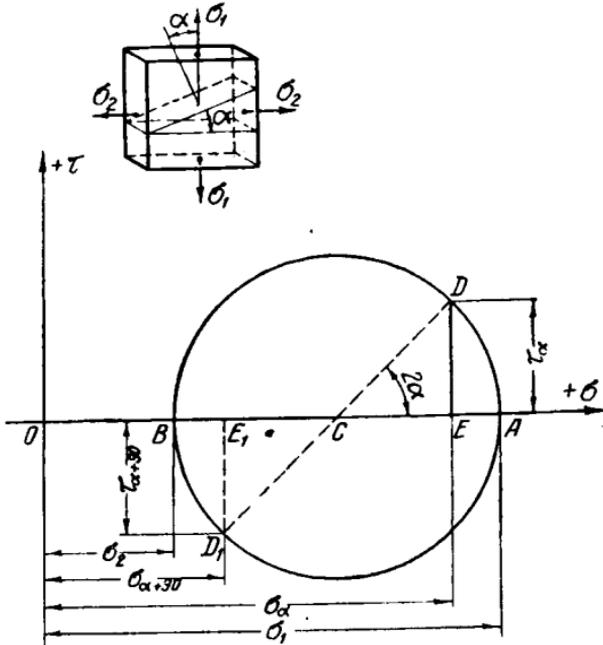
¹ См. также указание к пользованию формулой (9), даваемое ниже [формула (13)].

$$CE = CD \cos 2\alpha = r \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha.$$

Следовательно,

$$OE = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} (1 + \cos 2\alpha).$$

Принимая во внимание, что $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$, преобразуем последнее равенство к виду $OE = \sigma_2 + \sigma_1 \cos^2 \alpha - \sigma_2 \cos^2 \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 (1 - \cos^2 \alpha)$.



Фиг. 4.11. Круг напряжений.

Но $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$; таким образом

$$OE = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha.$$

Полученный результат совпадает с правой частью формулы (8) для σ_α . Следовательно, $OE = \sigma_\alpha$.

Из треугольника CDE находим, что $DE = CD \sin 2\alpha$. Подставляя сюда $CD = r = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, имеем $DE = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$, т. е. отрезок DE действительно равен τ_α [см. формулу (8)], что и требовалось доказать.

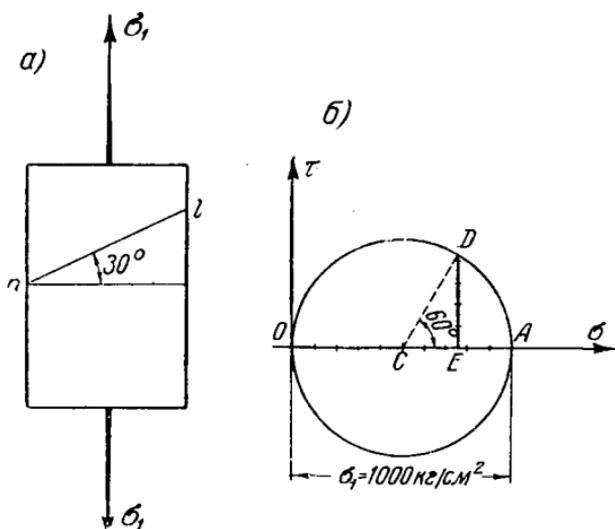
Чтобы получить напряжения на площадке, перпендикулярной к площадке nl , нужно продолжить радиус CD до точки D_1 и опустить из этой точки перпендикуляр на горизонтальную ось. Тогда отрезок OE_1 будет равен нормальному напряжению

$\sigma_{\alpha+90}$ в выбранном масштабе, а отрезок D_1E_1 — касательному напряжению $\tau_{\alpha+90}$. Повторяя только что приведенные рассуждения, можно показать, что на площадке $\alpha+90^\circ$ нормальные и касательные напряжения выражаются формулами

$$\sigma_{\alpha+90} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha+90} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Пользуясь построенным кругом напряжений, легко найти напряжения в любом наклонном сечении в зависимости от угла α . Они изображаются координатами точки D , всегда лежащей на окружности. Абцисса показывает величину нормального напряжения σ_α , а ордината — касательного τ_α . Отсюда следует, что главные напряжения σ_1 и σ_2 в площадках при $\alpha=0$ и $\alpha=90^\circ$ являются наибольшим и наименьшим нормальными напряжениями в рассматриваемом элементе. Нормальные напряжения во всех наклонных сечениях меньше σ_1 , но больше σ_2 . Максимальное касательное напряжение равно радиусу круга.

Пример 1. Стержень испытывает растягивающие напряжения 1000 кг/см^2 (фиг. 4. 12,а). Графически определить нормаль-



Фиг. 4. 12. Графическое определение напряжений в наклонной площадке (прямая задача).

а — даны главные напряжения и наклонная площадка; б — построение круга напряжений.

ные и касательные напряжения на площадке nl . Главные напряжения $\sigma_1 = 1000 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = 0$. На оси σ откладываем в масштабе отрезок $OA = 1000$ (фиг. 4. 12,б). Точка B совпадает с началом координат. На отрезке OA строим круг и из центра

его C под углом $2\alpha = 60^\circ$ проводим радиус CD . Напряжения на заданной площадке будут $\sigma_\alpha = OE \approx 750 \text{ кг/см}^2$, $\tau_\alpha = ED \approx 430 \text{ кг/см}^2$ (измерено по чертежу).

Обратная задача. Пользуясь тем же кругом, можно решить обратную задачу: определить главные напряжения σ_1 и σ_2 , если известны напряжения σ_α , $\sigma_{\alpha+90}$ и τ_α . Для этого откладываются отрезки $OE = \sigma_\alpha$ и $OE_1 = \sigma_{\alpha+90}$ (фиг. 4.11). В точках E и E_1 восстанавливаются перпендикуляры $ED = \tau_\alpha$ и $E_1D_1 = \tau_{\alpha+90} = -\tau_\alpha$. Если τ положительно, то перпендикуляр восстанавливается вверх, при отрицательном τ — вниз. На отрезке DD_1 , как на диаметре, строится круг, который отсекает $OA = OC + CA = \sigma_1$ и $OB = OC - CB = \sigma_2$. Здесь

$$\begin{aligned} OC &= OE - EC = OE - \frac{1}{2}(OE - OE_1) = \frac{1}{2}(OE + OE_1) = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90}), \end{aligned}$$

$$CA = CB = CD = \sqrt{EC^2 + ED^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha+90}}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}.$$

Следовательно, главные напряжения σ_1 и σ_2 будут:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha+90})^2 + 4\tau_\alpha^2}.$$

Часто встречается случай, когда одно из нормальных напряжений во взаимно перпендикулярных сечениях равно нулю. Полагая в последней формуле $\sigma_{\alpha+90} = 0$ и обозначая для простоты $\sigma_\alpha = \sigma$ и $\tau_\alpha = \tau$, получаем главные напряжения в этом случае равными

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \text{и} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (10)$$

Соответственно максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (11)$$

Пример 2. На элемент действуют напряжения $\sigma = \sigma_\alpha = 800 \text{ кг/см}^2$ и $\tau = \tau_\alpha = 200 \text{ кг/см}^2$ (фиг. 4.13,а). Определим главные напряжения аналитически и графически.

По формулам (10) находим

$$\sigma_1 = \frac{800}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{800^2 + 4 \cdot 200^2} = 846 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{800}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{800^2 + 4 \cdot 200^2} = -46 \text{ кг/см}^2.$$

Тот же результат получаем и по кругу напряжений (фиг. 4.13,б). По оси σ откладываем отрезок $OE = 800$ вправо, пото-

му что σ_x положительно. В точке E при положительном τ_x восстанавливаем вверх перпендикуляр $ED=200$. Так как $\sigma_x + 90$ по условию равно нулю, точка E_1 совпадает с началом координат O . Здесь откладываем $OD_1=200$ вниз, потому что $\tau_x + 90$ отрицательно. Радиусом $\frac{1}{2}DD_1$ проводим окружность. Она отсекает наибольшее напряжение $\sigma_1=OA$ — положительное и наименьшее $\sigma_2=OB$ — отрицательное. Их величину находим, измеряя по масштабу отрезки OA и OB .

Деформации при плоском напряженном состоянии. При растяжении или сжатии по двум взаимно перпендикулярным направлениям (фиг. 4.10,а) деформация бруса зависит от величины обоих напряжений σ_1 и σ_2 . Действительно, если бы действовало только одно напряжение σ_1 (фиг. 4.10,б), то в направлении его действия возникло бы удлинение, а в поперечном направлении (т. е. в направлении действия σ_2) — укорочение. Обозначим относительное удлинение в направлении σ_1 через ϵ'_1 , а относительное укорочение при этом в направлении σ_2 через ϵ'_2 . Они выразятся так (гл. III, § 2):

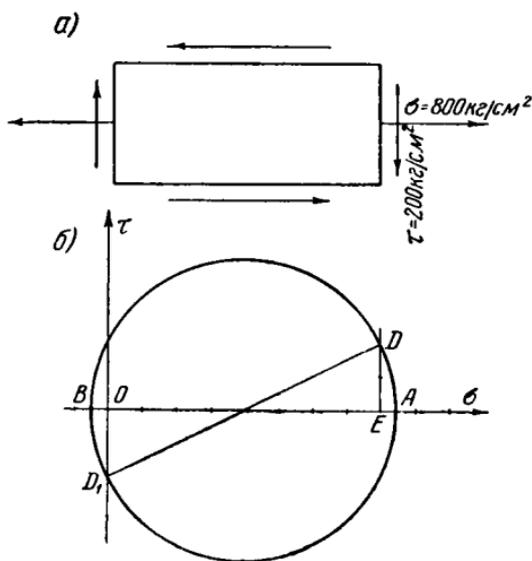
$$\epsilon'_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad \text{и} \quad \epsilon'_2 = -\mu \frac{\sigma_1}{E}.$$

Знак минус означает укорочение.

Аналогично, если действует только σ_2 , относительные деформации будут

$$\epsilon''_2 = \frac{\sigma_2}{E} \quad \text{и} \quad \epsilon''_1 = -\mu \frac{\sigma_2}{E}.$$

При совместном действии σ_1 и σ_2 величины деформаций



Фиг. 4.13. Графическое определение главных напряжений (обратная задача).

а — даны напряжения во взаимно перпендикулярных площадках; б — построение круга напряжений.

получатся сложением деформаций, вызываемых каждым напряжением в отдельности:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2); \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2' + \varepsilon_2'' = -\mu \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

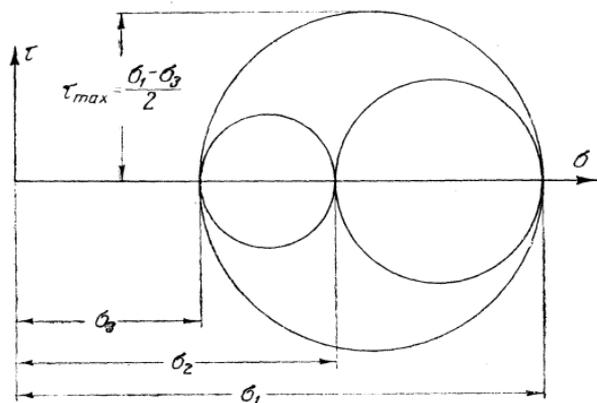
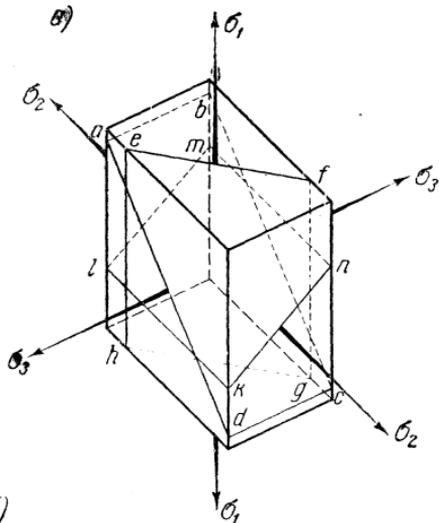
Эти равенства являются выражением закона пропорциональности при плоском напряженном состоянии.

Объемное напряженное состояние. Наибольшее касательное напряжение. Если напряжения имеются на всех гранях выделенного из тела элементарного прямоугольного параллелепипеда, то напряженное состояние называется объемным или пространственным.

Можно доказать, что в случае объемного напряженного состояния в каждой точке тела имеются три взаимно перпендикулярные площадки, свободные от касательных напряжений. Эти площадки называются главными, и нормальные напряжения, в них действующие, называются главными напряжениями.

На фиг. 4.14,а изображен выделенный главными площадками элемент тела, находящийся в объемном напряженном состоянии.

Главные напряжения, действующие по граням элемента, равны σ_1 , σ_2 и σ_3 . Они показаны положительными, но могут быть и отрицательными. Условимся для определенности, что σ_1 есть наи-



Фиг. 4.14. Объемное напряженное состояние. а — прямоугольный элемент, выделенный из тела главными площадками; б — определение наибольшего касательного напряжения.

большее из них (в алгебраическом смысле), а σ_3 — наименьшее. Если представить внутри элемента любую наклонную площадку, то в ней будут нормальные и касательные напряжения.

Найдем наибольшее касательное напряжение. Наибольшее касательное напряжение τ_{\max} при плоском напряженном состоянии, как выше было указано, равно радиусу круга напряжений. В случае объемного напряженного состояния можно построить три круга напряжений. Рассмотрим сперва площадки, проходящие параллельно направлению напряжения σ_3 . Будем иметь плоское напряженное состояние с главными напряжениями σ_1 и σ_2 , так как σ_3 на эти площадки не действует (см. § 1). Отложив значения σ_1 и σ_2 на оси абсцисс и построив на разности их, как на диаметре, круг (фиг. 4. 14,б), получим $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, которое действует в площадке (*abcd*), наклоненной под углом 45° к направлениям напряжений σ_1 и σ_2 . Очевидно, напряжение σ_3 , не может вызывать в ней никаких напряжений.

Теперь рассмотрим напряжения в площадках, проходящих через напряжение σ_1 . Отложив σ_3 , построим круг диаметром, равным разности $\sigma_2 - \sigma_3$ (левый круг на фиг. 4. 14,б). Следовательно, действием напряжений σ_2 и σ_3 вызываются наибольшие касательные напряжения $\tau_{\max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$. Они соответствуют площадке (*efgh*), наклоненной под углом 45° к направлениям напряжений σ_2 и σ_3 и параллельной направлению напряжения σ_1 .

Наконец, в площадке, проходящей через σ_2 и наклоненной под 45° к направлениям напряжений σ_1 и σ_3 (*klmn*), действуют наибольшие касательные напряжения $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, равные радиусу большого круга на фиг. 4. 14,б. Как видим, это касательное напряжение является наибольшим из всех рассмотренных. Можно доказать, что оно является вообще наибольшим касательным напряжением для данного элемента, т. е. больше напряжения во всякой другой произвольно взятой площадке.

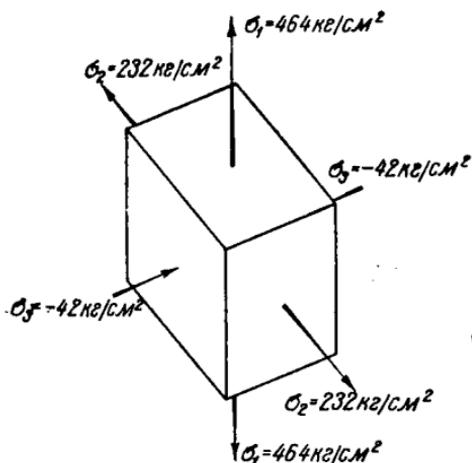
Итак, наибольшее касательное напряжение при объемном напряженном состоянии равно полуразности наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (13)$$

Следовательно, необходимо иметь в виду, что в плоской задаче максимальные касательные напряжения определяются по формуле (9) только в случае, если главные напряжения σ_1 и σ_2 имеют разные знаки. Если оба главные напряжения одного знака, то наибольшие касательные напряжения определяются по формуле (13), в которой σ_3 следует принять равным нулю.

В этом легко убедиться при помощи кругов напряжений, рассматривая плоское напряженное состояние как частный случай объемного, у которого одно из главных напряжений равно нулю.

Пример 3. Выше, в примере 1 § 2, были найдены главные напряжения $\sigma_1 = 464 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = 232 \text{ кг/см}^2$ в стенке цилиндра авиадвигателя, которая рассматривалась как находящаяся в



Фиг. 4.15. Элемент, выделенный из стенки цилиндра.

плоском напряженном состоянии. Найдем теперь наибольшее касательное напряжение в стенке цилиндра. Для этого нужно учесть третье главное напряжение, т. е. рассматривать напряженное состояние в пространстве. Третье главное напряжение вблизи внешней поверхности цилиндра равно нулю, эта поверхность свободна от нагрузок и подвергается только обычному атмосферному давлению. У внутренней поверхности цилиндра третье главное напряжение в материале равно давлению газов в цилиндре — 42 кг/см^2 . Оно является сжимающим: $\sigma_3 =$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{464 - (-42)}{2} = 253 \text{ кг/см}^2.$$

Пример 4. Рассмотрим случай сжимающих напряжений. Пусть главные нормальные напряжения в некоторой точке напряженного тела равны -80 кг/см^2 , -400 кг/см^2 и -800 кг/см^2 . Наибольшее из них есть напряжение $\sigma_1 = -80 \text{ кг/см}^2$, наименьшее $\sigma_2 = -800 \text{ кг/см}^2$. Следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{-80 - (-800)}{2} = 360 \text{ кг/см}^2.$$

Деформация при объемном напряженном состоянии. Вместо двухчленных формул (12), полученных для плоского напряженного состояния, для случая объемного напряженного состояния деформации выражаются трехчленными формулами, учитывающими все три главных напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 . Способ составления формул тот же, что и в случае плоской задачи.

Формулы пишутся в следующем виде:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_1 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)],$$

Задачи. 1. Проверить по формулам (8) напряжения σ_α и τ_α , найденные графически в примере 1 (фиг. 4.12).

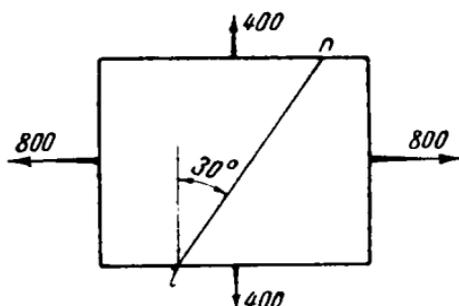
2. Из цилиндрического сосуда выделен элемент, на который действуют главные напряжения 800 кг/см^2 и 400 кг/см^2 (фиг. 4.16). Графически и аналитически найти напряжения σ_α и τ_α на площадке n . Найти также τ_{\max} и наибольшее относительное удлинение.

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \quad \mu = 0,3.$$

Ответ:

$$\sigma_\alpha = 700 \text{ кг/см}^2, \quad \tau_\alpha = 173 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{\max} = 400 \text{ кг/см}^2; \quad \varepsilon = 0,00034.$$



Фиг. 4.16. К примеру определения напряжений и деформаций плоского напряженного состояния.

§ 4. Понятие о теориях прочности

При установлении условия прочности и выборе коэффициента запаса (§ 1 и 4 предыдущей главы) в основу критерия прочности было положено наибольшее нормальное напряжение, при котором происходит разрушение; допускаемое напряжение определялось как предел прочности, деленный на коэффициент запаса:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пч}}}{n}.$$

К оценке прочности можно подойти и с других точек зрения. Например, можно положить в основу оценки не наибольшие нормальные напряжения, а наибольшие деформации и считать, что разрушение наступает в тот момент, когда деформация достигает предельного значения.

Обозначим предельное значение относительного удлинения через $\varepsilon_{\text{пч}}$. Тогда допускаемое относительное удлинение $[\varepsilon]$ должно составлять некоторую часть от $\varepsilon_{\text{пч}}$:

$$[\varepsilon] = \frac{\varepsilon_{\text{пч}}}{n}.$$

Здесь n попрежнему означает коэффициент запаса прочности и зависит от факторов, перечисленных выше (глава III, § 4). Связь между допусаемым удлинением и допусаемым напряжением при растяжении имеет вид

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E},$$

так как $[\varepsilon]$ и $[\sigma]$ всегда находятся в пределах пропорциональности.

Но не только наибольшие нормальные напряжения или наибольшие деформации можно считать причиной, вызывающей разрушение материала. Известно, что даже при простом растяжении или сжатии наряду с нормальными напряжениями существуют и касательные, которые достигают максимального значения на площадках, наклоненных под углом 45° к оси стержня и равных $\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$. Можно принять касательные напряжения за критерий прочности, тем более что при растяжении или сжатии происходят сдвиги по наклонным площадкам (фиг. 3.11). В этом случае к прочной конструкции нужно предъявить требование, чтобы наибольшие касательные напряжения в ней не превосходили некоторой допусаемой величины

$$[\tau] = \frac{\tau_{\text{пч}}}{n}.$$

Принимая во внимание, что $\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$, зависимость между нормальными и касательными допусаемыми напряжениями будем иметь в виде

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

При простом растяжении или сжатии все перечисленные взгляды приводят к одинаковым результатам, потому что все величины, определяющие прочность, находятся из опыта. Но при сложном напряженном состоянии невозможно поставить опыты, охватывающие все многообразие комбинаций действия сил. В этом случае расчет основывают на той или иной теории прочности. Теорией прочности называется предположение (гипотеза), которое берется как основная предпосылка при суждении о прочности материала. Цель теорий прочности заключается в том, чтобы, исходя из опытов на простое растяжение или сжатие, получить возможность судить о прочности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии.

Первая теория прочности — теория наибольших нормальных напряжений. По этой теории предполагается, что прочность материала определяется его способностью сопротивляться нормальным напряжениям, следовательно, не зависит от

сложности напряженного состояния. Прочность будет гарантирована, если в любом напряженном состоянии наибольшее по абсолютному значению нормальное напряжение не превосходит допускаемого при простом растяжении или сжатии. Это наибольшее напряжение, по которому производится расчет прочности, обозначим через $\sigma_{\text{расч}}$. Тогда условие прочности по первой теории принимает вид

$$\sigma_{\text{расч}} = \sigma_1 \leq [\sigma]_{\text{раст}} \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{расч}} = \sigma_3 \leq [\sigma]_{\text{сж}}$$

Результаты первой теории во многих случаях резко расходятся с опытными данными. Ею можно пользоваться только при расчете деталей из хрупких материалов.

Вторая теория прочности — теория наибольших относительных удлинений. Эта теория основана на предположении, что основным фактором, обуславливающим прочность, является способность материала сопротивляться относительным удлинениям. По второй теории прочность детали, находящейся в любом напряженном состоянии, будет обеспечена, если ни в одной точке детали наибольшие относительные удлинения не выйдут за пределы допускаемого удлинения $[\epsilon]$, установленного при простом растяжении. Обозначая наибольшее по абсолютной величине относительное удлинение через ϵ_1 , получаем условие прочности по второй теории

$$\epsilon_1 \leq [\epsilon].$$

Нетрудно это условие выразить в зависимости от главных напряжений. В случае плоского напряженного состояния по формуле (12)

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Учитывая, что $[\epsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$, из условия прочности после сокращения на E получаем расчетное напряжение по второй теории прочности

$$\sigma_{\text{расч}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Здесь величина $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$ обозначена как некоторое условное напряжение $\sigma_{\text{расч}}$, по которому производится расчет прочности.

Вторая теория в конце прошлого столетия и в начале текущего широко применялась в инженерной практике. И до сих пор ею продолжают пользоваться в машиностроении. Вторая теория может применяться в тех же случаях, что и первая и, так же как и первая, противоречит некоторым опытными данным.

Третья теория прочности — теория наибольших касательных напряжений. По этой теории прочность материала определяется его способностью сопротивляться касательным напряжениям. Прочность считается гарантированной, если наибольшее касательное напряжение τ_{max} для детали, находящейся в

сложном напряженном состоянии, не превосходит допускаемого напряжения при простом растяжении или сжатии:

$$\tau_{\max} \leq [\tau].$$

Принимая во внимание, что $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, а допускаемое касательное напряжение при растяжении $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$, получаем расчетное напряжение по третьей теории прочности:

$$\sigma_{\text{расч}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Третья теория достаточно хорошо согласуется с опытами и особенно пригодна для пластических материалов.

Новые теории прочности — энергетические. Недостатки первых трех теорий прочности и новые опытные данные заставили ученых продолжать поиски причин, обуславливающих разрушение материалов под действием сил. За последние годы появился ряд теорий прочности, которые связывают прочность материалов с их способностью поглощать работу, которую производит внешняя нагрузка при деформации тела.

Всякий элемент в теле, испытывающем сложное напряженное состояние, изменяется по объему и претерпевает изменение формы; например, малый прямоугольный параллелепипед становится не только больше или меньше по объему, но из прямоугольного превращается в косоугольный. Оказывается, что энергия, идущая на изменение объема, не влияет существенно на прочность материала. Прочность зависит главным образом от той работы, которая расходуется на изменение формы элемента.

Расчетное напряжение по теории прочности (четвертой), исходящей из величины работы, затрачиваемой на изменение формы тела, определяется по формуле

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma].$$

Эта теория пригодна для пластических материалов¹.

Пример 1. Рассмотрим пример проверки прочности. Выше в примере 1 в § 2 и примере 3 в § 3 были найдены главные нормальные напряжения в стенке цилиндра авиадвигателя. Пусть требуется произвести проверку прочности цилиндра по третьей теории прочности. Допускаемое напряжение дано: $[\sigma] = 600 \text{ кг/см}^2$.

Возьмем точку внутри стенки цилиндра, где расчетное напряжение по третьей теории прочности $\sigma_{\text{расч}} = \sigma_1 - \sigma_3$ имеет наибольшее значение. Сравним две точки: 1) вблизи внутренней поверхности цилиндра и 2) вблизи наружной его поверхности.

¹ Строго говоря, выбор теории прочности зависит не только от свойств материала, но и от характера напряженного состояния. Однако в большинстве практических случаев вполне достаточно выбор теории прочности производить исходя из свойств материала.

Для элемента у внутренней поверхности цилиндра (фиг. 4. 15) имеем

$$\sigma_{\text{расч}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 464 + 42 = 506 \text{ кг/см}^2.$$

Для элемента у внешней поверхности цилиндра получим

$$\sigma_{\text{расч}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 464 - 0 = 464 \text{ кг/см}^2.$$

Таким образом опасной точкой согласно третьей теории прочности является точка на внутренней поверхности цилиндра, где имеет место наибольшее расчетное напряжение 506 кг/см^2 . Сравнивая его с допускаемым, устанавливаем, что

$$\sigma_{\text{расч}} < [\sigma],$$

т. е. прочность цилиндра достаточна и даже с излишним запасом на 15,6%.

Контрольные вопросы

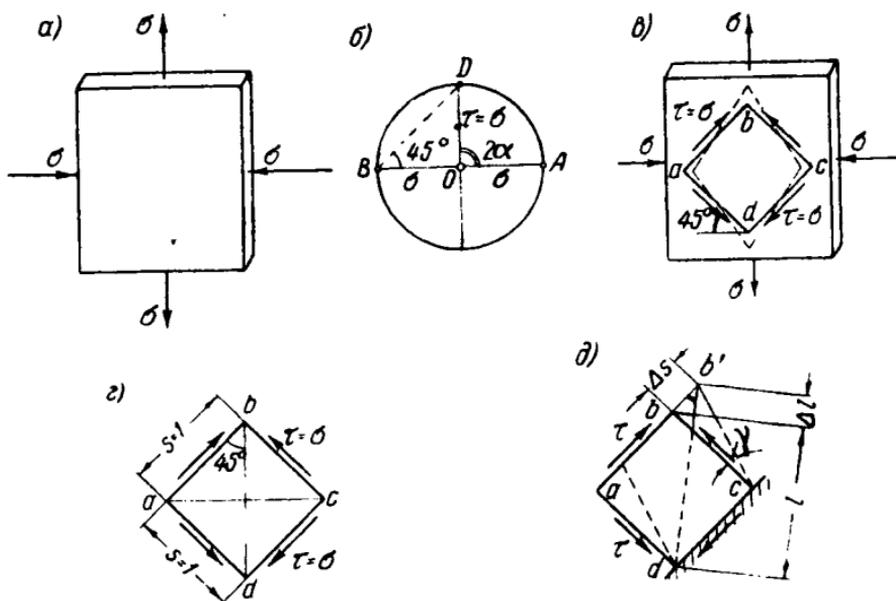
1. Какое сечение называется наклонным и чем определяется его положение?
2. Какие напряжения возникают в наклонном сечении растянутого стержня и по каким уравнениям они вычисляются?
3. В каких сечениях растянутого стержня действуют наибольшие по величине нормальные и касательные напряжения?
4. В чем состоит закон парности касательных напряжений?
5. Какие напряжения возникают в поперечных и диаметральных сечениях тонкостенного цилиндра при нагружении его внутренним давлением?
6. Почему разрушение воздушных баллонов происходит по диаметральному сечению?
7. Какое напряженное состояние называется плоским?
8. Какие сечения (площадки) называются главными?
9. Какие напряжения называются главными?
10. Какими свойствами обладают главные напряжения?
11. В каких площадках действуют наибольшие касательные напряжения при плоском напряженном состоянии и как они выражаются через главные напряжения?
12. Как вычисляются относительные удлинения при растяжении или сжатии в двух взаимно перпендикулярных направлениях?
13. Как определяется наибольшее касательное напряжение при объемном напряженном состоянии?
14. Какова цель разработки теории прочности?
15. В каком случае можно пользоваться первой теорией прочности?
16. Какие гипотезы положены в основу каждой теории прочности?
17. Как производится проверка прочности по третьей теории?

Глава V

СДВИГ

§ 1. Деформации и напряжения при сдвиге

Чистый сдвиг. Исследуем частный случай плоского напряженного состояния, при котором по граням прямоугольного элемента действуют главные напряжения $\sigma_1 = \sigma$ и $\sigma_3 = -\sigma$



Фиг. 5.1. Чистый сдвиг.

a — главные нормальные напряжения при чистом сдвиге; b — круг напряжений; $в$ — наибольшие касательные напряжения; $г$ — элемент, выделенный площадками с наибольшими касательными напряжениями; $д$ — деформация сдвига.

(фиг. 5.1, a), третье напряжение $\sigma_2 = 0$ является промежуточным. В одном направлении элемент растягивается, а в перпендикулярном сжимается с той же интенсивностью. Построим для этого

случая круг напряжений (§ 3, гл. IV). Откладывая вправо $\sigma_1 = \sigma$ (фиг. 5.1,б), а влево $\sigma_3 = -\sigma$, получаем центр круга в начале координат O . По построению этой точке соответствуют наибольшие касательные напряжения $\tau = \sigma$, равные радиусу круга. Такие же напряжения получаются по формуле (9) гл. IV:

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma - (-\sigma)}{2} = \sigma.$$

Они возникают в площадках, наклоненных под углом в 45° к направлению главных напряжений (фиг. 5.1,в). Из круга напряжений ясно, что в этих площадках нормальные напряжения равны нулю:

$$\sigma_{\alpha=45^\circ} = 0.$$

Таким образом при растяжении и сжатии по двум взаимно перпендикулярным направлениям, равными по абсолютной величине напряжениями, в элементе существуют площадки, в которых возникают только касательные напряжения. Если из рассматриваемого элемента вырезать квадратную призму, ограниченную площадками, наклоненными под углом 45° , то на ее гранях будут действовать только касательные напряжения (фиг. 5.1,г). Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*. При чистом сдвиге *наибольшие касательные напряжения численно равны главным напряжениям*:

$$\tau = \sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma. \quad (a)$$

После деформации элемента прямые углы a , b , c и d (фиг. 5.1,в) изменятся на величину угла γ . Углы b и d при этом уменьшатся до величины $(90 - \gamma)$, а углы a и c увеличатся до $(90 + \gamma)$. Эта деформация называется *сдвигом*. Он характеризуется перемещением Δs (фиг. 5.1,д) и перекосом прямых углов на угол γ . Перемещение Δs называется *абсолютным сдвигом* и измеряется в см. Деля абсолютный сдвиг на длину s , на которой он возник, из треугольника $bb'c$ (фиг. 5.1,д) найдем, что $\frac{\Delta s}{s} = \text{tg } \gamma$. При упругих деформациях сдвиг Δs и связанный с ним угол γ весьма малы. Учитывая, что для малых углов $\text{tg } \gamma = \gamma$, окончательно получаем

$$\gamma = \frac{\Delta s}{s}. \quad (1)$$

Угол γ называется *относительным сдвигом* или углом сдвига; он является безразмерной величиной и выражается в радианах. Угол сдвига в градусах будет

$$\gamma^\circ = \frac{\Delta s}{s} \frac{\pi}{180}.$$

Закон пропорциональности при сдвиге. Рассмотрим зависимость между напряжениями и деформациями при чистом сдвиге. Выделим из прямоугольного элемента квадратную призму $abcd$, по граням которой действуют только касательные напряжения τ (фиг. 5.1,з). В условиях чистого сдвига одна диагональ призмы укорачивается, а другая удлиняется (фиг. 5.1,с). Относительное удлинение диагонали определим по формуле (12) гл. IV, принимая во внимание равенство (а):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_3) = \frac{1}{E}[\tau - \mu(-\tau)] = \frac{\tau}{E}(1 + \mu).$$

Пусть длина стороны квадратной призмы равна единице, $s=1$ (фиг. 5.1,з). Тогда длина диагонали квадрата $l = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, а ее абсолютное удлинение

$$\Delta l = \varepsilon_1 l = \frac{\tau}{E}(1 + \mu)\sqrt{2}. \quad (b)$$

Для простоты предположим, что грань dc призмы неподвижна (фиг. 5.2,д). При деформации противоположная грань ab сдвинется в направлении касательных напряжений относительно грани dc на величину абсолютного сдвига $\Delta s = \gamma s = \gamma$. Прямые углы квадрата изменятся на малую величину угла сдвига γ и угол $ab'd$ будет равен $\frac{1}{2}(90 - \gamma) = 45 - \frac{\gamma}{2}$. Абсолютное удлинение диагонали Δl (фиг. 5.1,д) связано с абсолютным сдвигом Δs зависимостью $\Delta l = \Delta s \cos\left(45 - \frac{\gamma}{2}\right)$. Так как угол γ в пределах упругих деформаций очень мал, то величиной $\frac{\gamma}{2}$ можно пренебречь по сравнению с углом 45° и принять $\cos\left(45 - \frac{\gamma}{2}\right) \approx \cos 45^\circ$. Но $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Таким образом удлинение диагонали $\Delta l = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta s = \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma$. Сравнивая это с выражением (b), получаем

$$\frac{\tau}{E}(1 + \mu)\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma,$$

откуда

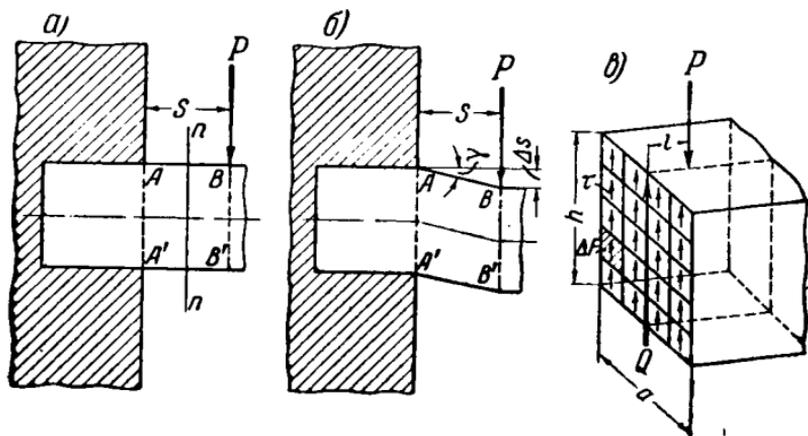
$$\tau = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma = G\gamma. \quad (2)$$

Полученная формула выражает закон пропорциональности при сдвиге. Величина G является коэффициентом пропорциональности и называется модулем упругости при сдвиге или просто *модулем сдвига*. Он имеет размерность $кг/см^2$, как и напряжение τ , что следует из уравнения (2), где угол γ является вели-

чиной безразмерной. Итак, деформации материалов характеризуются тремя величинами: модулем продольной упругости E , коэффициентом поперечной деформации μ и модулем сдвига G . Две из этих трех величин являются независимыми. Они могут быть определены только непосредственно из опыта (гл. III, § 2). Зависимость модуля сдвига от E и μ имеет вид

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (3)$$

и позволяет определить величину G , когда известны значения E и μ . Для большинства металлов можно принять $\mu = 0,25 - 0,3$. Тогда $G \approx 0,4 E$. Для стали $G = 800\,000 \text{ кг/см}^2$, для дуралюмина $G = 270\,000 \text{ кг/см}^2$.



Фиг. 5.2. Брус в условиях сдвига.

a — сила P действует поперек оси бруса; b — деформация бруса;
 v — средние касательные напряжения в поперечном сечении.

Практические случаи сдвига. Срез. Скалы в а и е. Чистый сдвиг встречается как элемент других деформаций, например, при растяжении и сжатии по двум направлениям, при кручении и т. д. Деформация сдвига обычно осложнена рядом побочных явлений. Такой «осложненный» сдвиг встречается при работе болтов, заклепок и т. п. металлических соединений; в этом случае он называется *срезом*; в случае деревянных соединений, где разрушение можно ожидать вдоль волокон, сдвиг называется скалыванием. Расчеты подобных соединений будут рассмотрены ниже. Простейшим примером практического осуществления сдвига может явиться следующий.

Пусть дан брус, зашпеленный одним концом в неподвижный блок. На небольшом расстоянии s от зашпеления (не превосходящем, например, высоту бруса) приложена перпендикулярно к оси бруса сила P (фиг. 5.2, a). Под действием этой силы сечение BB' перемещается относительно сечения AA' (фиг. 5.1, b).

Практически сечение BB' не только перемещается вдоль силы, но и поворачивается. Эта деформация рассматривается ниже в гл. IX об изгибе стержней. Однако при малом расстоянии s поворот мал и им пренебрегают. Таким образом характер деформации совпадает с рассмотренным в случае чистого сдвига.

Напряжения, возникающие при этом в поперечном сечении, выясним, применяя метод сечений. Мысленно проведя разрез бруса по nn и отбросив, например, левую часть, заменим ее действие на оставшуюся правую часть внутренними силами взаимодействия между частицами материала и рассмотрим равновесие правой части (фиг. 5. 2, в). По условию равновесия внешние и внутренние силы, действующие на оставшуюся часть, должны давать одинаковые проекции на любую ось. Чтобы сумма проекций на ось y равнялась нулю, в сечении должны иметься внутренние силы, которые должны быть направлены по касательной к поперечному сечению и давать равнодействующую Q , направленную противоположно силе P и равную ей, $Q=P$. Обычно в расчетах на сдвиг определяют не действительные касательные напряжения, которые будут различны в различных точках сечения, а их среднее значение

$$\tau = \frac{Q}{F} = \frac{P}{F} \quad (4)$$

— постоянное для всех точек сечения. Другими словами, принимают, что при сдвиге касательные напряжения распределяются равномерно по сечению (фиг. 5. 2, в). Этот условный расчет применяется к таким деталям конструкций, которые работают главным образом на сдвиг и у которых в основном только напряжения τ уравнивают нагрузку. Из фиг. 5. 2, в видно, что осталась не уравновешена пара с моментом Pl , — ею, по малости, пренебрегают.

Условие прочности. Для обеспечения прочности и долговечности детали, работающей на сдвиг, необходимо, чтобы средние касательные напряжения не превосходили допустимого касательного напряжения $[\tau]$. Условие прочности на сдвиг имеет вид

$$\frac{Q}{F} \leq [\tau]. \quad (5)$$

Допускаемое напряжение $[\tau]$ зависит от тех же факторов, что и допускаемое напряжение при растяжении $[\sigma]$. Напряжение $[\tau]$ должно составлять некоторую часть от временного сопротивления на сдвиг, при котором наступает разрушение.

Если известно допускаемое напряжение на растяжение и сжатие $[\sigma]$, то можно определить допускаемое напряжение на сдвиг $[\tau]$, пользуясь той или иной теорией прочности. При этом результаты получаются различными в зависимости от принятой теории прочности. Выбор теории прочности зависит, как указывалось в § 4 гл. IV, от материала детали.

По первой теории прочности из условия прочности $\sigma_1 \leq [\sigma]$, учитывая, что $\sigma_1 = \tau$ [см. соотношения (а) для чистого сдвига], получим

$$[\tau] = [\sigma],$$

т. е. допускаемое напряжение на сдвиг равно допускаемому напряжению на растяжение или сжатие. Следует помнить, что первая теория справедлива лишь для хрупких материалов, из которых детали, работающие на сдвиг, обычно не изготавливаются.

По второй теории условие прочности в случае плоского напряженного состояния, соответствующего чистому сдвигу, имеет вид

$$\sigma_1 - \mu\sigma_3 \leq [\sigma].$$

Подставляя сюда значения σ_1 и σ_3 при чистом сдвиге, $\sigma_1 = \tau$ и $\sigma_3 = -\tau$, найдем такую зависимость:

$$\tau + \mu\tau \leq [\sigma].$$

Отсюда допускаемое напряжение на сдвиг

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu} \approx 0,75 [\sigma].$$

Третья теория прочности выражается условием $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$, откуда $\tau + \tau \leq [\sigma]$ или $2[\tau] = [\sigma]$, т. е. по третьей теории прочности

$$[\tau] = 0,5 [\sigma].$$

Соответственно по четвертой теории прочности

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma].$$

Учитывая что $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, получаем

$$\sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2} \leq [\sigma] \text{ или } [\tau] \approx 0,6 [\sigma].$$

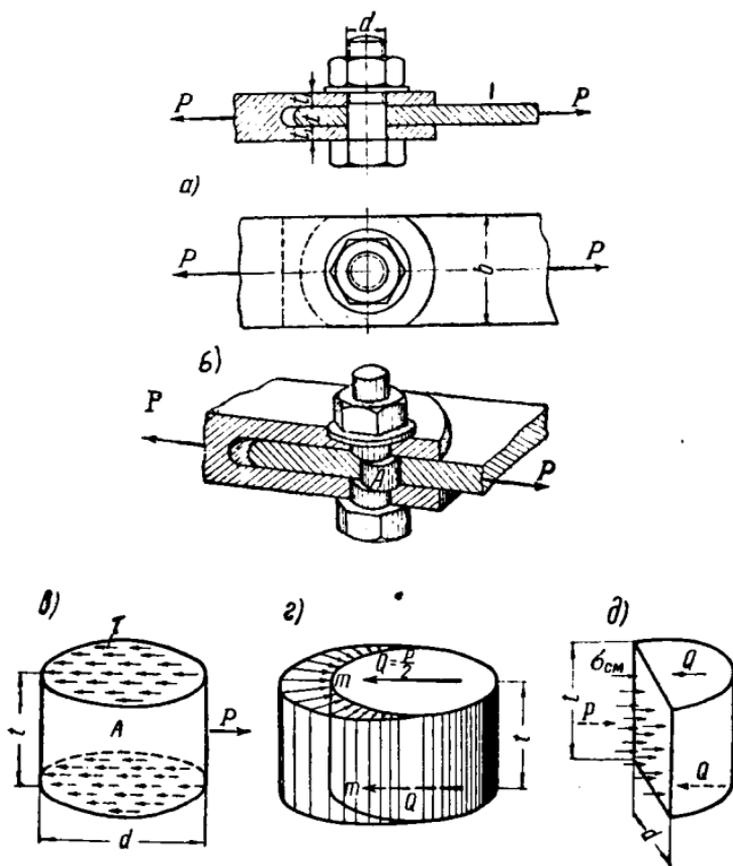
Знак неравенства в условиях прочности опущен и оставлен только знак равенства, так как рассматривается предельный случай.

§ 2. Расчет болтового соединения

Рассмотрим расчет соединения двух тяг при помощи болта (фиг. 5.3,а). Пусть известны растягивающие силы P , диаметр болта d , толщины t и t_1 проушин, которыми заканчиваются тяги, и допускаемые напряжения материала элементов соединения. Установим предельные соотношения размеров соединения, удовлетворяющие условиям прочности.

Срез болта. Силы P стремятся сдвинуть среднюю проушину вправо, а вилку, образованную двумя ушками другой проушины, влево. Этому сдвигу препятствует болт. Тело болта срезается по двум плоскостям, параллельным силе P (фиг. 5.3,б),

и в каждой из плоскостей действует срезающая сила $Q = \frac{P}{2}$. Болт находится в условиях двойного среза и называется двухсрезным. Его средняя часть A , отделенная плоскостями среза, изображена на фиг. 5.3, в. Касательные напряжения предпола-



Фиг. 5.3. Болтовое соединение.

а — разрез и план соединения; *б* — срез болта по двум плоскостям; *в* — касательные напряжения, действующие на среднюю часть болта в плоскостях среза; *г* — силы смятия по боковой поверхности болта; *д* — средние (расчетные) напряжения смятия, распределенные по диаметральному сечению.

гаются распределенными равномерно в каждой плоскости среза и по уравнению (1) равны $\tau = \frac{Q}{F}$. Подставляя сюда значение $Q = P$ и площадь среза болта $F = \frac{\pi d^2}{4}$, получим

$$\tau = \frac{P}{2 \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau]. \quad (6)$$

По условию прочности болта на срез средние касательные напряжения не должны превосходить допускаемых. Если известна внешняя сила и допускаемое напряжение $[\tau]$, то по формуле (6) находим необходимый диаметр двухсрезного болта

$$d \geq \sqrt{\frac{2P}{\pi[\tau]}}. \quad (6')$$

Смятие. Силы, действующие на болт, не только срезают, но и сминают болт и проушину. Отверстие в проушине из круглого становится овальным. Под действием силы P проушина давит на болт. Силы давления распределены неравномерно и направлены перпендикулярно к боковой поверхности (фиг. 5.3,з). Наибольшего значения они достигают в точках m по середине поверхности соприкосновения болта и проушины. Расчет условно производят по средним напряжениям смятия, отнесенным к диаметральному сечению болта (фиг. 5.3,д). Площадь диаметрального сечения болта, соответствующая проушине толщиной t , равна $F_{см} = td$. На эту площадь от проушины передается сила P . Напряжение смятия $\sigma_{см} = \frac{P}{F_{см}} = \frac{P}{td}$.

Для обеспечения прочности и правильной работы соединения необходимо, чтобы средние сминающие напряжения не превосходили допускаемого напряжения на смятие $[\sigma_{см}]$. Условие прочности на смятие имеет вид

$$\frac{P}{td} \leq [\sigma_{см}]. \quad (7)$$

Величина допускаемого напряжения на смятие для каждого материала определяется опытным путем, оно в 2—2,5 раза больше допускаемого напряжения на растяжение. Например, для стали $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$, а $[\sigma_{см}] = 2800 \text{ кг/см}^2$. По формуле (7) находим наименьший диаметр болта, обеспечивающий прочность на смятие при выбранной толщине t проушины:

$$d \geq \frac{P}{t[\sigma]}. \quad (7')$$

Из двух значений диаметра, определяемых по расчету на срез (6') и по расчету на смятие (7'), берется большее. Напряжение смятия на поверхности соприкосновения болта со средней проушиной больше, чем на поверхности соприкосновения болта с ушками вилки, потому что толщина $2t_1$ двух ушков вилки обычно больше толщины t проушины.

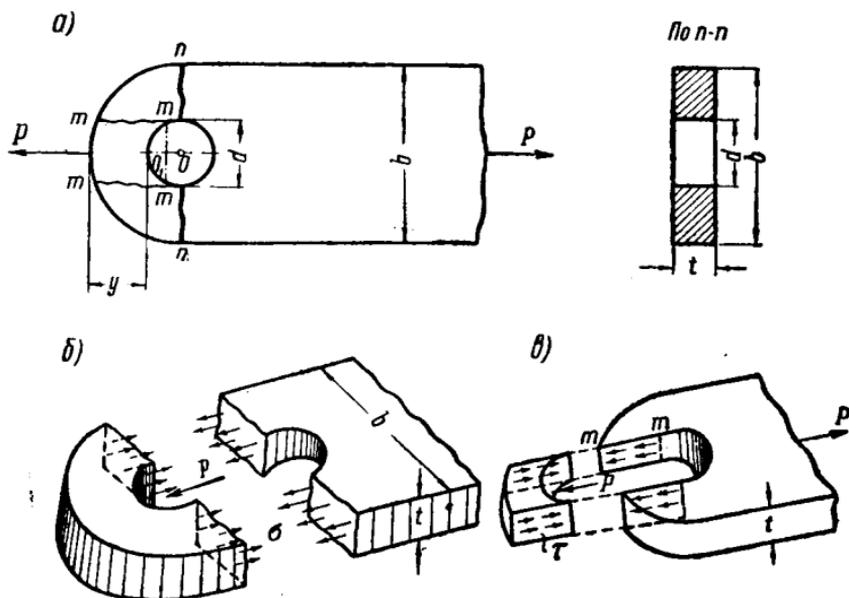
Расчет проушины. Расчет проушины является задачей весьма сложной, но в первом приближении может быть произведен элементарно следующим образом. Наиболее слабым сечением проушины является сечение nn (фиг. 5.4,а), по которому

происходит разрыв от растягивающей силы. Площадь разрыва равна

$$F = tb - td = t(b - d).$$

Наибольшее нормальное напряжение, возникающее в сечении разрыва (фиг. 5.4,б)

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{P}{t(b - d)},$$



Фиг. 5.4. К расчету проушины.

a — опасные сечения проушины; *б* — нормальные напряжения; *в* — касательные напряжения.

не должно превосходить допускаемого напряжения при растяжении:

$$\frac{P}{t(b - d)} \leq [\sigma]. \quad (8)$$

Отсюда, принимая диаметр отверстия равным диаметру болта d и выбрав толщину t , находим ширину проушины

$$b \geq \frac{P}{t[\sigma]} + d. \quad (8')$$

Растягивающая сила P стремится, кроме того, передаваясь на перемычку проушины, вызвать срез по двум сечениям $m - m$ (фиг. 5.4,а и в). Площадь среза принимается равной удвоенной площади прямоугольника со сторонами t и y . По условию прочности среднее касательное напряжение в двух площадях среза

$\tau = \frac{P}{2ty}$ не должно превосходить допускаемое напряжение на срез

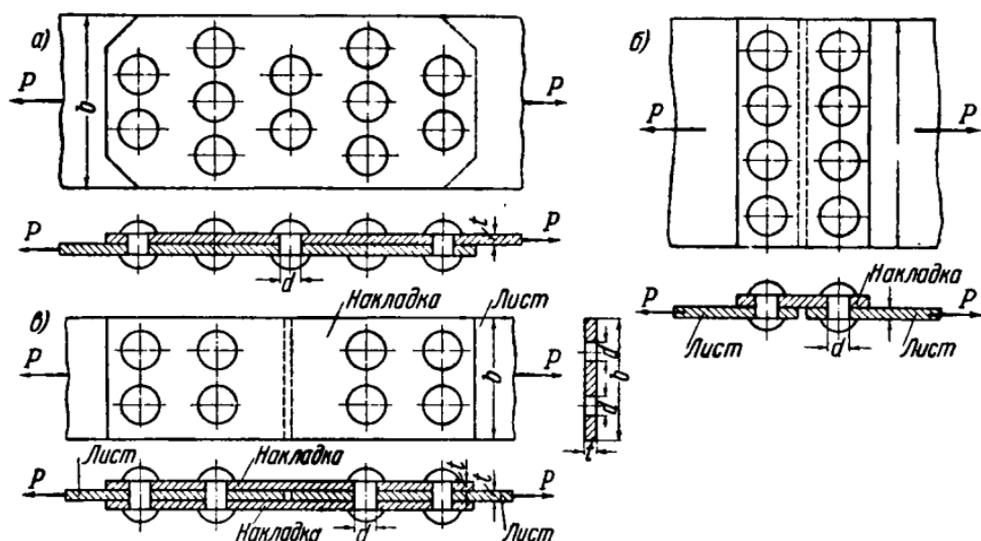
$$\frac{P}{2ty} \leq [\tau]. \quad (9)$$

Отсюда находим необходимую ширину перемычки

$$y \geq \frac{P}{2t[\tau]}. \quad (9')$$

§ 3. Заклепочные соединения

Конструктивно соединение двух листов можно выполнить наложением одного листа на другой внахлестку или накладками, перекрывающими стык листов с одной или с двух сторон (фиг. 5.5). Заклепки, соединяющие листы и накладки при дей-



Фиг. 5.5. Заклепочные соединения.

а — соединение внахлестку; *б* — соединение накладкой с односрезными заклепками; *в* — соединение накладками с двухсрезными заклепками.

ствии продольной силы P , срезаются в этих случаях по одной или двум плоскостям, совпадающим с плоскостями, отделяющими листы друг от друга или от накладок. Могут быть и такие соединения, при которых заклепки срезаются больше чем по двум плоскостям. По числу плоскостей среза различают заклепки односрезные, двухсрезные и многосрезные. Принято считать, что по плоскости среза каждой заклепки напряжения распределены равномерно. Двухсрезная заклепка, очевидно, выдержит вдвое большую срезающую силу, чем односрезная. По направлению

продольной силы можно поставить одну, две или несколько заклепок в ряд. Опыты показывают, что одни заклепки продольного ряда нагружаются больше, другие меньше. Но к моменту разрушения напряжения в заклепках более или менее выравниваются вследствие текучести материала. Поэтому условно принимают, что все заклепки соединения работают с равными напряжениями и при заклепках одного диаметра сила распределяется между ними поровну. При этих допущениях расчет заклепок с любым числом плоскостей среза принципиально ничем не отличается от рассмотренного выше расчета болта.

Установим условия прочности для двухсрезных заклепок соединения, выполненного с накладками (фиг. 5.5,в). Заклепки, расположенные на одной половине соединения, присоединяют лист к накладкам и препятствуют стремлению силы P сдвинуть лист между накладками. С накладок сила P передается заклепками другой половины на второй лист.

Обозначая через n число заклепок на одной половине соединения и предполагая, что сила P распределяется поровну между заклепками, получаем усилие, приходящееся на одну заклепку, $P_{\text{зак}} = \frac{P}{n}$. Заклепка срезается точно так же, как срезается болт (фиг. 5.2,б), и для нее можно применить формулу (6)

$$\tau = \frac{P_{\text{зак}}}{2 \frac{\pi d^2}{4}}$$

Отсюда условие прочности шва, осуществленного двухсреznыми заклепками, принимает вид

$$\frac{P}{2n \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau]. \quad (10)$$

Здесь в знаменатель входит общая площадь среза всех заклепок, на которые действует нагрузка P : площадь сечения стержня заклепки $\frac{\pi d^2}{4}$ умножается на число срезов в одной заклепке, равное двум, и на число заклепок n . При расчете соединения с односреznыми заклепками (фиг. 5.5,а или б) в условие прочности подставляется общее число срезов, равное числу заклепок n . Неизвестными величинами являются диаметр и число заклепок. В практике обычно диаметр заклепок не рассчитывают, а выбирают заранее в зависимости от толщины t склепываемых листов и от общей толщины соединения приблизительно в пределах от $1,7t$ до $3t$. Тогда по формуле (10) получается необходимое число двухсреznых заклепок из расчета на срез:

$$n \geq \frac{P}{2[\tau] \frac{\pi d^2}{4}} \quad (10')$$

Как и болты, заклепки рассчитывают также и на смятие, пользуясь условием прочности (7):

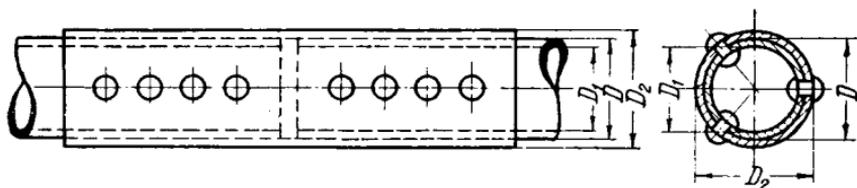
$$\frac{P_{\text{зак}}}{td} = \frac{P}{ntd} \leq [\sigma_{\text{см}}]. \quad (11)$$

Отсюда получается необходимое число заклепок, обеспечивающее прочность соединения на смятие:

$$n \geq \frac{P}{[\sigma_{\text{см}}]td}. \quad (11')$$

Из двух значений n по формулам (10) и (11) принимается большее. Расстояние заклепок от края полосы (накладки) берется не меньше $1,2d$ и расстояние между центрами заклепок по любому направлению не меньше $3d$.

Пример 1. Две полосы соединены заклепками с помощью двух накладок и растягиваются силой $P=2600$ кг (фиг. 5.5, в). Проверить прочность соединения, если диаметр заклепок



Фиг. 5.6. Заклепочное соединение двух труб при помощи муфты.

$d=8$ мм; толщина полос $t=4$ мм; толщина накладок $t_1=3$ мм; ширина полос и накладок $b=80$ мм. Число заклепок на одной стороне соединения $n=4$, допустимое напряжение на разрыв $[\sigma]=1100$ кг/см², на срез заклепок $[\tau]=700$ кг/см²; на смятие заклепок, накладок и полос $[\sigma_{\text{см}}]=2200$ кг/см².

По формуле (10) проверяем заклепки на срез:

$$\frac{P}{2n \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{2600}{2 \cdot 4 \frac{3,14 \cdot 0,8^2}{4}} = 647 < 700 \text{ кг/см}^2.$$

По формуле (11) проверяем на смятие:

$$\frac{P}{ntd} = \frac{2600}{4 \cdot 0,4 \cdot 0,8} = 2030 < 2200 \text{ кг/см}^2.$$

Проверяем прочность полос на разрыв в ослабленном сечении по первому поперечному ряду заклепок:

$$\frac{P}{t(b-2d)} = \frac{2600}{0,4(8-2 \cdot 0,8)} = 1056 < 1100 \text{ кг/см}^2.$$

Прочность соединения оказывается обеспеченной. Проверять прочность накладок в данном случае не нужно, так как они заведомо прочнее полос.

Пример 2. Рассчитать по условию равнопрочности заклепочное соединение поврежденной хромансильевой трубы с диаметрами $D \times D_1 = 25 \times 23$ мм, осуществленное трубчатой муфтой (фиг. 5.6), принимая во внимание значения пределов прочности: на разрыв трубы $\sigma_{\text{пч}} = 12\,000$ кг/см²; муфты $\sigma'_{\text{пч}} = 7\,000$ кг/см²; на смятие $\sigma_{\text{см}} = 1,5\sigma_{\text{расг}}$; на срез заклепок $\tau_{\text{пч}} = 5\,000$ кг/см².

Неослабленное сечение трубы, $F = \frac{\pi}{4}(D^2 - D_1^2) \approx \pi D_{\text{ср}} t = 3,14 \cdot 24 \cdot 0,1 = 0,755$ см², может выдержать нагрузку $P = F\sigma_{\text{пч}} = 0,755 \cdot 12\,000 = 9\,050$ кг. Здесь $D_{\text{ср}} = \frac{D + D_1}{2}$ — средний диаметр трубы, а t — толщина стенки. Чтобы соединение было равнопрочным, муфта должна выдерживать такую же силу P . Отсюда площадь муфты

$$F' = \frac{P}{\sigma'_{\text{пч}}} = \frac{9\,050}{7\,000} = 1,29 \text{ см}^2.$$

Зная площадь муфты и принимая ее внутренний диаметр равным внешнему диаметру трубы D , из формулы $F' = \frac{\pi}{4} \times \times (D_2^2 - D^2)$ находим наружный диаметр

$$D_2 = \sqrt{\frac{4F'}{\pi} + D^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,29}{3,14} + 2,5^2} = 2,81 \text{ см}.$$

Делаем муфту из трубы 28×25 мм; толщина ее стенок $t_1 = 1,5$ мм. Назначаем диаметр заклепок $d = 4$ мм. Размещая заклепки в три продольных ряда, ослабляем сечение трубы тремя отверстиями площадью $F_{\text{осл}} = 3td = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,4 = 0,12$ см². Ослабленная труба выдержит силу $P = (F - F_{\text{осл}}) \sigma_{\text{пч}} = (0,755 - 0,12) 12\,000 = 7\,630$ кг. Муфта выдержит $P = (1,29 - 3 \cdot 0,15 \cdot 0,4) 7\,000 = 7\,770 > 7\,630$ кг. По формуле (10') вычисляем необходимое число односрезных заклепок

$$n \geq \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \tau_{\text{пч}}} = \frac{7\,630}{5\,000 \frac{3,14 \cdot 0,4^2}{4}} = 12,2.$$

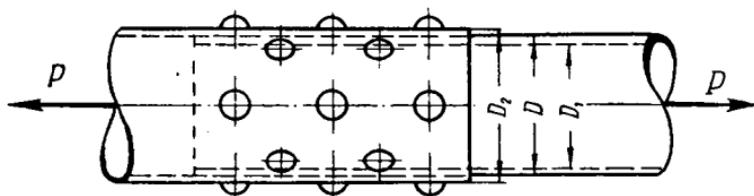
Поставим 12 заклепок по четыре в каждом продольном ряду. Проверяем прочность муфты и трубы на смятие от силы $P = 7\,630$ кг:

$$\text{для трубы } \frac{P}{ntd} = \frac{7\,630}{12 \cdot 0,1 \cdot 0,4} = 15\,900 < 1,5 \cdot 12\,000 \text{ кг/см}^2;$$

$$\text{для муфты } \frac{P}{nt_1 d} = \frac{7\,630}{12 \cdot 0,15 \cdot 0,4} = 10\,600 \approx 1,5 \cdot 7\,000 \text{ кг/см}^2.$$

Очевидно, принятые размеры достаточны.

Задачи. 1. Определить величину разрушающей силы для двух труб 30×28 и 33×30 , телескопически соединенных двадцатью дуралюминовыми заклепками диаметром $d=3,5$ мм (фиг. 5. 7).

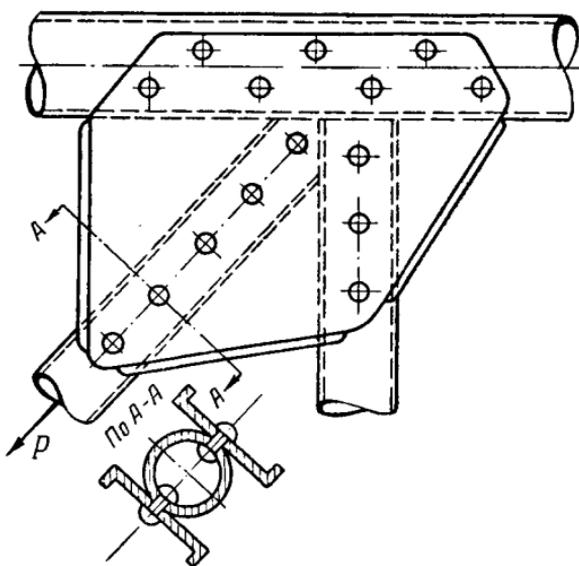


Фиг. 5. 7. Определить разрушающую нагрузку.

Заклепки размещены в шахматном порядке по четыре в поперечном ряду. Предел прочности на растяжение $\sigma_{пч}=4000$ кг/см²; на срез $\tau_{пч}=2200$ кг/см²; на смятие $\sigma_{пч}=5200$ кг/см².

Ответ: $P=3085$ кг.

2. Трубчатый раскос с диаметрами 50×45 мм крепится к поясу двумя косынками толщиной $t=2,5$ мм (фиг. 5. 8). Растягиваю-



Фиг. 5. 8. Подобрать заклепки для крепления раскоса.

щее усилие в раскосе $P=3000$ кг. Подобрать диаметр и число заклепок, если допускаемые напряжения на срез $[\sigma]=1120$ кг/см² и на смятие $[\sigma_{см}]=2800$ кг/см².

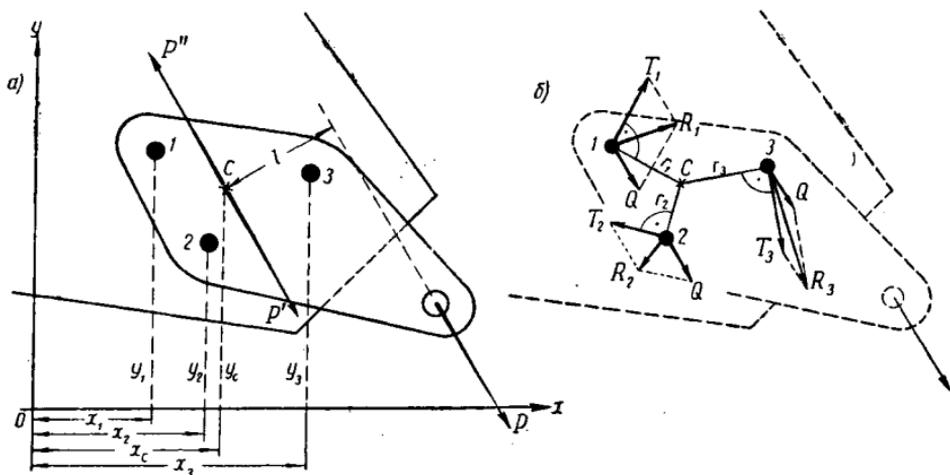
Ответ: выбирая $d=0,6$ см, получаем $n=9,5$.

§ 4. Сросток Шухова

В рассмотренных соединениях заклепки размещены симметрично относительно линии действия сил. Только при этом условии можно считать, что силы равномерно распределены на все заклепки. Соединение, в котором ли-

ния действия сил не является осью симметрии (фиг. 5.9,а), называется «сростком Шухова» по имени крупного русского инженера, давшего теорию расчета таких соединений. Со сростками Шухова приходится встречаться при расчете прочности многих узловых соединений: например, узлов крепления консоли крыла к центроплану, узлов крепления стоек и подкосов шасси и т. д.

В сростках Шухова заклепки нагружаются неравномерно, но всегда можно найти такую точку, через которую должна проходить линия действия сил, чтобы распределение усилий по заклепкам было равномерным. Эта точка называется *центром сдвига* или центром жесткости узла. Если заклепки размещены симметрично относительно оси, то центр сдвига лежит



Фиг. 5.9. Сросток Шухова.

а — замена произвольной силы P силой P' в центре сдвига и моментом $M = Pl$; б — на заклепки передаются усилия Q от силы P' и T от момента M .

на этой оси. При произвольном расположении заклепок он определяется как центр тяжести площадей поперечных сечений заклепок. При этом предполагается, что приклепываемая полоса является абсолютно твердой. Это предположение следует иметь в виду и во избежание больших ошибок не применять теорию Шухова в случаях, когда некоторые заклепки будут сильно удалены от основной их массы.

Рассмотрим ушко, присоединенное к косынке заклепками (фиг. 5.9,а). Площади сечений заклепок обозначим F_1, F_2, F_3 . Проведем произвольно оси координат x и y . Измерив расстояния центров заклепок x_1, x_2 и x_3 от оси y , находим абсциссу x_C центра сдвига по формуле (9) гл. I, § 5.

$$x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\sum Fx}{\sum F}.$$

Если все заклепки одного диаметра, то их площади одинаковы: $F_1 = F_2 = F_3 = F$. Тогда, сократив на F , получим $x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{\sum x}{n}$. Точно так же найдем расстояние до центра сдвига от оси x :

$$y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{\sum y}{n}.$$

Чтобы определить усилия в заклепках от произвольно направленной силы P , приложим в центре сдвига две равные, противоположно направленные

ные силы $P'=P$ и $P''=-P$, параллельные силе P . Равновесие системы от этого не нарушается. Сила $P'=P$, проходящая через центр сдвига, вызывает во всех заклепках одинаковые усилия, равные (фиг. 5.9,б) $Q=\frac{P}{n}$. Сила P''

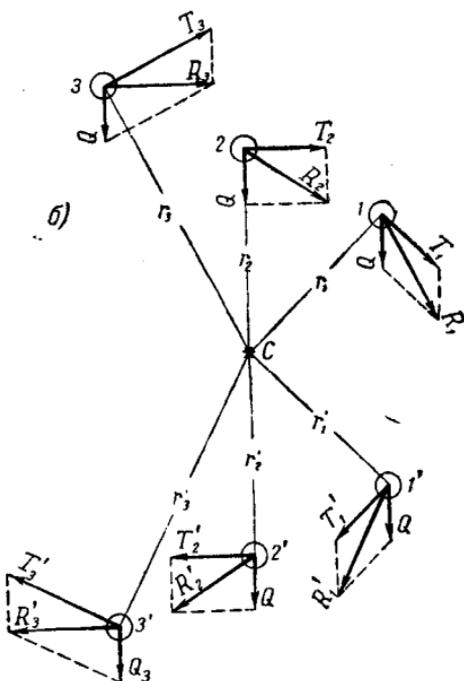
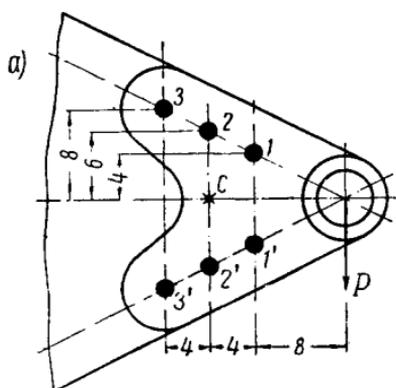
и нагрузка P образуют пару с моментом $M=Pl$, где l — перпендикуляр, опущенный из центра сдвига на направление силы P . От момента M ушко стремится повернуться около центра C и вызывает смещение заклепок перпендикулярно радиусам r . Смещение тем больше, чем больше радиус r , т. е. чем дальше от центра сдвига расположена заклепка. От величины смещений зависят срезающие усилия T , передаваемые от момента на заклепки. Эти усилия пропорциональны расстояниям r ; их направление совпадает с направлением смещений, т. е. перпендикулярно радиусам (фиг. 5.9,б). В случае сростка с заклепками одинакового диаметра усилия T , срезающие заклепку при действии момента, пропорционально расстоянию r заклепки от центра сдвига $T=kr$. С другой стороны, сумма моментов усилий T относительно центра сдвига должна равняться моменту M , т. е. $\sum Tr = \sum kr^2 = k \sum r^2 = M$, откуда $k = \frac{M}{\sum r^2}$ и

$$T = \frac{M}{\sum r^2} r. \quad (12)$$

Здесь $\sum r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ — величина, постоянная для данного сростка. Полное усилие R , срезающее заклепку от действия произвольной силы P , является равнодействующей усилий Q и T от центральной силы P и от момента $M=Pl$. Эту равнодействующую проще всего найти графически по правилу параллелограмма (фиг. 5.9,б). По наибольшей силе R производится проверка прочности сростка на срез и смятие, например, при односрезных заклепках, по формулам

$$\frac{R_{\max}}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau] \quad \text{и} \quad \frac{R_{\max}}{td} \leq [\sigma_{\text{см}}].$$

Пример 1. Определим наибольшую вертикальную силу P , которую можно приложить к косынке, прикрепленной к кронштейну шестью заклепками диаметром $d=8$ мм (фиг. 5.10, а), если допускаемое на-



Фиг. 5.10. К определению грузоподъемности крепления косынки. а — расположение заклепок; б — определение расстояний заклепок и равнодействующих усилий.

пряжение на срез заклепок $[\tau]=1000 \text{ кг/см}^2$. Вследствие симметрии сростка центр сдвига лежит по середине между заклепками 2 и 2'. По чертежу измеряем в масштабе расстояния r между точкой S и центрами заклепок (фиг. 5.10,б): $r_1=r'_1=5,6 \text{ см}$; $r_2=r'_2=6 \text{ см}$; $r_3=r'_3=8,9 \text{ см}$, и вычисляем сумму их квадратов $\Sigma r^2=2(32+36+80)=296 \text{ см}^2$. Переносим силу P параллельно самой себе в центр сдвига и прикладываем момент $M=Pl=12P$. От центральной силы P на каждую заклепку передается одно и то же вертикальное усилие $Q=\frac{P}{n}=\frac{P}{6}=0,167P$. От момента $M=12P$ на заклепки передаются неодинаковые усилия, определяемые по формуле (12):

$$T_1=T'_1=\frac{12P \cdot 5,6}{296}=0,227P; \quad T_2=T'_2=\frac{12P \cdot 6}{296}=0,243P;$$

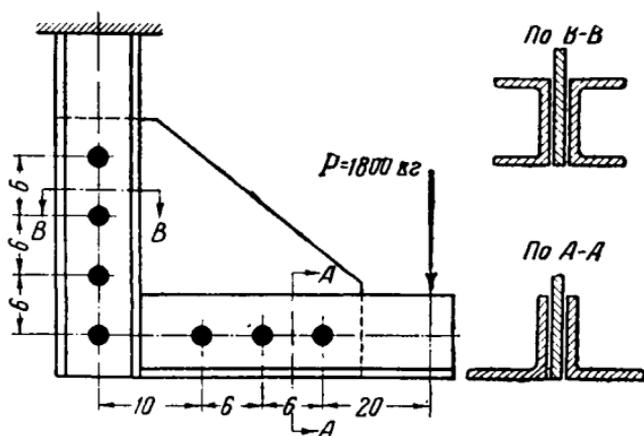
$$T_3=T'_3=\frac{12P \cdot 8,9}{296}=0,361P.$$

Откладывая усилия Q и T в масштабе и находя по правилу параллелограмма их равнодействующие R (фиг. 5.10,б), устанавливаем, что наибольшее суммарное усилие R_{\max} от заданной силы P возникает в заклепках 1 и 1'. Оно равно

$$R_{\max}=R_1=0,36P.$$

Подставляя его величину в условие прочности, получаем $\frac{4 \cdot 0,36P}{3,14 \cdot 0,8^2} = 1000$, откуда наибольшая сила, которую способен выдержать данный сросток, равна $P=\frac{3,14 \cdot 0,8^2 \cdot 1000}{4 \cdot 0,36}=1400 \text{ кг}$.

Задача 1. К кронштейну (фиг. 5.11) приложена сила $P=1800 \text{ кг}$. Определить диаметр d заклепок и толщину t фасонки, если $[\tau]=1000 \text{ кг/см}^2$ и $[\sigma_{\text{см}}]=2800 \text{ кг/см}^2$. *Ответ:* $d=17 \text{ мм}$; $t=9,5 \text{ мм}$.

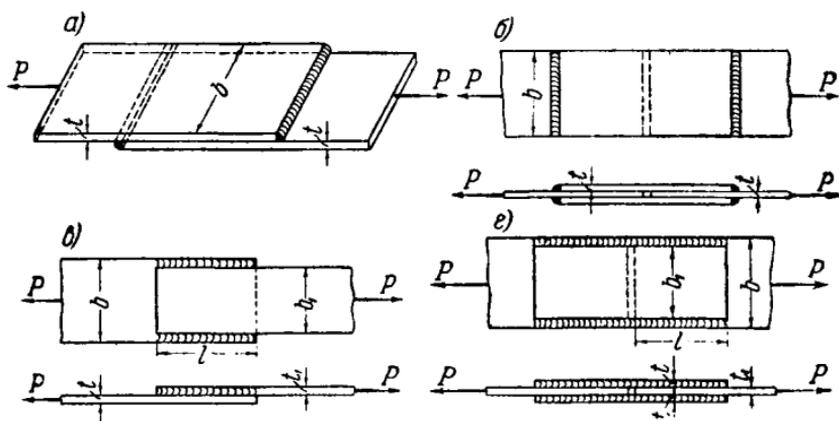


Фиг. 5.11. Определить диаметр заклепок и толщину фасонки.

§ 5. Сварные соединения

Заклепочные соединения обладают тем недостатком, что сечения ослабляются отверстиями для заклепок. От этого недостатка свободны сварные соединения, так как при сварке нет необходи-

мости в отверстиях и соединения получаются более простые и экономичные, чем заклепочные. Швы в сварных соединениях располагают в торцах свариваемых листов, перпендикулярно действующей нагрузке, и с боков, параллельно нагрузке. Первые называются лобовыми (фиг. 5. 12,а и б), а вторые — фланговыми



Фиг. 5. 12. Сварные соединения.

а — внахлестку двумя лбовыми швами; б — накладками;
в — внахлестку двумя фланговыми швами; г — накладками
при четырех фланговых швах.

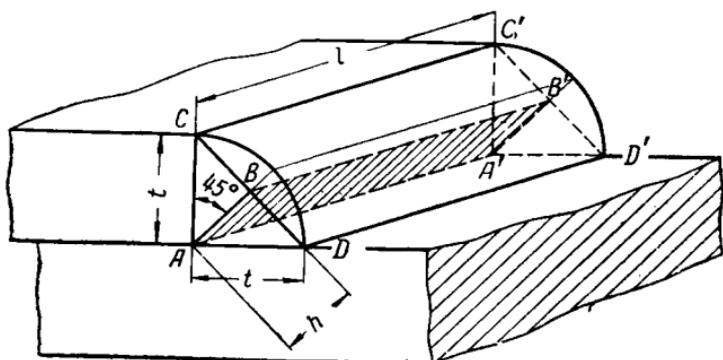
швами (фиг. 5. 12,в и г). Лобовые и фланговые швы применяют отдельно или в комбинации друг с другом для соединения листов внахлестку или накладками. Сварные швы работают в условиях сложного напряженного состояния, когда одновременно действуют и нормальные и касательные напряжения. Расчет сварных швов производится на основании опытных исследований и является приближенным. Допускаемые напряжения для сварных соединений выбираются в зависимости от вида деформации, свойств наплавленного металла, термической обработки после сварки и т. д. Например, в строительной практике для электросварки соединений из стали 3 при электродах с тонкой обмазкой принимают допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_{сж}] = 1100 \text{ кг/см}^2$, на растяжение $[\sigma_{раст}] = 1000 \text{ кг/см}^2$ и на срез $[\tau] = 800 \text{ кг/см}^2$.

Из опытов установлено, что разрушение лбовых и фланговых швов происходит по плоскости, проходящей под 45° к поверхностям привариваемых листов (фиг. 5. 13). При расчете наплыв металла, расположенный выше плоскости $CDD'C'$, не имеющих точных размеров, не учитывают. Поверхность разрушения условно принимают равной площади прямоугольника $ABB'A'$ (на фиг. 5. 13 заштрихована). Таким образом расчетная площадь опасного сечения шва $F = lh$, где $h = t \cos 45^\circ \approx 0,7t$, где t — толщина привариваемого листа.

Лобовые швы разрушаются по опасному сечению AB вследствие растяжения или сжатия продольной силой P (фиг. 5. 12,а)

при напряжениях, вычисляемых в предположении равномерного распределения ($\sigma = \frac{P}{F}$), которые равны пределу прочности на растяжение наплавленного металла. Отсюда, учитывая коэффициент запаса, условие прочности для одного лобового шва принимает вид

$$\frac{P}{F} = \frac{P}{0,7tl} \leq [\sigma_{\text{раст}}] \quad \text{или} \quad \frac{P}{0,7tl} \leq [\sigma_{\text{сж}}]. \quad (13)$$



Фиг. 5.13. Плоскость разрушения шва.

Аналогично получается условие прочности для двух одинаковых лобовых швов, на каждый из которых приходится половина силы P (фиг. 5.12,а и б):

$$\frac{P}{1,4tl} \leq [\sigma].$$

Фланговые швы разрушаются по плоскости $ABB'A'$ вследствие сдвига вдоль шва одного листа относительно другого от силы P . При симметрично расположенных одинаковых фланговых швах на каждый из них передаются равные доли силы P . Например, при двух швах (фиг. 5.12,в) сила, срезающая каждый шов в продольном направлении, равна $Q = \frac{P}{2}$, при четырех швах (фиг. 5.12,г) $Q = \frac{P}{4}$. Опытами установлено, что разрушение флангового шва наступает, когда касательное напряжение в опасном сечении $\tau = \frac{Q}{0,7tl}$ достигает предела прочности на срез наплавленного металла. Учитывая коэффициент запаса, получают условие прочности двух фланговых швов

$$\frac{Q}{0,7tl} = \frac{P}{1,4tl} \leq [\tau]. \quad (14)$$

Если соединение выполняется комбинацией лобовых и фланговых швов, то для обоих швов принимают одно и то же допускаемое напряжение, равное допускаемому напряжению $[\tau]$ флангового шва.

Пример 1. Определить разрушающую силу P соединения листов внахлестку двумя лобовыми швами (фиг. 5. 12,а), если $b=80$ мм, $t=4$ мм, предел прочности сварки $\sigma_{св}=3000$ кг/см² и листов $\sigma_{л}=4800$ кг/см².

Длина сварки $l=8$ см. Сила, разрушающая швы,

$$P_{шва} = 2tl\sigma_{св} = 2 \cdot 0,4 \cdot 8,0 \cdot 3000 = 19\,200 \text{ кг.}$$

Сила, разрушающая листы,

$$P_{л} = tb\sigma_{л} = 0,4 \cdot 8 \cdot 4800 = 15\,360 \text{ кг.}$$

В данном случае сварка оказалась более прочной, чем листы.

Пример 2. Найти необходимую длину фланговых швов (фиг. 5. 12,г) из условия одинаковой прочности сварки и соединяемых листов. Дано: $b=8$ см; $b_1=7,2$ см, $t_1=0,4$ см; $t=0,3$ см. Допускаемые напряжения: сварки $[\tau]=800$ кг/см², листов $[\sigma]=1400$ кг/см².

Площадь сечения листов $F=8 \cdot 0,4=3,2$ см²; накладок $F=2 \cdot 7,2 \cdot 0,3=4,32$ см². Наибольшая допускаемая нагрузка соединения равна усилию, которое можно допустить в листах, потому что сечение накладок больше, $P=F[\sigma]=3,2 \cdot 1400=4480$ кг. Длину швов находим по условию прочности (14), учитывая, что каждый лист удерживается четырьмя фланговыми швами $\frac{P}{4,07tl} \leq [\tau]$.

Отсюда

$$l \geq \frac{P}{4 \cdot 0,7t[\tau]} = \frac{4480}{4 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 800} = 6,7 \text{ см.}$$

Задача. Определить длину фланговых швов для соединения двух листов внахлестку (фиг. 5. 12,в). Дано: сила $P=10\,000$ кг; $t=4$ мм; $[\tau]=800$ кг/см².

Ответ: $l=22,3$ см.

Контрольные вопросы

1. Чем характерна деформация сдвига? Что называется абсолютным и относительным сдвигом?
2. Напишите формулу для касательных напряжений и условие прочности на сдвиг.
3. Напишите закон пропорциональности при сдвиге.
4. Напишите формулу, связывающую упругие постоянные E , G и μ .
5. Напишите условия прочности болта на срез и на смятие.

6. Чем отличается расчет односрезного болта от расчета двухсрезного болта.

7. Напишите условия прочности на срез и на смятие для односрезной заклепки.

8. Когда заклепочное соединение работает как сросток Шухова?

9. Что называется центром сдвига заклепочного соединения и как он определяется?

10. По какой плоскости разрушаются лобовые и фланговые швы?

11. Напишите условия прочности для лобовых и фланговых швов.

Глава VI

КРУЧЕНИЕ

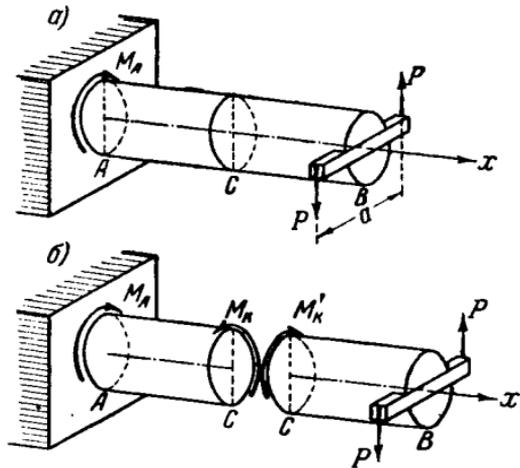
§ 1. Экспериментальные данные и предпосылки

При растяжении или сжатии напряжения и деформации бруса не зависят от формы его поперечного сечения. Достаточно знать величину площади сечения [формулы (2) и (5) гл. III]. Совершенно другая картина наблюдается при кручении. Как мы увидим ниже, напряжения и деформации при кручении существенно зависят от того, какую форму имеет поперечное сечение бруса — круглую, прямоугольную, двутавровую и т. д. Это обстоятельство необходимо иметь в виду при изучении кручения. В данной главе рассматривается *кручение брусков круглого сечения*.

Возьмем круглый брус, заделанный одним концом (фиг. 6.1), и приложим в плоскости свободного торцевого сечения B пару сил с моментом $M_B = Pa$. Этот момент уравнивается реактивным моментом $M_A = M_B$, действующим на

брус со стороны закрепления в плоскости опорного сечения A . Эти два взаимно противоположных момента, деформируя брус, поворачивают поперечные сечения друг относительно друга на некоторый угол вокруг оси бруса x . Такая деформация бруса называется *деформацией кручения*.

Мы приложили одну пару сил на конце бруса. Можно приложить несколько пар в различных сечениях. Тогда реактивный



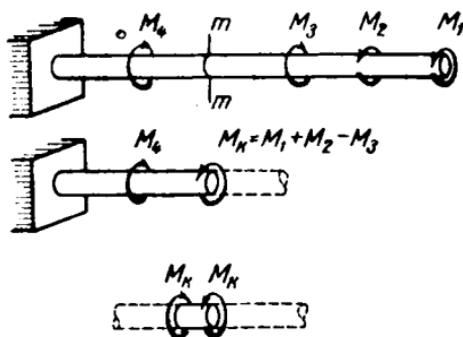
Фиг. 6.1. Кручение круглого бруса.

a — брус скручивается моментом, приложенным на конце B ; $б$ — крутящий момент в сечении бруса.

момент будет равняться алгебраической сумме моментов всех пар, приложенных к брусу. Можно, наконец, приложить к брусу несколько взаимно противоположных пар.

В дальнейшем нас не будут интересовать ни величина сил P , ни расстояние a между ними. Достаточно знать только величину момента пары $M_B = Pa$. Изображать его будем в виде кривой стрелки.

Крутящий момент. Если мысленно разрезать брус поперечным сечением C на две части (фиг. 6.1,б) и отбросить одну из них, например, правую, то действие этой части на оставшуюся левую часть нужно заменить моментом M_K , равным внешнему



Фиг. 6.2. К брусу приложено несколько моментов.

моменту Pa . Момент внутренних сил M_K , расположенный в плоскости поперечного сечения и заменяющий действие отброшенной части, называется *крутящим моментом в данном сечении*.

Рассматривая равновесие одной из частей, полученных после разреза бруса, например, равновесие правой части (фиг. 6.1,б), мы видим, что крутящий момент M'_K , заменяющий действие левой части, должен уравновешивать внешний момент Pa от нагрузки, приложенной к правой части, т. е. он должен равняться этому моменту и иметь противоположное направление.

В случае, когда к брусу приложено несколько моментов, действующих в различных сечениях, перпендикулярных оси бруса (фиг. 6.2), *крутящий момент в данном сечении равен алгебраической сумме моментов, приложенных по одну сторону от сечения*. Например, крутящий момент в сечении tt равен $M_K = M_1 + M_2 - M_3$. Если в этом месте выделить двумя смежными поперечными сечениями малый элемент бруса, то на него будут действовать два равных и взаимно противоположных момента M_K , заменяющих действие левой и правой отброшенных частей.

Деформация. Нанесем предварительно на поверхности бруса круглого сечения продольные прямые, параллельные его оси, и поперечные линии, которые являются окружностями, ле-

жащими в плоскостях, перпендикулярных оси (фиг. 6.3,а). Эти линии образуют на поверхности бруса сетку с прямоугольными клетками. Если теперь закрутить брус, приложив к нему крутящий момент M_k , то легко обнаружить следующее (фиг. 6.3,б):

1. Все продольные прямые наклонятся.

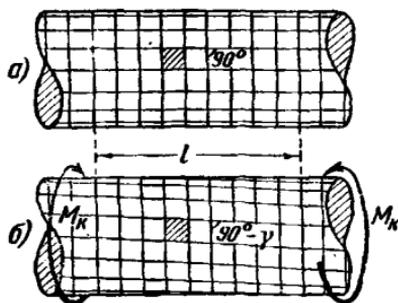
2. Все окружности останутся в первоначальных плоскостях, перпендикулярных оси.

3. Прямоугольные клетки получат перекося на один и тот же угол γ .

4. Длина бруса заметно не изменится, т. е. продольные удлинения волокон будут отсутствовать.

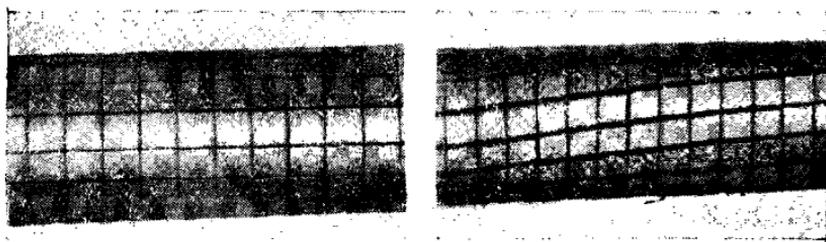
Если величина крутящего момента M_k будет достаточно малой, то после устранения нагрузки деформация исчезнет. Упругая деформация имеет место до определенного предела. Увеличивая момент M_k , можно превзойти этот предел. Тогда не вся деформация кручения будет исчезать и появится остаточная деформация.

На фиг. 6.4 приведены фотографии части круглого дуралюминового бруса до деформации и после того, как он получил остаточную деформацию кручения. Предварительно нанесенная на его поверхности прямоугольная сетка получила отчетливо выра-



Фиг. 6.3. Искажение сетки, нанесенной на поверхности круглого бруса.

а — сетка до закручивания — прямоугольная; б — изменение прямых углов после закручивания.



Фиг. 6.4. Фотографии дуралюминового круглого бруса до закручивания и после закручивания.

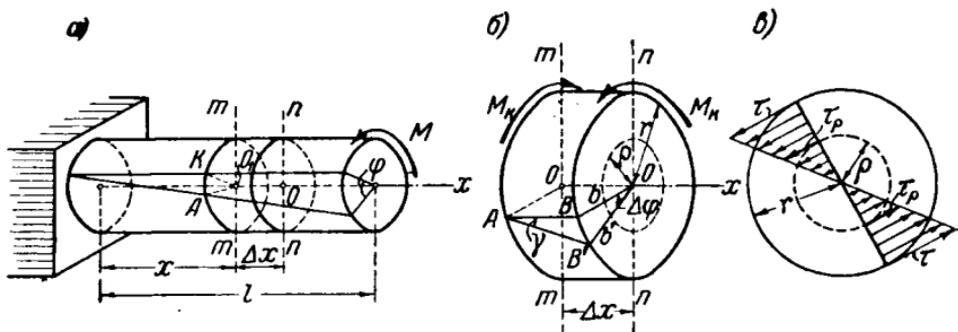
женные перекося. Упругая деформация имеет такой же точно характер, только ее величина значительно меньше и она почти не заметна для невооруженного глаза. Таким образом при кручении элементы бруса испытывают деформацию сдвига.

Как выше указано, из опытов с кручением круглого бруса установлено, что поперечные окружности, проведенные на на-

ружной поверхности бруса, остаются и после деформации в первоначальной плоскости, перпендикулярной к его оси.

Однако опыты не дают уверенности, что все точки внутри бруса, расположенные на плоскости поперечного сечения, останутся на этой плоскости и после закручивания. Это положение принимается как допущение, которое не может быть подтверждено непосредственно опытом.

Вследствие того, что при закручивании бруса продольные прямые наклоняются одинаково и прямоугольные клетки получают одинаковые перекосы, все точки поперечной окружности, проведенной по наружной поверхности, сдвинутся на одну и ту же



Фиг. 6.5. Деформации и напряжения круглого бруса при кручении.

a — угол закручивания φ ; b — связь угла закручивания с углом сдвига γ ; $в$ — эпюра касательных напряжений.

величину и вся окружность повернется как одно целое на угол φ , называемый *углом закручивания*. Следовательно, опыт показывает, что всякая точка K , взятая на поверхности бруса в произвольном сечении mn , после деформации переместится в новое положение A (фиг. 6.5). Но из опыта невозможно установить, останется ли прямым радиус O_1K при переходе его вследствие деформации в новое положение O_2A или он искривится. Невозможно провести этот радиус внутри бруса и наблюдать, как там происходит деформация кручения. Здесь также принимается допущение, не подтвержденное опытом, состоящее в том, что прямые радиусы, проведенные в плоскости сечения, принимаются прямыми и после деформации. Иначе говоря, поперечные сечения поворачиваются друг относительно друга как жесткие диски.

Таким образом в результате рассмотрения данных эксперимента в основу изучения явления кручения положены следующие предпосылки.

1. Плоские поперечные сечения после деформации остаются плоскими.

2. Первоначально прямые радиусы остаются прямыми и поворачиваются вместе с поперечным сечением.

3. Длина бруса не изменяется.

На основе принятых допущений в дальнейшем будут выведены формулы для определения напряжений и угла закручивания. Действительный угол закручивания, величину которого можно определить непосредственным измерением, почти не отличается от угла закручивания, вычисленного по формулам. Это подтверждает справедливость принятых допущений. Брус, работающий на кручение, часто называют «валом».

§ 2. Зависимость между напряжением и деформацией

Выделим из вала двумя поперечными сечениями mm и nn элементарный участок длиной Δx (фиг. 6. 5). Здесь буква Δ не является множителем; она указывает, что расстояние x весьма мало. Рассмотрим деформацию выделенного участка вала (фиг. 6. 5, б). Под действием крутящего момента M_k правое сечение nn повернется относительно левого на малый угол $\Delta \varphi$, который называется *абсолютным углом закручивания* участка вала длиной Δx . Произвольная точка B на поверхности вала сдвинется относительно точки A в плоскости сечения nn по дуге окружности с радиусом r в новое положение B' . Радиус $OB=r$ повернется вместе с сечением на угол $\Delta \varphi$ в положение OB' , оставаясь прямым согласно принятому допущению. Смещение точки B будет равно длине дуги $\overset{\frown}{BB'}=r\Delta \varphi$.

Все другие точки радиуса OB также переместятся и опишут дуги, длины которых будут пропорциональны их расстояниям от центра O . Все точки сечения, расположенные на любой окружности с радиусом ρ , получают смещения в плоскости сечения на одну и ту же величину $bb'=\rho \cdot \Delta \varphi$ (фиг. 6. 5, б). Здесь угол $\Delta \varphi$ измеряется не в градусах, а в радианах. Соответствующие элементы вала получают абсолютные сдвиги, пропорциональные их расстояниям от центра.

При деформации сдвига появляются касательные напряжения, направление которых совпадает с направлением сдвига, т. е. в данном случае перпендикулярно к радиусу. Обозначим эти напряжения через τ_ρ . Величина их пропорциональна сдвигам и будет одинаковой для всех точек данной окружности. Для других окружностей касательные напряжения будут другими, и по длине радиуса их величина будет изменяться пропорционально радиусу ρ .

Перейдем к определению величины напряжения. При смещении точки B в положение B' прямая AB , проведенная параллельно оси вала x , наклонится на угол γ и займет новое положение AB' (фиг. 6. 5, б). Угол γ соответствует *относительному сдвигу*.

Вследствие малости угла закручивания дугу $\overset{\frown}{BB'}$ можно заменить хордой и угол γ , измеряемый в радианах, принять равным

$$\gamma = \frac{BB'}{AB} = \frac{BB'}{\Delta x}.$$

Относительному сдвигу соответствуют касательные напряжения по закону пропорциональности [гл. V, формула (2)]

$$\tau = G\gamma$$

и в точке B они равны $\tau = G \frac{BB'}{\Delta x}$.

Подставим $BB' = r\Delta\varphi$. Тогда

$$\tau = G \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} r.$$

Напряжения τ_ρ в точках других окружностей с переменным расстоянием ρ от центра пропорциональны смещению этих точек и относятся к τ как их расстояния до центра.

$$\frac{\tau_\rho}{\tau} = \frac{bb'}{BB'} = \frac{\rho}{r} \quad \text{или} \quad \tau_\rho = \tau \frac{\rho}{r}.$$

Подставляя сюда значение τ , получаем

$$\tau_\rho = G \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \rho. \quad (1)$$

Напряжения τ_ρ в любой точке сечения пропорциональны модулю сдвига G , отношению $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ и расстоянию ρ от центра сечения. Величина $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ является углом закручивания, приходящимся на единицу длины вала, и называется *относительным или погонным углом закручивания*. В дальнейшем будем его обозначать $\vartheta = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$. Он имеет размерность $\frac{1}{\text{см}}$. Тогда

$$\tau_\rho = G\vartheta\rho \quad (1')$$

Для всех точек данного сечения погонный угол закручивания точно так же, как и модуль упругости G , имеет постоянное значение. Следовательно, *касательные напряжения при кручении изменяются в сечении круглого бруса пропорционально изменению расстояния ρ от центра и направлены перпендикулярно радиусу*. В центре бруса при $\rho=0$ они равны нулю. Наибольшей величины напряжения достигают в крайних точках сечения, при $\rho=r$, т. е. в точках окружности, совпадающей с поверхностью вала. На фиг. 6. 5, в приведена диаграмма, показывающая, как изменяются напряжения по сечению, от точки к точке вдоль радиуса. Она называется *эпюрой касательных напряжений при кручении круглого бруса*.

§ 3. Относительный угол закручивания

Действие одной части вала на другую часть (см. фиг. 6. 1, б) осуществляется внутренними силами взаимодействия, возникающими между частицами тела. Этими силами в поперечном сече-

нии при кручении являются только касательные силы, расположенные в плоскости сечения и приводящиеся к паре сил. Условие равновесия каждой части вала требует, чтобы сумма моментов всех элементарных касательных сил равнялась крутящему моменту M_k в данном сечении (фиг. 6. 6,а). Последнее условие дает возможность установить зависимость между относительным углом закручивания и крутящим моментом.

Определим момент, создаваемый касательными напряжениями, распределенными по всей площади сечения, равной F . Если около произвольной точки сечения на расстоянии ρ от центра взять малую (как говорят, элементарную) площадку ΔF (фиг. 6. 6,б), то касательные напряжения τ_ρ для всех точек этой площадки можно считать одинаковыми. Касательная сила, действующая на элементарную площадку, будет равна $\tau_\rho \Delta F$. Она создаст относительно оси x , проходящей перпендикулярно сечению в центре O , элементарный момент $\Delta M = \tau_\rho \Delta F \rho$.

Сумма моментов ΔM дает величину крутящего момента (фиг. 6. 6,а)

$$\sum_F \Delta M = \sum_F \tau_\rho \rho \Delta F = M_k.$$

Индекс F у знака суммы показывает, что она распространяется на всю площадь сечения¹.

Подставим сюда значение τ_ρ по формуле (1)

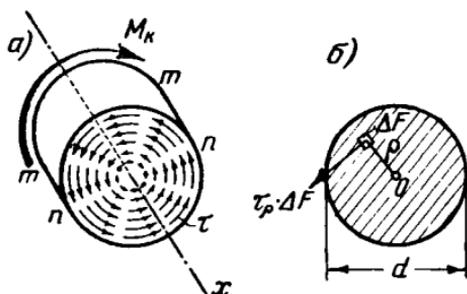
$$\sum_F G \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \rho^2 \Delta F = M_k$$

и вынесем за знак суммы общий множитель $G \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$, который является постоянным для всего сечения:

$$G \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \sum_F \rho^2 \Delta F = M_k.$$

Отсюда

$$\vartheta = \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \frac{M_k}{G \sum_F \rho^2 \Delta F}.$$



Фиг. 6. 6. Связь между крутящим моментом и касательными напряжениями.

а — равновесие элемента бруса при кручении; б — момент элементарной касательной силы в сечении относительно оси бруса.

¹ Более подробно о суммах см. ниже в § 5.

Введем обозначение

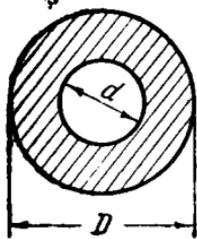
$$\sum_F \rho^2 \Delta F = J_p. \quad (2)$$

Сумма произведений элементарных площадок ΔF на квадраты их расстояний до полюса, взятая для всего сечения, называется полярным моментом инерции площади J_p .

Принимая во внимание обозначение (2), окончательно получаем

$$\vartheta = \frac{M_k}{GJ_p}. \quad (3)$$

Произведение модуля упругости и полярного момента инерции GJ_p называется жесткостью при кручении круглого бруса. Таким образом относительный угол закручивания пропорционален крутящему моменту и обратно пропорционален жесткости.



Фиг. 6.7. Сечение полого вала.

Остановимся несколько подробнее на величине GJ_p . Она названа жесткостью потому, что отражает влияние на деформируемость бруса, с одной стороны, упругих свойств материала, которые характеризуются модулем упругости G , и с другой — влияние размеров и формы поперечного сечения, от которых зависит полярный момент инерции. Чем больше модуль упругости, тем меньше угол закручивания. Например, стальной вал труднее закрутить, чем вал тех же размеров, изготовленный из меди.

Полярный момент инерции является геометрической величиной. Он имеет размерность длины в четвертой степени ($см^4$) и характеризует расположение материала в сечении. При одной и той же площади, но при расположении материала дальше от центра, сечение будет иметь больший J_p [формула (2)], а следовательно, меньший угол закручивания. Формула для вычисления J_p выводится ниже (§ 6); здесь она дается без вывода.

Для сплошного круглого сечения (фиг. 6.6,б) с диаметром d полярный момент инерции равен

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (4)$$

В практических расчетах можно принять приближенное значение и считать $J_p \approx 0,1d^4$.

Для полого вала с наружным диаметром D и внутренним d (фиг. 6.7) полярный момент инерции вычисляется как разность между полярными моментами инерции большого и малого круга

$$J_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}.$$

Если вынести D за скобки и обозначить $\frac{d}{D} = \alpha$, то формула полярного момента инерции полого вала получает вид

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D^4 (1 - \alpha^4). \quad (5)$$

Пример 1. Сравнить величину полярного момента инерции полого и сплошного валов при одинаковой площади поперечного сечения, если отношение диаметров полого вала $\alpha = \frac{d}{D} = \frac{1}{2}$.

Выразим наружный диаметр D через диаметр сплошного вала d_c при условии равенства площадей

$$\frac{\pi d_c^2}{4} = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2),$$

откуда $d_c^2 = D^2 (1 - \alpha^2) = D^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)$ или $D = \frac{2}{\sqrt{3}} d_c$. Подставляя этот диаметр в формулу (5), получим для полого вала

$$J_p = \frac{\pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} d_c\right)^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{16 \pi d_c^4}{9 \cdot 32} \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{3} J_p.$$

Полярный момент инерции полого вала при $\alpha = \frac{1}{2}$ превосходит полярный момент инерции сплошного вала той же площади поперечного сечения в $\frac{5}{3}$ раза. Это происходит потому, что в первом случае материал расположен дальше от центра сечения.

Задачи. 1. Стальной круглый стержень диаметром $d = 2$ см скручивается моментом $M = 2000$ кг см. Определить погонный угол закручивания. Модуль упругости $G = 800\,000$ кг/см².

Ответ: Угол закручивания равен $5'28'' \frac{1}{см}$.

2. Круглый стальной брус скручивается моментом $M = 150$ кгм. Какой крутящий момент нужно приложить к такому же дуралюминовому брусу, чтобы их углы закручивания были одинаковыми. Для стали $G_c = 840\,000$ кг/см², для дуралюмина $G_d = 280\,000$ кг/см².

Ответ: $M_d = 50$ кгм.

3. Определить диаметр стального трансмиссионного вала, при котором его относительный угол закручивания будет равен углу закручивания дуралюминового вала диаметром $d_d = 5$ см, если крутящие моменты у обоих валов одинаковы. *Ответ:* $d_c = 3,8$ см.

§ 4. Напряжения при кручении

Касательные напряжения в поперечном сечении. Теперь можно обратиться к выводу формул для касательных напряжений. Вернемся к выражению (1)

$$\tau_\rho = G \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \rho = G\delta\rho$$

и подставим в него найденный нами погонный угол закручивания по формуле (3). Тогда для *касательных напряжений* получаем

$$\tau_\rho = \frac{M_k}{J_p} \rho. \quad (6)$$

Здесь отношение $\frac{M_k}{J_p}$ постоянно для данного сечения, а расстояние ρ от центра переменное. В центре касательные напряжения равны нулю. В остальных точках сечения они тем больше, чем дальше от центра расположена точка (фиг. 6.5, в).

Наибольшей величины касательные напряжения достигают в крайних точках сечения, наиболее удаленных от центра, для которых $\rho = \rho_{\max} = r$, и, следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{J_p} r.$$

Эту формулу можно переписать в следующем виде:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{\frac{J_p}{r}}.$$

Здесь знаменатель имеет определенное значение и его обычно обозначают

$$W_p = \frac{J_p}{r}. \quad (7)$$

Частное от деления полярного момента инерции на наружный радиус сечения называется моментом сопротивления кручению круглого сечения.

Принимая во внимание обозначение (7), получаем, что

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}. \quad (8)$$

Наибольшие касательные напряжения при кручении равны крутящему моменту, деленному на момент сопротивления кручению. Они имеют место в точках, расположенных на окружности, ограничивающей поперечное сечение, и направлены перпендикулярно радиусам (фиг. 6.5, в).

Момент сопротивления имеет размерность $см^3$ и характеризует сопротивляемость вала действию крутящей нагрузки. Чем он больше, тем меньше будут касательные напряжения и тем больший крутящий момент выдерживает вал. Подставляя в формулу (7) значение J_p по формуле (4), находим

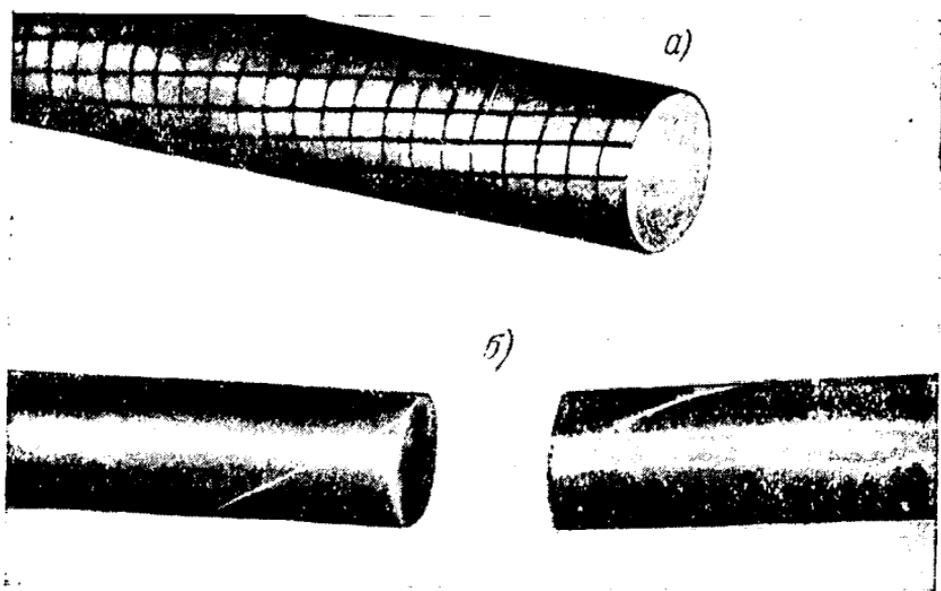
$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32 \frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} \quad (9)$$

или приближенное значение $W_p \approx 0,2d^3$.

Точно так же можно получить момент сопротивления полого вала, у которого расстояние до крайних точек $\rho_{max} = \frac{D}{2}$ (фиг. 6.7).

Принимая во внимание выражение полярного момента инерции полого вала [формула (5)], найдем момент сопротивления

$$W'_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3 (1 - \alpha^4). \quad (9')$$



Фиг. 6.8. Разрушение при кручении.

a — гладкая поверхность разрушения дуралюминового вала (показана только одна половина разрушенного вала); *б* — разрушение стального вала.

Если увеличивать крутящую нагрузку, то вал в конце концов разрушится. Разрушение валов, изготовленных из пластичных материалов, таких, как сталь или дуралюмин, происходит по сечению, строго перпендикулярному оси вала. Пластичные материалы разрушаются от касательных напряжений, которые воз-

никают при кручении именно в поперечных сечениях. Особенно характерна картина разрушения дуралюминовых валов. Их поперечные сечения в месте разрушения имеют совершенно гладкую поверхность, как будто вал распилен на две части. Поверхность разрушения стального вала менее гладкая, что объясняется структурой стали. На фиг. 6. 8, *a* и *б* показаны фотографии дуралюминового и стального образцов круглого сечения после их разрушения от крутящей нагрузки. На образцах предварительно были нанесены продольные риски, которые обратились в винтовые линии.

Пример 1. Носок вала мотора имеет сплошное сечение диаметра $d=6$ см. На конце носка передается от винта крутящая нагрузка с моментом $M=0,25$ тм, как показано на фиг. 6. 5, *a*. Определить наибольшие касательные напряжения в сечении носка.

Крутящий момент в любом сечении равен моменту M . Так как напряжения обычно выражаются в $кг/см^2$, выразим величину M в $кгсм$. Получим $M_k=0,25$ тм = 25 000 $кгсм$.

Вычислим момент сопротивления

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 6^3}{16} = 42,4 \text{ см}^3.$$

Искомые напряжения [формула (8)] равны

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{25\,000}{42,4} = 590 \text{ кг/см}^2.$$

Они возникают в крайних точках. Для других точек напряжения меньше и убывают по прямой до нуля в центре сечения, как это следует по формуле (6).

Пример 2. Построим эпюру касательных напряжений, возникающих в сечении передаточного вала AB рулевого управления самолета. Сила $P=50$ кг передается от ножной педали на качалку на расстоянии $r=20$ см от оси вала (фиг. 6. 9, *a*). Наружный диаметр вала $D=3,6$ см, а внутренний — $d=2,0$ см.

Для построения эпюры воспользуемся формулой (6). Крутящий момент $M_k = Pr = 50 \cdot 20 = 1000$ $кгсм$.

Полярный момент инерции трубы вычисляем по формуле (5), принимая во внимание, что $\alpha = \frac{d}{D} = \frac{5}{9}$:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{3,14 \cdot 3,6^4}{32} \left[1 - \left(\frac{5}{9} \right)^4 \right] = 14,92 \text{ см}^4.$$

Напряжения у наружной поверхности трубы, т. е. в крайних точках сечения, для которых $\rho=1,8$ см, получаем

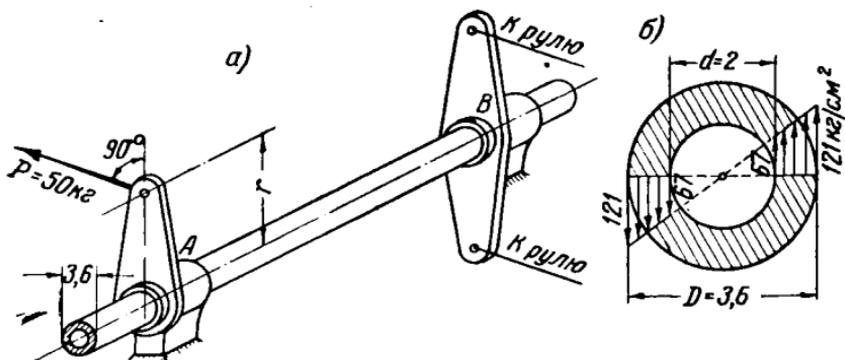
$$\tau_1 = \frac{M_k}{J_p} \rho = \frac{1000}{14,92} \cdot 1,8 = 121 \text{ кг/см}^2.$$

У внутренней поверхности, при $\rho = 1$ см, они равны

$$\tau_2 = \frac{1000}{14,92} 1 = 67 \text{ кг/см}^2.$$

Вдоль радиуса касательные напряжения изменяются по прямой. Их эпюра показана на фиг. 6. 9,б.

Касательные напряжения в продольном сечении. При кручении возникают касательные напряжения и в продольных сечениях вала. Это обуславливается законом парности касательных напряжений, который гласит, что если в какой-нибудь площадке возникает касательное напряжение τ , то в



Фиг. 6. 9. Передаточный вал рулевого управления самолета.

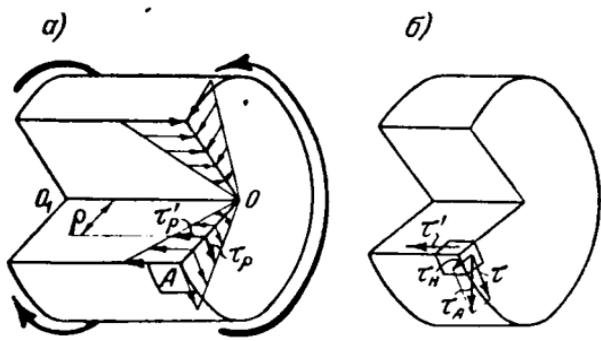
а — скручивание вала моментом $M = Pr$; б — эпюра касательных напряжений в сечении вала.

площадке, ей перпендикулярной, обязательно должно возникнуть касательное напряжение τ' , причем составляющие этих напряжений, перпендикулярные линии пересечения площадок, равны по величине и обратны по знаку. В нашем случае, если продольную площадку взять в радиальном сечении, то напряжения в ней будут равны напряжениям в поперечном сечении.

Наглядное представление об этих напряжениях дает фиг. 6. 10,а. В продольных радиальных сечениях на основании закона парности появляются касательные напряжения $\tau'_\rho = \tau_\rho$, которые представляют собой силы взаимодействия между вырезанным сектором и оставшейся частью вала.

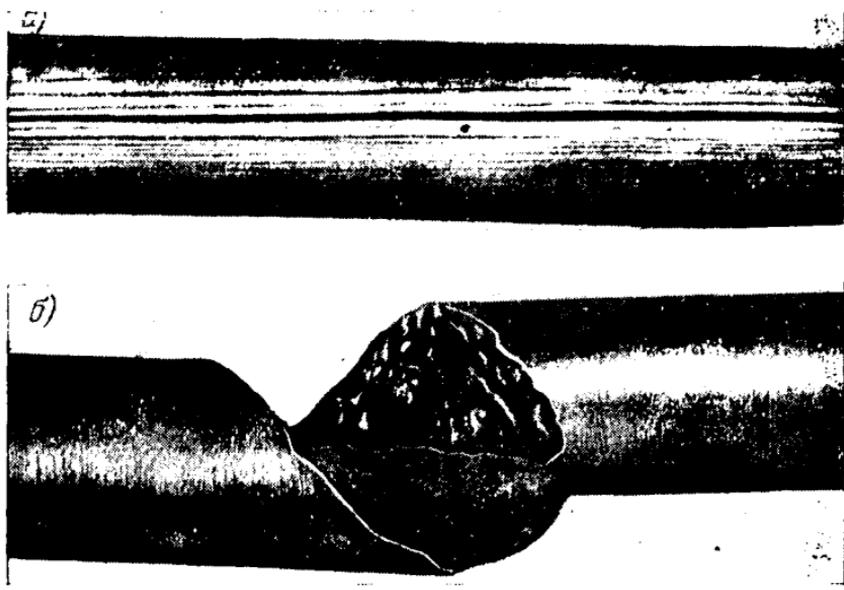
Наличие касательных напряжений в продольном направлении подтверждается разрушением при кручении деревянных образцов. Как известно, дерево обладает волокнистой структурой и вдоль волокон легко скалывается от незначительных касательных напряжений. При кручении деревянного бруса, волокна которого параллельны оси кручения, разрушение его происходит вследствие продольных трещин. Они появляются от касательных напряжений τ' , возникающих в продольных сечениях и стремящихся вызвать сдвиг вдоль волокон. На фиг. 6. 11,а показан ха-

актер разрушения круглого деревянного образца при кручении, где ясно видны волокна и продольная трещина, образовавшаяся при скручивании. Если выточить деревянный брус с направле-



Фиг. 6.10. Касательные напряжения в продольном сечении.

a — распределение касательных напряжений в продольном сечении; *б* — направление : у наружной поверхности вала.



Фиг. 6.11. Разрушение при кручении.

a — деревянный образец разрушается вдоль волокон от касательных напряжений в продольных сечениях; *б* — чугунный образец разрушается от главных нормальных напряжений в наклонных сечениях.

нием волокон перпендикулярно оси кручения, то он будет разрушаться в поперечном направлении.

Здесь уместно отметить, что полные касательные напряжения τ в крайних точках поперечного сечения всегда направле-

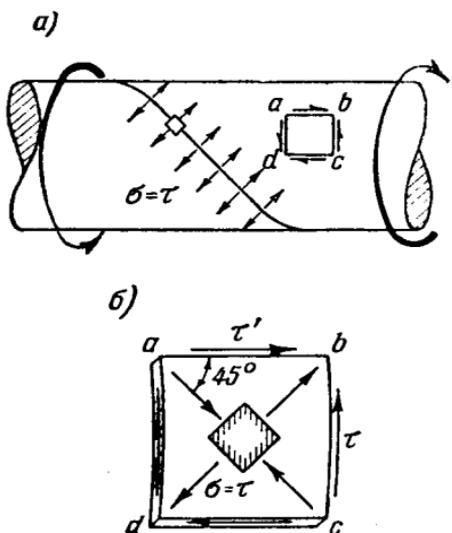
ны по касательной к линии, ограничивающей сечение. Предположим, что напряжение τ_A у края поперечного сечения было бы направлено не по касательной к наружной поверхности, а под углом к ней (фиг. 6.10,б). Тогда его можно разложить на две составляющие: τ — параллельно касательной к наружной поверхности и τ_n — перпендикулярно к ней. Первой составляющей по закону парности отвечает касательное напряжение τ' в продольном сечении; второй составляющей τ_n должно отвечать касательное напряжение на наружной поверхности.

Но по условию наружная поверхность свободна от напряжений, следовательно не может существовать и составляющая τ_n , иначе не будет соблюдаться закон парности касательных напряжений. Следовательно, напряжение τ_A в любой точке у края сечения должно быть направлено только по касательной к очертанию сечения, чтобы не создавать составляющей τ_n . Это обстоятельство особенно нужно иметь в виду при изучении кручения стержней некруглого сечения и изгиба.

Нормальные напряжения при кручении. В поперечном сечении круглого бруса нормальные напряжения отсутствуют. На это указывает то, что длина бруса не изменяется и отдельные продольные волокна не получают удлинений. В поперечном направлении, т. е. по длине окружности, также нет никаких удлинений: квадраты, образованные на поверхности бруса, обращаются в ромбы без изменения длины их сторон (фиг. 6.3). В продольных сечениях нормальные напряжения также отсутствуют.

Вследствие перекоса квадратов их диагонали изменяют свою длину: одна диагональ увеличивается, а другая уменьшается. Это значит, что при *кручении в наклонных сечениях бруса возникают нормальные напряжения.*

В самом деле, если вырезать из круглого бруса тонкую пластинку $abcd$ (фиг. 6.12,а), ограниченную двумя поперечными и двумя продольными разрезами, то по боковым граням на нее будут действовать только напряжения τ и τ' , одинаковые по величине и противоположные по направлению. На фиг. 6.12,б вы-



Фиг. 6.12. Нормальные напряжения при кручении.

а — нормальные растягивающие напряжения в наклонном сечении;
б — связь между касательными и нормальными напряжениями.

резанная пластинка показана в увеличенном масштабе. Она находится в условиях чистого сдвига.

Как было установлено ранее (гл. V, § 1, фиг. 5. 1,в), в таком случае в наклонных площадках возникают нормальные напряжения, имеющие при наклоне в 45° к граням элемента наибольшую величину, равную касательным напряжениям. Квадратные пластинки, вырезанные площадками, повернутыми на 45° , будут в одном направлении сжиматься, а в другом растягиваться нормальными напряжениями $\sigma = \tau$. Последние стремятся разорвать вал по наклонной линии (фиг. 6. 12,а). Это подтверждается тем, что валы, изготовленные из хрупких материалов, плохо работающих на растяжение, например, из чугуна, разрушаются от разрыва по сечениям, наклоненным на 45° к оси (фиг. 6. 11,б).

Таким образом крутящий момент вызывает в поперечных и продольных сечениях касательные напряжения, а в наклонных сечениях — нормальные. Максимальные напряжения при кручении возникают у поверхности вала, где они равны крутящему моменту, деленному на момент сопротивления.

Задачи. 1. При испытании на разрыв чугуна было установлено, что его предел прочности $\sigma_{\text{пр}} = 2200 \text{ кг/см}^2$. Определить крутящий момент, при котором следует ожидать разрушение при кручении круглого чугунного стержня диаметром $d = 4 \text{ см}$. При решении принять, что распределение напряжений остается неизменным до разрушения.

Ответ: $M = 264 \text{ кгм}$.

2. Труба с наружным диаметром $D = 8 \text{ см}$ и толщиной стенки $t = 0,8 \text{ см}$ выполнена из двух полукруглых половинок, соединенных между собой продольными сварными швами. Найти максимальные напряжения в швах трубы от крутящего момента $M = 7000 \text{ кгсм}$.

Ответ: $\tau_{\text{шва}} = 202 \text{ кг/см}^2$.

3. К валу диаметром $d = 10 \text{ см}$ приложен крутящий момент $M = 1000 \text{ кгм}$. Определить напряжение в точках поперечного сечения, расположенных на расстоянии $1,5 \text{ см}$ от поверхности вала.

Ответ: $\tau_p = 356 \text{ кг/см}^2$.

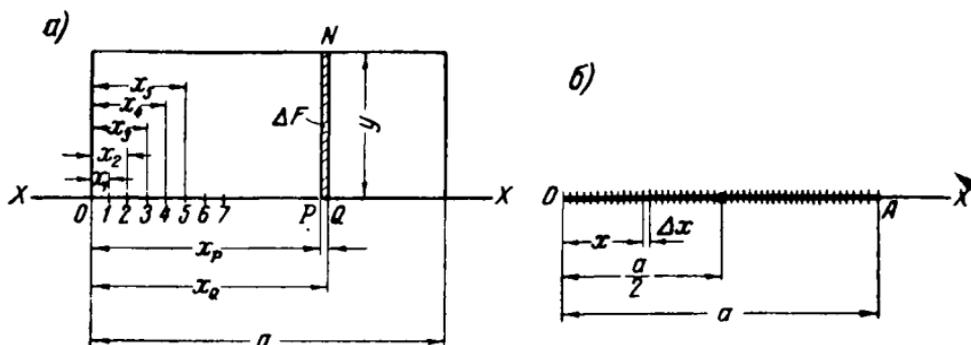
§ 5. Вычисление сумм

Настоящий параграф содержит вспомогательный материал, необходимый для вычисления таких величин, как полярный момент инерции, который представляет собой сумму произведений длины в квадрате и элементарной площадки. В дальнейшем нам часто придется встречаться с суммами вида

$$\sum_0^a x^n \Delta x = x_1^n \Delta x + x_2^n \Delta x + x_3^n \Delta x + \dots$$

Числовые значения x всегда можно представить в виде расстояний, измеренных на прямой $X-X$ от какой-нибудь точки O , принятой за начало отсчета (фиг. 6.13,а). В одну сторону от начала O (например, вправо) они считаются положительными, а в другую — отрицательными.

Множитель Δx представляет собой очень малую разность между любыми двумя смежными значениями x ; например, весьма малый отрезок прямой $X-X$, заключенный между двумя смежными точками P и Q , для которых расстояние x соответственно равно x_p и x_q , т. е. $\Delta x = x_q - x_p$. Если это равенство пере-



Фиг. 6.13. К вычислению сумм $\sum_0^a x^n \Delta x$.

а — значения x и Δx на числовой прямой; б — отрезок OA в виде суммы частиц Δx .

писать в таком виде: $x_p + \Delta x = x_q$, то Δx можно рассматривать как *приращение* x при переходе от точки P к точке Q .

Разность Δx остается величиной неопределенной; единственное требование, которому она должна удовлетворять, состоит в том, что она должна быть малой, чтобы по сравнению со значением x величиной Δx можно было пренебрегать; например, расстояние до начала отрезка Δx считать равным расстоянию до его середины или до его конца.

Если любую величину умножить на разность Δx , то полученное произведение будет также малым; например, перпендикуляр $QN = y$, умноженный на Δx , дает площадку $\Delta F = y \Delta x$, малую сравнительно с площадью $F = yx$.

Верхний индекс a и нижний 0 у знака суммы показывают, что величина x должна иметь все промежуточные значения, начиная от $x=0$ до $x=a$, или, как говорят, сумма вычисляется в пределах от 0 до a . Если пределы суммирования очевидны, то иногда индексы опускаются.

Мы будем рассматривать суммы, в которых показатель степени n равен нулю или целому числу, т. е. $n=0, 1, 2, 3, \dots$. Вычисление сумм начнем с простейшего случая, когда $n=0$.

$\sum_0^a \Delta x$. Если в написанное вначале развернутое выражение сумм подставим $n=0$, то, замечая, что любое число в нулевой степени равно 1, получим сумму разностей между всеми смежными значениями x . Совершенно очевидно, что сумма всех разностей Δx в пределах от 0 до a , т. е. сумма всех очень малых частиц, на которые можно разбить отрезок OA (фиг. 6. 13,б), будет равна a , что записывается в следующем виде:

$$\sum_0^a x^0 \Delta x = \sum_0^a \Delta x = a. \quad (10)$$

Число членов суммы зависит от величины Δx ; чем меньше Δx , тем больше членов содержит сумма. Нужно помнить, что Δx является малым приращением переменной величины x , все значения которой заключены в пределах от 0 до a .

$\sum_0^a x \Delta x$. Здесь $n=1$. Представим себе, что отрезок OA (фиг. 6. 13,б) имеет вес a , т. е. вес единицы его длины равен 1. Статический момент весомого отрезка относительно точки O , как известно, равен его весу, умноженному на расстояние от точки O до центра тяжести, расположенного по середине:

$$S = 1a \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Разобьем отрезок OA на большое число частиц длиной Δx и, следовательно, весом $1 \Delta x$. Каждая частица будет давать относительно точки O элементарный статический момент $\Delta S = x \Delta x$. Вследствие малости приращения Δx расстояние до его начала можно считать равным расстоянию до его середины.

Сумма всех элементарных статических моментов от 0 до a даст величину статического момента весомого отрезка OA :

$$S = \sum_0^a x \Delta x.$$

Приравнивая полученные выражения статического момента, можно написать, что

$$\sum_0^a x \Delta x = \frac{a^2}{2}. \quad (11)$$

Может быть и другой подход к вычислению этой суммы. Например, построим на прямой OX прямоугольный треугольник OAB , основание и высота которого численно равны a (фиг. 6. 14). Тогда все значения x от 0 до a являются катетами подобных треугольников OCD . Приращение Δx представим в виде малого отрезка, середина которого совпадает с текущей точкой C .

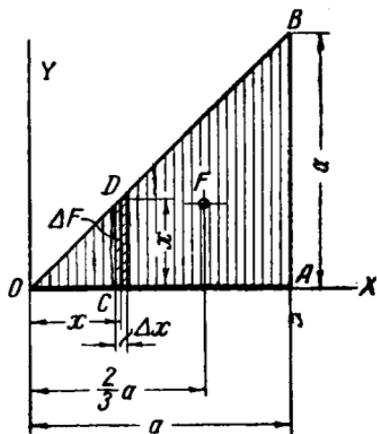
Произведение $x\Delta x$ будет равно малой площадке ΔF , а их сумма в пределах от 0 до a —площади треугольника OAB :

$$\sum_0^a x\Delta x = \sum_0^a \Delta F = F$$
, которая в свою очередь равна произведению из основания и половины высоты, $F = a \frac{a}{2}$. Таким образом снова получаем формулу (11)

$$\sum_0^a x\Delta x = \frac{a^2}{2}.$$

$\sum_0^a x^2\Delta x$. Эту сумму можно вычислить как статический момент площади $\triangle OAB$ относительно вертикальной оси OY (фиг. 6.14). В самом деле, статический момент элементарной площадки относительно этой оси равен $\Delta S = x\Delta F = x \cdot x\Delta x = x^2\Delta x$. Их сумма в пределах от 0 до a дает величину статического момента всей площади $\triangle OAB$:

$$S = \sum \Delta S = \sum_0^a x^2\Delta x.$$



Фиг. 6.14. $\sum_0^a x\Delta x$ равна площади $\triangle OAB$.

Известно, что статический момент треугольника равен его площади, умноженной на расстояние от центра тяжести до оси:

$$S = F \frac{2}{3} a = \frac{a^2}{2} \frac{2}{3} a = \frac{a^3}{3}.$$

Следовательно, искомая сумма будет

$$\sum_0^a x^2\Delta x = \frac{a^3}{3}. \quad (12)$$

С другой стороны, ее можно представить как объем пирамиды, имеющей высоту $OA = a$ и квадратное основание $ABCD$ со сторонами a (фиг. 6.15; для более ясного представления следует взглянуть на нее справа). Объем пирамиды равен ее основанию, умноженному на одну треть высоты:

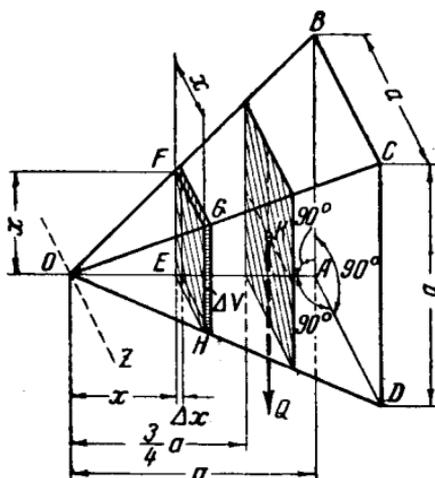
$$V = a^2 \frac{a}{3} = \frac{a^3}{3}.$$

Чтобы выразить его в виде суммы, разрежем пирамиду плоскостями, параллельными основанию, на большое число очень тонких квадратных пластинок с толщиной Δx . Каждая пластинка

ка, взятая на расстоянии x от вершины, будет иметь площадь $EFGH$, равную x^2 , и объем $\Delta V = x^2 \Delta x$. Суммируя пластинки на всей длине OA , получим объем пирамиды в виде суммы

$$\sum_0^a x^2 \Delta x = V = \frac{a^3}{3}.$$

$\sum_0^a x^3 \Delta x$. Эта сумма вычисляется как статический момент объема четырехгранной пирамиды $OABCD$ (фиг. 6.15) относительно оси OZ , перпендикулярной плоскости $\triangle OAB$. Он равен объему пирамиды, умноженному на расстояние его центра тяжести до оси. Объем пирамиды $V = \frac{a^3}{3}$. Центр тяжести пирамиды находится на расстоянии $\frac{3}{4}a$ от вершины O . Следовательно, статический момент пирамиды будет



$$S = V \frac{3}{4} a = \frac{a^3}{3} \frac{3}{4} a = \frac{a^4}{4}.$$

Выразим его в виде суммы, разрезав пирамиду на тонкие пластинки, параллельные основанию. Каждая пластинка имеет объем $\Delta V = x^2 \Delta x$, и ее статический момент относительно оси OZ равен $\Delta S = \Delta V x = x^3 \Delta x$.

Фиг. 6.15. $\sum_0^a x^2 \Delta x$ равна объему пирамиды $OABCD$.

Суммируя в пределах от 0 до a , получаем

$$S = \sum \Delta S = \sum_0^a x^3 \Delta x.$$

Приравнивая статический момент пирамиды его выражению в виде суммы, находим, что

$$\sum_0^a x^3 \Delta x = \frac{a^4}{4}. \quad (13)$$

Таким образом вычислены следующие суммы:

$$\sum_0^a \Delta x = \sum_0^a x^0 \Delta x = \frac{a}{1} = a; \quad (10)$$

$$\sum_0^a x \Delta x = \sum_0^a x^1 \Delta x = \frac{a^2}{2}; \quad (11)$$

$$\sum_0^a x^2 \Delta x = \frac{a^3}{3}; \quad (12)$$

$$\sum_0^a x^3 \Delta x = \frac{a^4}{4}. \quad (13)$$

Выявляется определенная закономерность в образовании этих сумм. Она состоит в том, что степень величины a в ответе на единицу выше степени переменной величины x и знаменатель ответа всегда равен показателю степени при a .

Распространяя эту закономерность на любую степень n , можно сказать, что сумма переменных величин x в степени n , умноженных на их приращения Δx , взятая в пределах от 0 до a , равна верхнему пределу a в степени $n+1$, деленному на $n+1$. Общая формула для таких сумм имеет вид

$$\sum_0^a x^n \Delta x = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

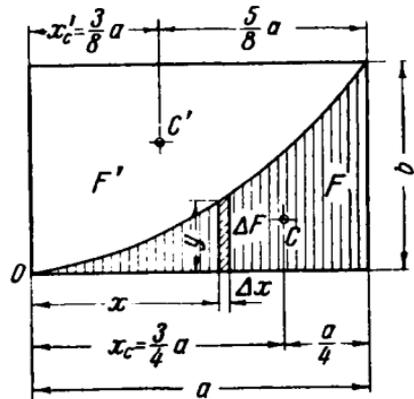
Пример 1. В качестве примера применения полученных формул определим площадь и положение центра тяжести фигуры, ограниченной координатами a и b и кривой, любая ордината которой равна $y = \frac{b}{a^2} x^2$. Такая кривая называется параболой 2-й степени (фиг. 6.16).

Разобьем данную фигуру в виде вогнутого параболического треугольника вертикальными прямыми на ряд элементарных площадок; каждая из них будет $\Delta F = y \Delta x = \frac{b}{a^2} x^2 \Delta x$. Суммируя площадки в пределах от 0 до a и принимая во внимание, что $\frac{b}{a^2}$ можно вынести за знак суммы как общего множителя, найдем

$$F = \sum \Delta F = \frac{b}{a^2} \sum x^2 \Delta x.$$

При помощи формулы (12) получаем

$$F = \frac{b}{a^2} \frac{a^3}{3} = \frac{ab}{3}.$$



Фиг. 6.16. Вычисление площади параболического треугольника и положения его центра тяжести.

Площадь, ограниченная вогнутой параболой 2-й степени, равна одной трети основания a , умноженного на высоту b . Расстояние центра тяжести от начала O равно статическому моменту относительно O , деленному на площадь (см. гл. I), $x_c = \frac{S_0}{F}$. Статический момент выражаем в виде суммы

$$S_0 = \sum x \Delta F = \frac{b}{a^2} \sum_0^a x^3 \Delta x,$$

откуда по формуле (13) получаем:

$$S_0 = \frac{b}{a^2} \frac{a^4}{4} = \frac{a^2 b}{4}.$$

Подставляем его и площадь F в формулу для центра тяжести и находим:

$$x_c = \frac{a^2 b}{4} \frac{3}{ab} = \frac{3}{4} a.$$

На фиг. 6.16 обведена площадь F' выпуклого параболического треугольника с такими же основанием a и высотой b ; она дополняет площадь F до прямоугольника, и поэтому площадь, ограниченная выпуклой параболой 2-й степени, равна двум третям основания, умноженного на высоту:

$$F' = \frac{2}{3} ab.$$

Расстояние центра тяжести x'_c найдем, исходя из того, что статический момент площади прямоугольника равен сумме статических моментов площадей F и F' относительно того же начала:

$$ab \frac{a}{2} = F x_c + F' x'_c.$$

Отсюда

$$x'_c = \frac{3}{2ab} \left(\frac{a^2 b}{2} - \frac{ab}{3} \frac{3}{4} a \right) = \frac{3}{8} a.$$

Расстояние до другого края равно $\frac{5}{8} a$.

§ 6. Полярный момент инерции

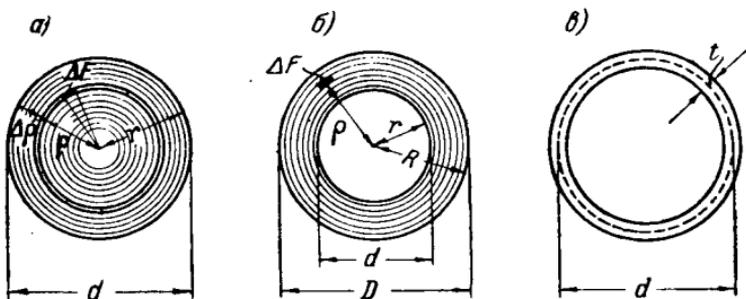
Теперь можно вывести формулу полярного момента инерции, приведенную нами в § 3 без доказательства. Полярным моментом инерции мы назвали сумму произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до центра [формула (2)]:

$$J_p = \sum \rho^2 \Delta F.$$

Чтобы вычислить эту сумму, разобьем круглое сечение вала на большое число тонких концентрических колец с очень малой

шириной $\Delta\rho$, измеряемой в направлении радиуса, и выделим в пределах одного такого кольца двумя радиальными сечениями элементарную площадку ΔF (фиг. 6.17,а). Затем просуммируем произведения $\rho^2\Delta F$ сначала в пределах одной кольцевой площадки радиуса ρ , а потом сложим полученные величины для всех кольцевых площадок, на которые можно разделить сечение.

Все площадки, расположенные на кольце, находятся на одинаковом расстоянии от центра, следовательно, для них радиус ρ является постоянным множителем и его можно вынести за знак суммы; при суммировании только по площади кольца можно написать, что $\sum_{F_k} \rho^2 \Delta F = \rho^2 \sum_{F_k} \Delta F = \rho^2 F_k$.



Фиг. 6.17. К вычислению полярного момента инерции:
 а — сплошного круглого сечения; б — сечения полого вала;
 в — сечения тонкостенной трубы.

Вследствие незначительной ширины кольца его площадь, очевидно, можно вычислить как площадь узкой полоски, длина которой равна длине окружности с радиусом ρ , ширина равна приращению радиуса $\Delta\rho$, т. е. $F_k = 2\pi\rho\Delta\rho$.

Таким образом сумма в пределах одной кольцевой площадки получается в следующем виде:

$$\sum_{F_k} \rho^2 \Delta F = 2\pi\rho^3 \Delta\rho.$$

Она равна полярному моменту инерции тонкого кольца.

Складывая эти величины для всего сечения, т. е. распространяя сумму на все значения переменного радиуса от 0 до r и применяя формулу (13), получаем

$$\sum_F \rho^2 \Delta F = \sum_0^r 2\pi\rho^3 \Delta\rho = 2\pi \sum_0^r \rho^3 \Delta\rho = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Это и есть полярный момент инерции площади круга

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2}.$$

В технике чаще приходится иметь дело с диаметром, а не с радиусом, поэтому и полярный момент инерции желательно выразить через диаметр $d=2r$. Подставляя $\frac{d}{2}$ в последней формуле вместо радиуса r , получаем формулу (4)

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Чтобы вычислить полярный момент инерции сечения полого вала (фиг. 6.17,б), нужно распространить сумму произведений $\rho^2 \Delta F$ только на те кольца, которые заключены между наружным R и внутренним r радиусами, т. е. из общей суммы в пределах от 0 до R нужно исключить часть слагаемых, которые содержат значения ρ в пределах от 0 до r . Другими словами, полярный момент инерции полого вала равен

$$J'_p = \sum_0^R 2\pi\rho^3 \Delta\rho - \sum_0^r 2\pi\rho^3 \Delta\rho = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2}.$$

Выражая его через диаметры D и d и вводя обозначение $\alpha = \frac{d}{D}$, получаем ранее приведенную формулу (5)

$$J'_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4).$$

Для тонкостенной трубы, у которой отношение среднего диаметра d к толщине стенки t (фиг. 6.17,в) больше пяти, полярный момент инерции можно вычислять по приближенной формуле $J_p = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3}{4} t$. Она получается из формулы для тонкого кольца (фиг. 6.17,а), если положить $\Delta\rho = t$ и вместо ρ подставить средний радиус трубы $r = \frac{d}{2}$. При отношении $\frac{d}{t} \geq 5$ погрешность вычисления J_p по приближенной формуле не превосходит 5% по сравнению с вычислением по точной формуле.

Задачи. 1. Вычислить полярный момент инерции и момент сопротивления полого вала с диаметрами $D=8$ см и $d=6$ см.

Ответ: $J'_p = 225$ см⁴; $W'_p = 68,7$ см³.

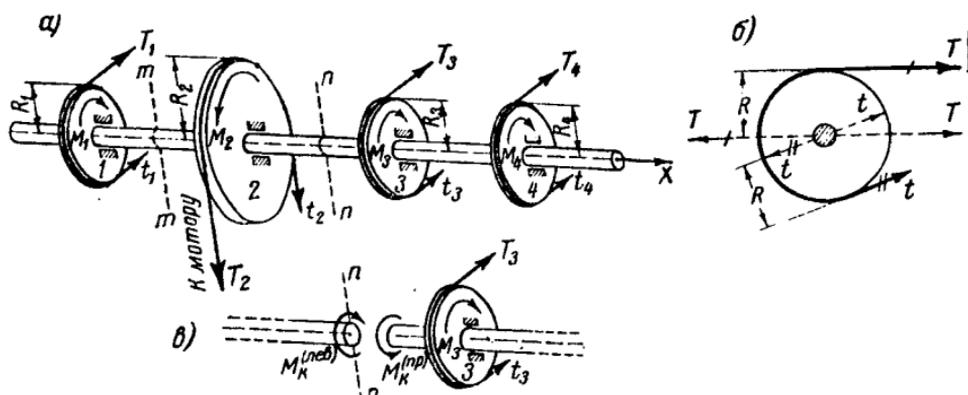
2. Площадь сечения сплошного вала равна площади сечения полого вала, данного в предыдущей задаче. Определить J_p и W_p .

Ответ: $J_p = 77$ см⁴; $W_p = 29$ см³.

§ 7. Расчет на прочность

Эпюра крутящих моментов. До сих пор мы рассматривали случай, когда к валу приложены лишь два момента в каких-либо двух плоскостях, перпендикулярных оси вала. Один из них мог возникать как реакция заделки. В более сложных случаях на вал могут действовать несколько взаимно уравновешенных моментов различной величины. В таких условиях находятся, например, трансмиссионные валы, которые служат для передачи мощности от мотора к агрегатам, потребляющим энергию (станкам и др.).

Рассмотрим для примера вал подобного типа (фиг. 6. 18, а). При помощи шкива 2 с гибкой или зубчатой передачей вал, по-



Фиг. 6. 18. Нагрузка вала несколькими моментами.

а — трансмиссионный вал; б — момент от натяжения ремней; в — крутящий момент в сечении n - n .

коящийся в подшипниках, приводится во вращательное движение мотором, от которого передается момент M_2 .

Агрегаты присоединяются к валу при помощи таких же шкивов и оказывают сопротивление его вращению, что вызывает различное натяжение ведущей и ведомой ветвей ремня. Обозначим натяжение в набегающей (ведущей) ветви через T , а в сбегающей (ведомой) — через t . Силы T и t создают в каждом шкиве результирующую пару с моментом $M = (T - t)R$. Это легко установить по фиг. 6. 18, б, на которой пунктиром показаны взаимно противоположные силы T и t , приложенные в центре шкива с радиусом R и равные соответствующим натяжениям ремня. Силы, отмеченные штрихами на чертеже, дают две пары, а не отмеченные — уравновешиваются реакциями подшипников и могут вызвать изгиб вала. Явление изгиба будет рассмотрено ниже; в настоящей главе нас интересует только кручение.

Таким образом сопротивление агрегатов выражается моментами M_1 , M_3 и M_4 , которые действуют на вал в плоскостях соответствующих шкивов одновременно с моментом M_2 . При уста-

новившемся, равномерном вращении действие мотора уравновешивается сопротивлением агрегатов и сумма всех моментов, приложенных к валу, равна нулю:

$$M_1 - M_2 + M_3 + M_4 = 0.$$

Вспоминаем, что крутящий момент в любом поперечном сечении равен сумме моментов относительно оси бруса всех сил, лежащих по одну сторону от сечения. На разных участках вала он имеет различную величину. В сечении *mm* он уравновешивает слева только момент M_1 , и на этом участке $M_k = M_1$. На участке между шкивами 2 и 3 в любом сечении *nn* крутящий момент, уравновешивающий левую отсеченную часть (фиг. 6. 18, в), равен

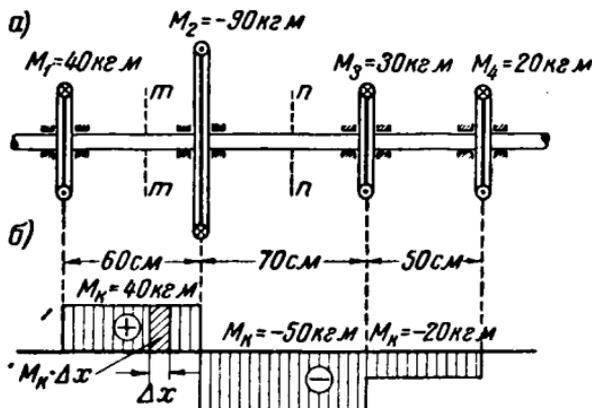
$$M_k^{(\text{лев})} = M_1 - M_2.$$

Отбрасывая левую часть, из равновесия правой части устанавливаем, что его величина $M_k^{(\text{пр})} = M_3 + M_4$. Крутящий момент может быть представлен в виде двух равных и противоположно направленных моментов, представляющих соответственно действие левой части вала на правую и правой на левую. Эти моменты в сумме, после соединения левой и правой части, равны нулю:

$$M_k^{(\text{лев})} + M_k^{(\text{пр})} = M_1 - M_2 + M_3 + M_4 = 0,$$

что полностью соответствует условию равновесия вала.

Изменение крутящего момента по длине можно представить графически. Для этого под чертежом вала (фиг. 6. 19, а) прово-



Фиг. 6. 19. Построение эпюры крутящих моментов.

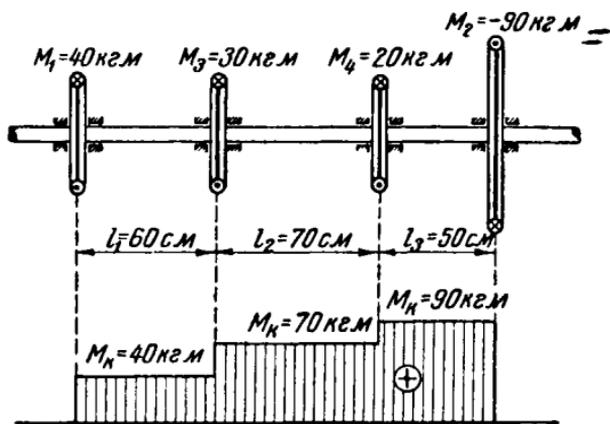
а — нагрузка вала; б — эпюра крутящих моментов.

дим ось, параллельную оси вала, и перпендикулярно к ней откладываем отрезки (ординаты), изображающие величину крутящего момента в соответствующих сечениях. Условимся *крутящий момент, действующий на сечение против часовой стрелки, если*

смотреть со стороны разреза, считать положительным и откладывать его величину вверх от оси, а действующий по часовой стрелке (как на фиг. 6. 18, в) считать отрицательным и откладывать его величину вниз от оси. Построенная таким образом диаграмма называется *эпюрой крутящих моментов*.

Пусть к рассматриваемому валу приложены моменты: $M_1 = 40$ кгм; $M_2 = -90$ кгм; $M_3 = +30$ кгм и $M_4 = +20$ кгм.

На фиг. 6. 19, а силы T , направленные перпендикулярно чертежу, изображены кружочками; кружок с крестиком означает, что сила направлена от нас, а кружок с точкой указывает силу, направленную на нас. На всем первом участке, в любом сече-



Фиг. 6. 20. Эпюра крутящих моментов при расположении агрегатов с одной стороны от ведущего шкива.

нии mn сумма моментов левых сил равна M_1 , который действует на сечение против часовой стрелки; поэтому здесь $M_k = 40$ кгм и отложен вверх (фиг. 6. 19, б). На втором участке, в сечении np сумма моментов левых сил равна $M_1 - M_2 = 40 - 90 = -50$ кгм и действует на сечение по часовой стрелке, в сторону большего момента. На этом участке крутящий момент отрицателен и отложен вниз. В эпюре M_k под шкивом 2 получается скачок на величину момента M_2 , под шкивом 3 — на величину M_3 и т. д.

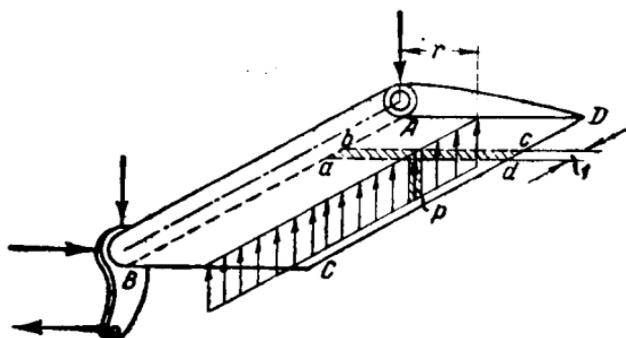
Момент M_2 распределяется между участками вала; одна его часть идет на преодоление сопротивления агрегата 1 и закручивает левый участок, а другая — на преодоление сопротивления агрегатов 3 и 4 и действует на правый участок, но нет ни одного сечения вала, в котором крутящий момент был бы равен величине M_2 . Максимальные напряжения будут возникать на участке 2—3. Соответственно наибольшему крутящему моменту $M_k = -50$ кгм и сечения этого участка являются наиболее опасными. Эпюра M_k необходима в первую очередь для отыскания опасных сечений.

Если расположить все агрегаты с одной стороны от ведущего шкива 2 (фиг. 6. 20), соединенного с мотором, то момент M_2 будет

действовать весь целиком на участке до ближайшего агрегата, напряжения в опасном сечении будут значительно превосходить напряжения предыдущего случая. Рациональным расположением крутящей нагрузки можно уменьшить напряжения и получить существенную экономию в материале, не нарушая прочности конструкции.

Крутящая нагрузка иногда передается на брус в виде моментов, расположенных сплошь по длине. Такую нагрузку можно представить себе, если, например, на валу (фиг. 6. 20) вместо трех расположить много шкивов, вращающихся в одну сторону, насадив их вплотную друг к другу.

В качестве другого примера сплошного распределения моментов рассмотрим нагрузку на трубчатый лонжерон элерона



Фиг. 6. 21. Образование сплошной крутящей нагрузки (шарнирные крепления лонжерона в точках A и B заменены реакциями).

(фиг. 6. 21). Давление воздуха распределено сплошь по всей площади $ABCD$ элерона. Равнодействующую давления, приходящегося на полоску $abcd$, вытянутую по хорде и имеющую размер, равный единице по длине элерона, обозначим p — интенсивность давления на единицу длины элерона. Она имеет размерность $кг/см$. Все равнодействующие p других таких полосок распределены по некоторой линии вдоль элерона (фиг. 6. 21). Через нервюры они передаются на лонжерон AB и, в частности, вызывают закручивание его. На единицу длины лонжерона приходится момент $m = pr$, который называется интенсивностью крутящей нагрузки и имеет размерность $кгсм/см$. Здесь через r обозначено плечо силы p до оси лонжерона.

Построим эпюру крутящих моментов для бруса AB , нагруженного сплошной крутящей нагрузкой, с постоянной интенсивностью m (фиг. 6. 22). В сечении на расстоянии x от свободного конца крутящий момент равен сумме моментов всех сил, расположенных слева от разреза; на единицу длины приходится момент m , а на всем участке x сумма моментов равна mx , следовательно, $M_{кз} = mx$.

Крутящий момент изменяется вдоль оси бруса пропорционально x , т. е. по наклонной прямой; в сечении A , при $x=0$, получаем $M_{кA}=0$, в сечении B , при $x=l$, крутящий момент наибольший $M_{кB}=ml$ (фиг. 6. 22).

В более сложных случаях распределения крутящей нагрузки построение эпюр крутящих моментов, а также эпюр углов закручивания производится в соответствии с правилами, изложенными ниже в главе VIII.

Условие прочности. Надежная работа вала на кручение будет обеспечена, если наибольшие касательные напряжения, возникающие в опасных сечениях, не будут превосходить величины допустимого касательного напряжения. Последнее обычно предписывается расчетными техническими нормами в зависимости от материала, характера работы конструкции и других условий.

Расчетное уравнение имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_{к}}{W_{\rho}} \leq [\tau]. \quad (14)$$

Зная наибольший крутящий момент и допустимое напряжение, легко найти необходимый момент сопротивления

$$W_{\rho} \geq \frac{M_{к}}{[\tau]}$$

и по нему определить диаметр вала.

Например, подставляя сюда W_{ρ} по формуле (9), найдем требуемый диаметр сплошного вала

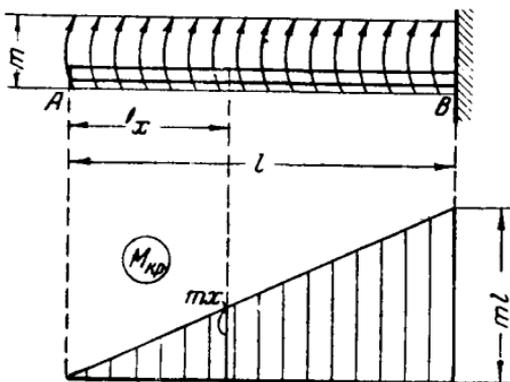
$$d \geq \sqrt[3]{16 \cdot \frac{M_{к \max}}{\pi [\tau]}}$$

или после извлечения кубического корня из $\frac{16}{\pi}$

$$d \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_{к \max}}{[\tau]}}. \quad (14')$$

Точно так же наружный диаметр полого вала должен быть

$$D \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_{к \max}}{[\tau] (1 - \alpha^4)}}.$$



Фиг. 6. 22. Эпюра крутящих моментов от сплошной крутящей нагрузки постоянной интенсивности m .

Пример 1. Подобрать полый вал судовой паровой машины. Допускаемое напряжение $[\tau] = 600 \text{ кг/см}^2$, отношение $\frac{d}{D} = 0,8$.

Вал скручивается моментом $M_k = 900 \text{ кгм}$.

Определим наружный диаметр, пользуясь формулой

$$D \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_k}{[\tau](1-\alpha^4)}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{90\,000}{600[1-(0,8)^4]}} = 10,9 \text{ см.}$$

Внутренний диаметр будет

$$d = \alpha D = 0,8 \cdot 10,9 = 8,72 \text{ см.}$$

Если вал сделать сплошным, то его диаметр был бы

$$d_c \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_k}{[\tau]}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{90\,000}{600}} = 9,14 \text{ см.}$$

Этот диаметр меньше диаметра полого вала на небольшую величину, потому что при кручении материал вблизи центра сечения напряжен слабо и незначительно влияет на прочность.

Пример 2. Вал сплошного сечения выдерживает крутящий момент $M_{\text{сп}} = 500 \text{ кгм}$ при $[\tau] = 600 \text{ кг/см}^2$. Определить крутящий момент, который можно приложить к полому валу, имеющему отношение $\alpha = 0,6$, чтобы напряжения и веса обоих валов были одинаковыми.

Сплошной вал имеет диаметр

$$d_{\text{сп}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{50\,000}{600}} = 7,5 \text{ см.}$$

Площади поперечных сечений сплошного и полого валов для равенства их весов должны быть равны:

$$\frac{\pi d_{\text{сп}}^2}{4} = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2).$$

Отсюда находим для полого вала сначала наружный диаметр:

$$D = \sqrt{\frac{d_{\text{сп}}^2}{1 - \alpha^2}} = \sqrt{\frac{(7,5)^2}{1 - (0,6)^2}} = 9,38 \text{ см,}$$

а затем момент сопротивления:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) = \frac{3,14(9,38)^3}{16}[1 - (0,6)^4] = 158 \text{ см}^3.$$

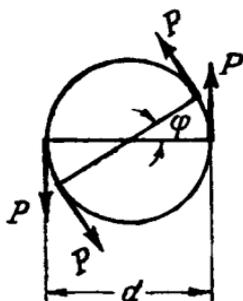
По условию прочности к нему можно приложить крутящий момент $M_{\text{пол}} = W_p'[\tau] = 158 \cdot 600 = 94\,800 \text{ кгсм}$, почти в два раза больше $M_{\text{сп}}$.

Полый вал всегда экономичнее сплошного, потому что в нем материал расположен более рационально, а именно, в той части сечения, которая является более напряженной.

§ 8. Зависимость крутящего момента от числа оборотов и мощности

Часто приходится рассчитывать трансмиссионные валы, валы моторов и машин, для которых известна передаваемая ими мощность N в лошадиных силах и число оборотов в минуту n . В этих случаях диаметр вала определяется также на основании условия прочности (14), но крутящий момент должен быть выражен в зависимости от мощности и числа оборотов. Установим эту зависимость. Для этого используем условие, что работа, совершаемая крутящим моментом в единицу времени, должна равняться мощности, передаваемой на вал за счет действия этого момента.

Работа, производимая парой сил P , равна сумме работ, совершаемых каждой силой на пройденном ею пути (фиг. 6.23). При повороте на угол φ каждая сила пройдет путь, равный дуге $\frac{d}{2}\varphi$, и работа пары сил будет $A = 2P \frac{d}{2} \varphi$. Но $Pd = M$. Следовательно,



Фиг. 6.23. Работа пары сил при повороте на угол φ .

но, $A = M\varphi$, т. е. работа пары сил при повороте ее на угол φ равна произведению момента пары на угол поворота в радианах.

При n оборотах в минуту вал поворачивается на угол $2\pi n$, и за одну секунду он повернется на угол $\varphi = \frac{2\pi n}{60}$. Крутящий момент представляет собой пару сил, связанную с валом и поворачивающуюся вместе с ним. За одну секунду крутящий момент совершает работу $M_k \varphi = M_k \frac{2\pi n}{60}$. За то же время,

т. е. за одну секунду, работа, передаваемая на вал при мощности в N лошадиных сил, будет $75N \text{ кгм/сек} = 7500 \text{ кгсм/сек}$, так как одна лошадиная сила равна 75 кгм/сек .

Приравнявая работу крутящего момента работе, передаваемой на вал,

$$M_k \frac{2\pi n}{60} = 7500N,$$

находим

$$M_k = \frac{7500 \cdot 60}{2\pi} \frac{N}{n}$$

или

$$M_k = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ кгсм.} \quad (15)$$

Крутящий момент здесь получается в килограммо-сантиметрах, мощность N подставляется в лошадиных силах, а n — число оборотов в минуту.

Пример 1. Проверить прочность трансмиссионного вала диаметром $d=6,5$ см, передающего мощность $N=860$ лошадиных сил при $n=1800$ оборотов в минуту, если допускаемое напряжение $[\tau]=600$ кг/см².

Крутящий момент находим по формуле (15):

$$M_k = 71\,620 \frac{N}{n} = 71\,620 \frac{860}{1800} \approx 34\,200 \text{ кгсм.}$$

Момент сопротивления сечения $W_p \approx 0,2d^3 = 0,2(6,5)^3 = 54,8 \text{ см}^3$.

Наибольшие касательные напряжения равны:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{34\,200}{54,8} = 624 \text{ кг/см}^2 > 600 \text{ кг/см}^2.$$

Они превосходят допускаемое напряжение на

$$\frac{624 - 600}{600} 100 = 4\%.$$

Пример 2. Мотор работает на двух режимах: на одном режиме его мощность $N_1=90$ л. с. при $n_1=120$ об/мин, а на втором $N_2=800$ л. с. и $n_2=2000$ об/мин. Установить размеры полого вала, передающего мощность мотора, считая заданными: допускаемое напряжение $[\tau]=400$ кг/см² и наружный диаметр $D=9,6$ см.

Крутящий момент зависит от отношения $\frac{N}{n}$ и будет больше при работе мотора на малом режиме, который в нашем случае является более опасным для вала. Именно

$$M_1 = 71\,620 \frac{N_1}{n_1} = 71\,620 \frac{90}{120} = 53\,700 \text{ кгсм.}$$

Необходимый момент сопротивления по условию прочности должен быть

$$W'_p = \frac{M_1}{[\tau]} = \frac{53\,700}{400} = 134 \text{ см}^3.$$

С другой стороны, он равен $W'_p \approx 0,2D^3(1-\alpha^4)$, откуда, зная наружный диаметр, найдем отношение

$$\alpha = \sqrt[4]{1 - \frac{W'_p}{0,2D^3}} = \sqrt[4]{1 - \frac{134}{0,2(9,6)^3}} = 0,702.$$

Внутренний диаметр следует принять $d = \alpha D = 0,702 \times 9,6 \approx 6,7$ см. При втором режиме работы мотора наибольшие напряжения вала будут

$$\tau_{\max} = \frac{M_2}{W'_p} = \frac{71\,620 \cdot 800}{134 \cdot 2000} = 214 \text{ кг/см}^2 < 400 \text{ кг/см}^2.$$

Задачи. 1. Определить наибольший крутящий момент, который можно безопасно приложить к пароводному валу диаметром $d=12$ см, если допускаемое напряжение $[\tau]=500$ кг/см².

Ответ: $M_k=339$ кгсм.

2. Подобрать диаметр вала машины при $[\tau]=800$ кг/см², если он делает: 1) $n_1=60$ об/мин при мощности $N_1=70$ л. с. и 2) $n_2=400$ об/мин при $N_2=500$ л. с.

Ответ: 1) $d_1=7,86$ см; 2) $d_2=8,3$ см.

§ 9. Расчет на жесткость

Угол закручивания. Эюра крутящих моментов служит не только для определения опасного сечения: при ее помощи легко вычислить угол поворота одного сечения относительно другого. Как нами было выведено в § 3 [формула (3)] относительный угол закручивания на единицу длины вала равен

$$\vartheta = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{M_k}{GJ_p}$$

Если вал скручивается одним моментом, то эюра M_k постоянная по всей его длине l и абсолютный угол закручивания будет (фиг. 6. 5,а)

$$\varphi = \vartheta l = \frac{M_k l}{GJ_p} \quad (16)$$

В тех случаях, когда к валу приложено несколько моментов и эюра M_k имеет различные значения в отдельных участках (фиг. 6. 19 и 6. 20), угол закручивания определяется как сумма углов закручивания каждого участка. Например, для вала, изображенного на фиг. 6. 20, абсолютный угол закручивания между крайними шкивами равен

$$\varphi = \sum \frac{M_k l}{GJ_p} = \frac{4000 \cdot 60 + 7000 \cdot 70 + 9000 \cdot 50}{GJ_p}$$

Здесь жесткость всех участков одинаковая. Числитель этой суммы представляет собой площадь эюры M_k . Таким образом абсолютный угол закручивания между двумя сечениями равен площади эюры крутящих моментов, заключенной между этими сечениями, деленной на жесткость.

При действии на вал нескольких крутящих моментов в разные стороны эюра имеет положительные и отрицательные ординаты (фиг. 6. 19). Площадь ее должна быть определена с учетом знаков: положительные площади входят в сумму со знаком плюс (складываются), а отрицательные — со знаком минус (вычитаются).

Если вал имеет различный диаметр в отдельных участках, то предварительно нужно разделить все ординаты эюры крутящих

моментов на соответствующие им жесткости, и тогда угол закручивания вычисляется как площадь новой эпюры, полученной из эпюры M_k путем деления ее ординат на жесткость.

Условие жесткости. В некоторых конструкциях, которые по условиям работы должны быть достаточно жесткими и не должны иметь значительных деформаций, необходимо, чтобы угол закручивания не превосходил определенной, допускаемой величины. Например, в некоторых случаях допускаемый угол закручивания принимают равным $\frac{1}{4}$ градуса на метр длины вала.

Чтобы составить условие жесткости, нужно угол закручивания, вычисленный по формуле (16), при длине l , равной $l = 100$ см, и измеряемый в радианах, сначала перевести в градусы и затем сравнить с допускаемым. Так как угол в 360° , измеряемый дугой, равной длине окружности, составляет 2π радиан, то 1 радиан равен $\frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi}$ градусов. Чтобы угол в радианах перевести в градусы, нужно число радиан умножить на $\frac{180}{\pi} = 57,3^\circ$. Следовательно, условие жесткости получает вид

$$\varphi^\circ = \frac{M_k l}{G J_p} \frac{180}{\pi} \leq [\varphi] = \frac{1}{4} \text{ градуса на метр.}$$

Отсюда находим необходимый момент инерции

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \geq \frac{M_k l}{G [\varphi]} \frac{180}{\pi}$$

и по нему вычисляем диаметр вала, удовлетворяющий условию жесткости,

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 M_k l}{\pi^2 G [\varphi]}}$$

Окончательная формула получается после подстановки $[\varphi] = \frac{1^\circ}{4}$ и $l = 100$ см. Извлекая корень четвертой степени из числовых величин, получаем

$$d \geq 22 \sqrt[4]{\frac{M_k}{G}}$$

Для полого вала соответствующая формула при $[\varphi] = \frac{1}{4}$ градуса на метр будет

$$D \geq 22 \sqrt[4]{\frac{M_k}{G(1-\alpha^4)}}$$

Может оказаться, что вал, подобранный по условию жесткости, не удовлетворяет условию прочности (или наоборот); тогда его диаметр следует увеличить, и он будет иметь излишний запас жесткости (или соответственно прочности). С этим приходится мириться, если необходимо удовлетворить обоим требованиям одновременно.

Пример 1. Определить угол поворота шкива 4 относительно шкива 1 трансмиссионного вала, изображенного на фиг. 6.19, если вал изготовлен из стали с модулем упругости $G = 800\,000 \text{ кг/см}^2$ и имеет диаметр $d = 4 \text{ см}$.

Полярный момент инерции равен

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{32} = 21,2 \text{ см}^4.$$

Площадь эпюры крутящих моментов между сечениями 1 и 4 по фиг. 6.19, б.

$$\sum_1^4 M_k \Delta x = 4000 \cdot 60 - 5000 \cdot 70 - 2000 \cdot 50 = -210\,000 \text{ кг см}^2.$$

Искомый угол закручивания вала (в радианах)

$$\varphi = \frac{1}{GJ_p} \sum_1^4 M_k \Delta x = -\frac{210\,000}{800\,000 \cdot 21,2} = -0,0124.$$

В градусах $\varphi^\circ = -0,0124 \frac{180}{\pi} = -0,71^\circ$ или $42'36''$. Знак минус указывает, что шкив 4 повернется относительно шкива 1 в отрицательную сторону, т. е. по часовой стрелке (фиг. 6.18).

Пример 2. Рассчитаем на прочность и на жесткость стальной трансмиссионный вал, изображенный на фиг. 6.20. Пусть $[\tau] = 450 \text{ кг/см}^2$ и $[\varphi] = \frac{1}{4}$ градуса на метр.

Опасный участок заключен между шкивами 4 и 2 (фиг. 6.20). Подбор сечения нужно производить в этом участке. По условию прочности имеем

$$d \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_{k \max}}{[\tau]}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{9000}{450}} = 4,67 \text{ см}.$$

По условию жесткости, полагая для стали $G = 800\,000 \text{ кг/см}^2$, находим

$$d \geq 22 \sqrt[4]{\frac{M_{k \max}}{G}} = 22 \sqrt[4]{\frac{9000}{800\,000}} = 7,17 \text{ см}.$$

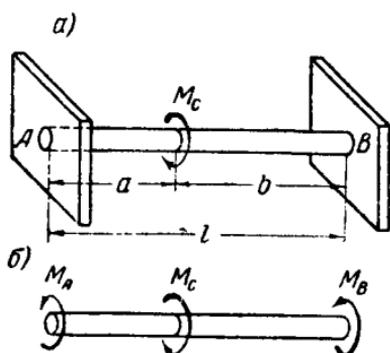
Диаметр вала нужно принять не менее 7,17 см, чтобы он был достаточно жестким. В этом случае максимальные напряжения участка 4—2 будут

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{9000}{0,2(7,17)^3} = 122 \text{ кг/см}^2.$$

В других участках они будут еще меньше.

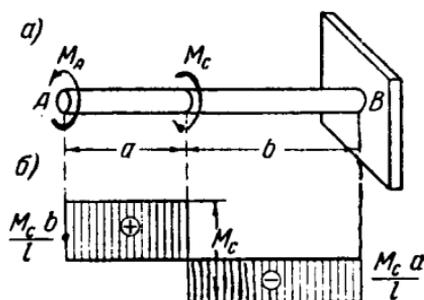
Статически неопределимые задачи. Определение угла закручивания необходимо не только в расчете на жесткость, но также и в решении статически неопределимых задач при кручении, потому что, помимо уравнений равновесия, для статически неопределимой системы приходится дополнительно составлять еще и уравнения деформаций.

Рассмотрим вал (фиг. 6.24,а), у которого оба конца А и В



Фиг. 6.24. Статически неопределимый вал.

а — оба конца вала заделаны;
б — равновесие вала.



Фиг. 6.25. Статически определимый вал.

а — конец А освобожден от закрепления;
б — эпюра крутящих моментов.

закреплены и не могут поворачиваться. От нагрузки вала моментом M_C возникают реактивные моменты M_A и M_B на опорах. Единственное уравнение равновесия, которое получается для данной системы (фиг. 6.24,б), представляет собой сумму моментов относительно оси вала

$$M_A - M_C + M_B = 0.$$

Два неизвестных опорных момента нельзя определить из этого *одного* уравнения и нужно составить второе уравнение, которое должно быть уравнением деформации. Чтобы уяснить физический смысл второго уравнения, освободимся от одной из опор, например, от опоры А и заменим ее действие на вал опорным моментом M_A (фиг. 6.25,а). Полученная система является статически определимым валом, нагруженным двумя моментами, из которых один (M_A) пока неизвестен. Напишем для этого вала выражение угла поворота φ освобожденного сечения А:

от неизвестного момента M_A , скручивающего весь вал на длине l ,

$$\varphi_A = \frac{M_A l}{GJ_p};$$

от заданного момента M_C , скручивающего только участок b вала и при этом в обратном направлении,

$$\varphi_C = -\frac{M_C b}{GJ_p}.$$

Участок a при действии момента M_C поворачивается весь на один и тот же угол φ_C , а вместе с ним поворачивается и сечение A . Таким образом полный угол поворота сечения A относительно сечения B равен

$$\varphi = \varphi_A + \varphi_C = \frac{M_A l}{GJ_p} - \frac{M_C b}{GJ_p}.$$

Но в заданной системе (фиг. 6.24,а) сечение A не может поворачиваться так же, как и сечение B . Применяя это условие деформации заданной системы к статически определимой системе (фиг. 6.25), получаем уравнение для определения M_A , а именно, угол поворота освобожденного конца A от действия опорного момента M_A и заданной нагрузки M_C должен равняться нулю, т. е.

$$\frac{M_A l}{GJ_p} - \frac{M_C b}{GJ_p} = 0.$$

Это и есть дополнительное уравнение деформации. Отсюда

$$M_A = \frac{M_C b}{l}.$$

Теперь значение M_A можно подставить в уравнение равновесия

$$\frac{M_C b}{l} - M_C + M_B = 0$$

и найти момент на второй опоре

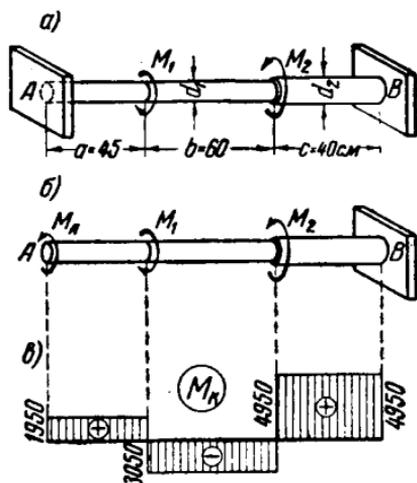
$$M_B = \frac{M_C a}{l}.$$

То же значение M_B получается и независимо от M_A , если освободиться от опоры B и составить аналогично изложенному выше уравнение деформации освобожденного конца B .

Чтобы построить эпюру крутящих моментов для заданной системы и рассчитать вал на прочность или на жесткость, достаточно найти хотя бы один из опорных моментов. Эпюра M_K , построенная для вала с освобожденным концом A при найденном значении M_A (фиг. 6.25,б), является эпюрой крутящих моментов для заданной системы (фиг. 6.24,а).

Пример 3. Определим наибольшие касательные напряжения статически неопределимого вала с переменным сечением (фиг. 6. 26,а) от нагрузки двумя моментами $M_1=5000$ кгсм и $M_2=8000$ кгсм. Диаметр одного участка вала $d_1=3$ см, другого $d_2=3,6$ см. Модуль G постоянный для всего вала.

Прежде всего нужно определить момент на одной из опор и построить эпюру крутящих моментов. Освобождаемся от опоры



Фиг. 6. 26. Пример статически неопределимой задачи.

а — заданная система; б — конец А не должен закручиваться от приложенной нагрузки; в — эпюра крутящих моментов для заданной системы.

А и ее действие на вал заменяем неизвестным опорным моментом M_A (фиг. 6. 26,б). В полученной системе от нагрузки моментами M_A , M_1 и M_2 составляем для освобожденного конца А выражение угла поворота и приравниваем его нулю, чтобы удовлетворить условию деформации заданной системы;

$$M_A \left(\frac{a+b}{GJ_1} + \frac{c}{GJ_2} \right) - M_1 \left(\frac{b}{GJ_1} + \frac{c}{GJ_2} \right) + M_2 \frac{c}{GJ_2} = 0.$$

Полярные моменты инерции сечений

$$J_1 = 0,1d_1^4 = 0,1 \cdot 3^4 = 8,1 \text{ см}^4; \quad J_2 = 0,1d_2^4 = 0,1 \cdot 3,6^4 = 16,8 \text{ см}^4.$$

Подставляя их и заданные значения длин и моментов в уравнение деформации, после сокращения на G получаем

$$M_A \left(\frac{105}{8,1} + \frac{40}{16,8} \right) - 5000 \left(\frac{60}{8,1} + \frac{40}{16,8} \right) + 8000 \frac{40}{16,8} = 0,$$

откуда $M_A=1950$ кгсм. Знак плюс, полученный для M_A , указывает, что направление опорного момента соответствует принятому ранее (фиг. 6. 26, б). Если бы M_A получился отрицательным, его направление следовало бы изменить на обратное.

Эпюру крутящих моментов (фиг. 6. 26,в) строим, передвигаясь по валу от конца А, и в результате получаем момент на другой опоре $M_B=4950$ кг см.

Чтобы найти наибольшие напряжения, проверим участки b и c . Моменты сопротивления сечений участков

$$W_1 = 0,2d_1^3 = 0,2 \cdot 3^3 = 5,4 \text{ см}^3; \quad W_2 = 0,2d_2^3 = 0,2 \cdot 3,6^3 = 9,33 \text{ см}^3.$$

Соответственно касательные напряжения в этих участках (фиг. 6.26, a и b) равны

$$\tau_b = \frac{M_B}{W_1} = \frac{3050}{5,4} = 565 \text{ кг/см}^2; \quad \tau_c = \frac{M_c}{W_2} = \frac{4950}{9,33} = 530 \text{ кг/см}^2.$$

Хотя наибольший крутящий момент возникает на участке c , наибольшие касательные напряжения в данном случае получились на участке b с меньшим диаметром сечения.

Задачи. 1. Определить наибольшие касательные напряжения вала диаметром $d = 12 \text{ см}$, если он изготовлен из материала с модулем упругости $G = 800\,000 \text{ кг/см}^2$ и удовлетворяет условию жесткости при $[\varphi] = \frac{1}{4}$ градуса на метр. *Ответ:* $\tau = 208 \text{ кг/см}^2$.

2. Рассчитать на жесткость стальной вал, скручиваемый моментом $M = 120 \text{ кгм}$, если допускаемый угол закручивания $[\varphi] = 0,3^\circ$ на метр длины и $G = 800\,000 \text{ кг/см}^2$. *Ответ:* $d = 7,35 \text{ см}$.

3. Определить мощность машины, делающей $n = 200 \text{ об/мин}$, если ее вал длиной $l = 1,8 \text{ м}$ и диаметром $d = 10 \text{ см}$ изготовлен из стали и закручивается на угол $\varphi = 1^\circ$. *Ответ:* $N = 212 \text{ л. с.}$

4. Мотор мощностью $N = 800 \text{ л. с.}$ делает $n = 1800 \text{ об/мин}$. Подобрать стальной полый вал мотора при $\alpha = 0,8$ и $[\varphi] = 0,25^\circ$ на метр. *Ответ:* $D = 11,2 \text{ см}$ и $d = 9 \text{ см}$.

5. На стальной трансмиссионный вал насажено последовательно шесть шкивов через каждые 2 м . Моменты, передаваемые шкивами, соответственно равны:

$$M_1 = -30 \text{ кгм}; \quad M_2 = 50 \text{ кгм}; \quad M_3 = 90 \text{ кгм};$$

$$M_4 = -50 \text{ кгм}; \quad M_5 = -100 \text{ кгм}; \quad M_6 = 40 \text{ кгм}.$$

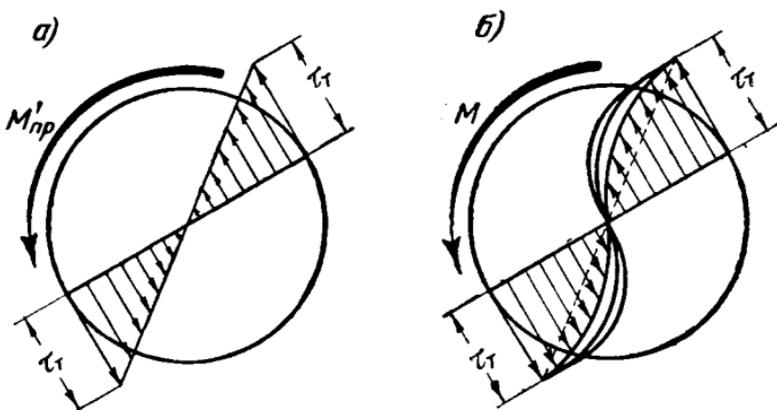
Построить эпюру крутящих моментов, подобрать прочные размеры сплошного вала при $[\tau] = 400 \text{ кг/см}^2$ и определить угол закручивания между крайними шкивами. *Ответ:* $d = 5,2 \text{ см}$; $\varphi = 2^\circ 24'$.

6. Определить напряжения и угол закручивания дуралюминовой трубы управления рулями самолета, если сечение трубы $D \times d = 50 \times 44 \text{ мм}$; длина $l = 0,6 \text{ м}$; момент, передаваемый ручкой управления, $M = 8 \text{ кг м}$; $G = 280\,000 \text{ кг/см}^2$. *Ответ:* $\tau = 163 \text{ кг/см}^2$; $\varphi = 48'$.

§ 10. Кручение за пределом пропорциональности

В предыдущем изложении предполагалось, что напряжения нигде не превосходят предела пропорциональности и все деформации происходят в пределах упругости материала. Расчет на прочность производится путем сравнения фактических напряжений с допускаемым [§ 7 настоящей главы, формула (14)], которое для пластических материалов принимается равным пределу текучести при сдвиге, деленному на коэффициент запаса $[\tau] = \frac{\tau_T}{n}$.

Это есть *расчет по допускаемым напряжениям*. Начало текучести материала в самой напряженной точке считается опасным состоянием конструкции и нагрузка, вызывающая это состояние,— предельной, превышать которую нельзя. При кручении круглых стержней это соответствует состоянию, когда



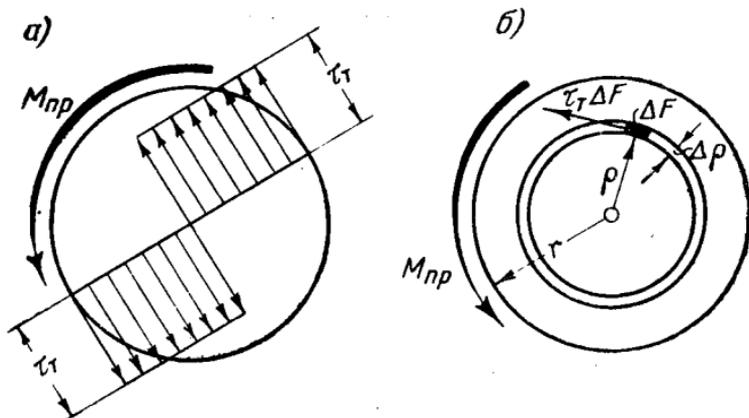
Фиг. 6.27. Кручение за пределом пропорциональности.

а — напряжения крайних волокон достигли предела текучести, эпюра напряжений треугольная; **б** — изменение напряжений за пределом пропорциональности с увеличением нагрузки.

касательные напряжения в крайних точках сечения достигают предела текучести при сдвиге τ_T (фиг. 6.27,а). Крутящий момент этого состояния $M'_{np} = \tau_T W_p = n[\tau] W_p$ определяет предельную грузоподъемность при расчете по допускаемым напряжениям. Но начало текучести только в крайних точках сечения так же, как и при расчете статически неопределимых систем (гл. III, § 6), еще не означает полного отказа стержня от работы и не исчерпывает всей его возможной грузоподъемности. Кроме крайних точек, все остальные точки сечения находятся еще в упругом состоянии, и для дальнейшего закручивания стержня необходимо увеличить крутящий момент. Напряжения крайних волокон стержня, находящихся в состоянии текучести, с возрастанием нагрузки больше не увеличиваются и остаются равными τ_T , а напряжения средних волокон, находящихся в упругом состоянии, увеличиваются до тех пор, пока они тоже достигнут величины τ_T .

Исследование кручения за пределом пропорциональности основано на тех же допущениях, которые были приняты (§ 1 настоящей главы) при кручении в пределах пропорциональности, а именно: 1) поперечные сечения остаются плоскими, хотя теперь появляются и остаточные деформации, и 2) радиусы остаются прямыми. Таким образом после начала текучести деформации в отдельных точках сечения происходят так же, как и при кручении в пределах упругости, но пропорциональность между деформациями и напряжениями нарушилась: деформации растут, а напряжения не растут вовсе или увеличиваются значительно медленнее, чем до текучести. Эпюра

касательных напряжений теперь получается не прямолинейной (фиг. 6. 27,а), а криволинейной (фиг. 6. 27,б) и с возрастанием нагрузки она становится все более выпуклой. Грузоподъемность стержня, его несущая способность, будет полностью исчерпана, когда во всех точках круглого сечения напряжения достигнут величины τ_T . В этом предельном случае кручения за пределом пропорциональности эпюра напряжений получается в виде двух прямоугольников (фиг. 6. 28,а). Дальнейшее закручивание стержня пойдет уже без увеличения нагрузки, и с этого момента начинается разрушение; нагрузки этого состояния являются разрушающими, а соответствующий им наиболь-



Фиг. 6. 28. Предельная нагрузка.

а — эпюра напряжений в предельном состоянии; б — вычисление предельного крутящего момента.

ший крутящий момент M_{np} определяет предельную грузоподъемность стержня, его разрушающую нагрузку.

Выразим величину предельного крутящего момента M_{np} через напряжения τ_T . В предельном состоянии (фиг. 6. 28, а) на площадку ΔF , взятую на расстоянии ρ от центра сечения, действует элементарная сила $\tau_T \Delta F$ (фиг. 6. 28, б). Ее момент относительно оси стержня, проходящей через центр сечения, равен $\tau_T \Delta F \rho$. Сумма этих моментов в пределах одного кольца радиуса ρ (фиг. 6. 28, б) и с площадью $F_k = 2\pi\rho\Delta\rho$ (§ 6 настоящей главы) получается в следующем виде:

$$\sum_{F_k} \tau_T \rho \Delta F = \tau_T \rho \sum \Delta F = 2\pi\tau_T \rho^2 \Delta\rho.$$

Величину M_{np} получим, сложив моменты, приходящиеся на все кольца, заполняющие сечение, т. е. взяв пределы суммирования от 0 до r ,

$$M_{np} = \sum_0^r 2\pi\tau_T \rho^2 \Delta\rho.$$

Вынося постоянные величины за знак суммы и принимая во внимание формулу (12), окончательно определяем разрушающий крутящий момент

$$M_{np} = 2\pi\tau_T \sum_0^r \rho^2 \Delta\rho = \frac{2\pi}{3} r^3 \tau_T = \frac{\pi d^3}{12} \tau_T. \quad (17)$$

Если его разделить на коэффициент запаса, получим так называемый допускаемый крутящий момент, вычисленный по способу разрушающих нагрузок:

$$M_p = \frac{M_{пр}}{n} = \frac{\pi d^3}{12} \frac{\tau_r}{n} = \frac{\pi d^3}{12} [\tau]. \quad (17')$$

Крутящий момент, который можно безопасно приложить к стержню, по способу допускаемых напряжений получается из условия прочности (14)

$$M_d = W_p [\tau] = \frac{\pi d^3}{16} [\tau].$$

Таким образом в случае неравномерного распределения напряжений по сечению переход к способу расчета по разрушающим нагрузкам дает возможность повысить грузоподъемность стержня и при одинаковой грузоподъемности по способу разрушающих нагрузок можно получить экономию материала.

Контрольные вопросы

1. При какой нагрузке происходит деформация кручения и в чем она состоит? Привести примеры кручения из практики.

2. Чему равен крутящий момент? В какой плоскости он действует по отношению к оси стержня?

3. Какие деформации происходят при кручении? Что называется углом закручивания и углом сдвига?

4. Какие предпосылки положены в основу изучения явления кручения?

5. Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала при кручении?

6. Как распределяются напряжения по сечению круглого вала?

7. Какому условию должны удовлетворять касательные напряжения и внешняя нагрузка отсеченной части вала?

8. Что называется относительным углом закручивания? Как он связан с углом сдвига, с крутящим моментом и модулем упругости? Проверьте размерность формулы для относительного угла закручивания.

9. Что такое полярный момент инерции, его размерность, как он вычисляется для сплошного и полого валов? Что такое жесткость вала?

10. Как вычисляются касательные напряжения в поперечном сечении круглого вала? Где они имеют наибольшее значение? Какова их размерность?

11. Что называется моментом сопротивления кручению? Чему он равен для сплошного и полого валов?

12. Почему возникают касательные напряжения в продольных сечениях и какими опытами это подтверждается?

13. Как разрушаются чугунные образцы при кручении? Объясните, какие напряжения для них являются опасными.

14. Напишите формулы для вычисления суммы произведений приращения какой-нибудь величины на самую величину, возведенную в какую-нибудь степень.

15. Как нужно разбить круглое сечение на элементарные площадки, чтобы вывести формулу полярного момента инерции?

16. Напишите зависимость между крутящим моментом и мощностью на валу. Какова размерность величин, входящих в эту зависимость?

17. Всегда ли нужно увеличивать диаметр вала, если увеличивается передаваемая им мощность?

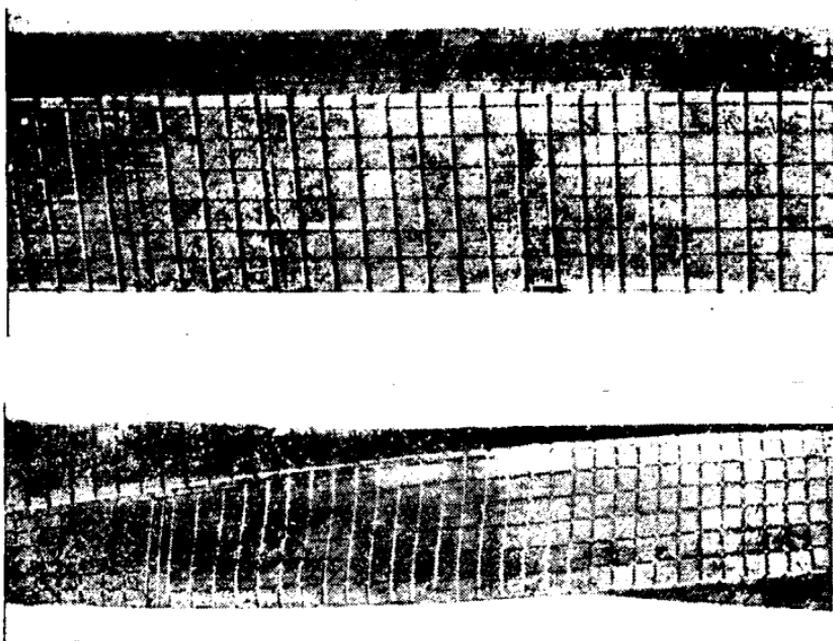
18. Как вычисляется угол закручивания вала постоянного сечения, нагруженного несколькими моментами?

Глава VII

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ И ТОНКОСТЕННЫХ АВИАКОНСТРУКЦИЙ

§ 1. Прямоугольное сечение

На практике встречаются случаи, когда скручиванию подвергаются стержни некруглого сечения. Опыты показывают, что у таких стержней *после деформации поперечные сечения не остаются плоскими*, а принимают форму кривой поверхности. Точки, расположенные на плоскости сечения, вы-



Фиг. 7.1. Деформация прямоугольного бруса при закручивании.

ходят из своей плоскости и получают вдоль оси бруса перемещения различной величины. Такое перемещение точек из плоскости сечения параллельно оси бруса называется *депланацией сечения*.

Вначале займемся изучением кручения бруса прямоугольного сечения. На фиг. 7.1 изображены фотографии прямоугольного стержня¹ на котором до деформации были нанесены продольные и поперечные линии. После закручивания продольные линии, так же как и в круглых стержнях, превратились в винтовые линии, а поперечные искривились (сравните с фиг. 6.3). Совершенно очевидно, что точки и внутри бруса получили смещение из своей плоскости в направлении оси, и, следовательно, сечение депланировалось. В этом и состоит отличие деформации кручения прямоугольных брусков от круглых.

Предварительно нанесенные квадратные клетки получили перекосы и обратились в ромбы неравномерно по поверхности стержня. Клетки, расположенные по середине стороны прямоугольного сечения, получили наибольший перекося, измеряемый углом сдвига γ , а расположенные у углов сечения остались прямоугольными. Перекос клеток, расположенных по середине длинной стороны сечения, получается больше, чем перекос клеток, расположенных на его короткой стороне.

Касательные напряжения, которые зависят от угла сдвига, в поперечном сечении должны иметь наибольшую величину по середине длинной стороны прямоугольника и в углах должны равняться нулю. Распределение напряжений здесь происходит по более сложному закону, чем для круглого сечения.

На основании подробного исследования кручения прямоугольного бруса методами теории упругости получена полная картина распределения напряжений при кручении. Изложение этих исследований выходит за рамки настоящей книги. Ниже приведены лишь результаты, представляющие интерес для практических целей.

Расчетные напряжения и относительный угол закручивания стержня некруглого сечения вычисляются по формулам:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}; \quad \vartheta = \frac{M_k}{GJ_k}. \quad (1)$$

В этих формулах

$$W_k = \alpha hb^2; \quad J_k = \beta hb^3. \quad (2)$$

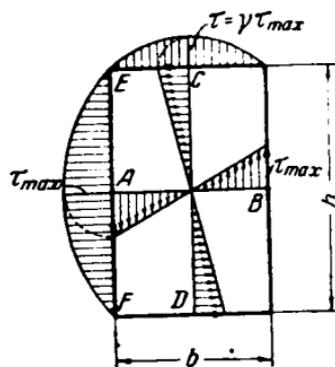
Коэффициенты α и β зависят от отношения большей стороны сечения h к меньшей стороне b (фиг. 7.2). Для некоторых соотношений сторон они приведены в табл. 6.

Таблица 6

$\frac{h}{b}$	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,298	0,307	0,312	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,298	0,307	0,312	0,333
γ	1	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

Величины W_k и J_k в формулах (1) выполняют ту же роль, что и момент сопротивления кручению W_p и полярный момент инерции J_p в формулах

¹ Обе фотографии одного образца, но в разных масштабах.



Фиг. 7.2. Распределение касательных напряжений при кручении в прямоугольном сечении бруса.

(8) и (3) главы VI, полученных для круглого бруса. Размерности величин W_k и J_k также соответственно равны $см^3$ и $см^4$. В дальнейшем величину W_k будем также называть *моментом сопротивления кручению*, а произведение GJ_k — *жесткостью на кручение* бруса некруглого сечения по аналогии с соответствующими величинами для круглого бруса.

Наибольшие касательные напряжения τ_{\max} возникают в точках A и B , по середине длинных сторон прямоугольника (фиг. 7. 2). Во всех остальных, точках сечения они будут меньше. Эпюры τ , изображенные на фиг. 7. 2, показывают изменение напряжений в точках, расположенных на различных прямых. По прямой AB или CD они изменяются по треугольнику, как и в круглом сечении. По прямой EF или по любой другой стороне закон изменения τ криволинейный. В угловых точках напряжения равны нулю.

Иногда бывает желательно знать напряжения τ по середине короткой стороны b (точки C и D на фиг. 7. 2). Их вычисляют в зависимости от τ_{\max} по формуле $\tau = \gamma \tau_{\max}$. Коэффициент γ тоже приведен в табл. 6.

Абсолютный угол закручивания при постоянном крутящем моменте M_k на всей длине l бруса равен

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_k}.$$

Если приложено несколько моментов, то абсолютный угол закручивания прямоугольного стержня, точно так же как и для круглого (гл. VI, § 9), равен сумме углов закручивания отдельных участков с постоянными значениями M_k и жесткости GJ_k .

$$\varphi = \sum \frac{M_k l}{GJ_k}.$$

Пример 1. Вычислить наибольший крутящий момент при допуске напряжении $[\tau] = 800 \text{ кг/см}^2$ и соответствующий ему угол закручивания стального стержня длиной $l = 50 \text{ см}$, имеющего прямоугольное сечение $18 \times 30 \text{ мм}$.

Определяем отношение $\frac{h}{b} = \frac{30}{18} = 1,67$. Соответствующие значения α и β возьмем из табл. 6 между значениями для $\frac{h}{b} = 1,5$ и 2 пропорционально заданному отношению сторон:

$$\alpha = 0,231 + (0,246 - 0,231) \frac{1,67 - 1,5}{2 - 1,5} = 0,242;$$

$$\beta = 0,196 + (0,229 - 0,196) \frac{1,67 - 1,5}{2 - 1,5} = 0,220.$$

Момент сопротивления $W_k = \alpha h b^2 = 0,242 \cdot 3 \cdot 1,8 = 2,35 \text{ см}^3$.

По формуле (1) находим

$$M_k = W_k [\tau] = 2,35 \cdot 800 = 1880 \text{ кгсм}.$$

Вычисляем жесткость на кручение, принимая для стали

$$G = 800\,000 \text{ кг/см}^2, \quad GJ_k = G \beta h b^3 = 800\,000 \cdot 0,22 \cdot 3 \cdot 1,8^3 = 3\,080\,000 \text{ кгсм}^2.$$

Считая крутящий момент постоянным по длине стержня, находим

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_k} = \frac{1880 \cdot 50}{3\,080\,000} = 0,0305 \text{ радиан или } 0,0305 \frac{180}{3,14} = 1,75^\circ.$$

Задачи. 1. Определить размеры стержня квадратного сечения, равнопрочного круглому диаметром $d=2$ см, и сравнить площади их сечений.

2. Сравнить жесткости на кручение трех стержней: круглого, квадратного и прямоугольного с отношением $\frac{h}{b}=2$, если площади их поперечных сечений равны между собой.

3. К стальной пруту квадратного сечения со стороной 1 см и длиной $l=2,5$ м приделана поперечная рукоятка длиной 0,5 м. Какую силу нужно приложить к концу рукоятки, чтобы закрутить прут на 90° ? Определить напряжения прута от этой силы. *Ответ:* $P=1,72$ кг; $\tau=426$ кг/см².

4. Брус длиной $l=1,2$ м нагружен крутящим моментом $M_k=180$ кгм в промежуточном сечении на расстоянии 70 см от его левого конца, который конструктивными устройствами лишен возможности поворачиваться. Какой момент нужно приложить к правому свободному концу, чтобы его угол закручивания был также равен нулю? Все сечения бруса одинаковые. *Ответ:* $M=105$ кгм.

§ 2. Напряжения и угол закручивания открытого профиля

Из табл. 6 предыдущего параграфа видно, что с увеличением $\frac{h}{b}$ коэффициенты α и β становятся все ближе к $0,333=\frac{1}{3}$ и практически их можно считать равными $\frac{1}{3}$, уже начиная со значений $\frac{h}{b} \geq 10$.

Для узкого вытянутого прямоугольника с высотой $h=s$ и толщиной $b=t$, когда $\frac{s}{t} > 10$ (фиг. 7.3), в формулах (2) можно величину ahb^2 заменить на $\frac{1}{3}st^2$, а величину βhb^3 заменить на $\frac{1}{3}st^3$.

Тогда для наибольшего касательного напряжения и угла закручивания узкого прямоугольника получаются приближенные формулы в следующем виде с точностью, вполне достаточной для инженерных расчетов:

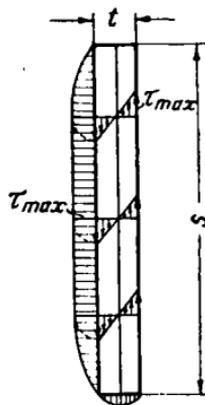
$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{3M_k}{st^2}; \quad \varphi = \frac{M_k}{GJ_k} = \frac{3M_k}{Gst^3}. \quad (3)$$

Следует отметить, что в узкой полоске напряжения почти по всей ее длинной стороне остаются одинаковыми и равны τ_{\max} , снижаясь к нулю только вблизи угловых точек (фиг. 7.3).

Касательные напряжения, направленные вдоль средней линии тонкой полоски, всегда равны нулю. Это обстоятельство важно при изучении деформации сечения.

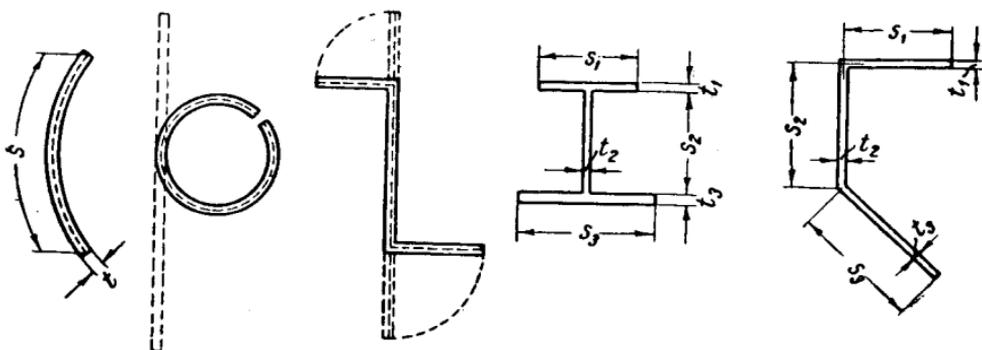
Сечения, составленные из полосок, которые не образуют замкнутой области, называются открытыми сечениями или *открытыми профилями*, как, например, изображенные на фиг. 7.4. Линию, проходящую в сечении, по середине толщины стенки, мы будем называть *контуром профиля* или просто контуром. Эта средняя линия может иметь форму кривой или ломаной.

Оказывается, что максимальные напряжения и угол закручивания открытых профилей такие же, как и в вытянутом прямоугольнике, полученном из данного профиля, если развернуть его контур в прямую линию или сложить из составляющих его полосок одну прямую полоску (фиг. 7.4). Высота s этой полоски равна длине контура открытого профиля.



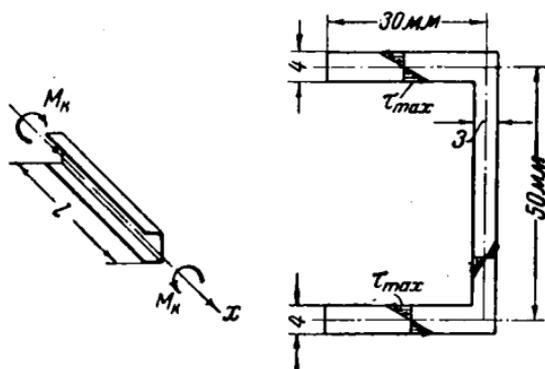
Фиг. 7.3. Сечение в виде вытянутого прямоугольника.

Распределение напряжений в открытом профиле происходит по тому же закону, что и в полученном из него прямоугольнике (фиг. 7.5). По средней линии сечения касательные напряжения отсутствуют, а наибольшей величины они достигают в точках вдоль длинной стороны. На этом основании для определения напряжений и угла закручивания открытого профиля



Фиг. 7.4. Примеры открытых профилей.

с постоянной толщиной стенок применяются те же формулы (3), которые были получены для вытянутого прямоугольника. Только теперь в эти формулы нужно подставлять величину s , равную сумме длин полосок, составляющих открытый профиль.



Фиг. 7.5. Распределение касательных напряжений при кручении открытого профиля.

Если сечение состоит из полосок с различной толщиной t , то жесткость такого профиля вычисляется как сумма жесткостей составляющих его полосок

$$GJ_k = \sum G \frac{st^3}{3} = \frac{1}{3} G \sum st^3.$$

Величина $J_k = \frac{1}{3} \sum st^3$, например, для двух последних профилей, изображенных на фиг. 7.4, равна

$$J_k = \frac{1}{3} (s_1 t_1^3 + s_2 t_2^3 + s_3 t_3^3).$$

Чтобы получить момент сопротивления открытого профиля, нужно величину J_k разделить на наибольшую толщину, $W_k = \frac{J_k}{t_{\max}}$.

Таким образом в общем случае открытого профиля с различной толщиной стенок формулы для наибольших напряжений и угла закручивания имеют вид

$$\tau = \frac{M_k}{W_k} = \frac{3M_k}{\Sigma st^3} t_{\max}; \quad \vartheta = \frac{M_k}{GJ_k} = \frac{3M_k}{G \Sigma st^3} \quad (4)$$

В частном случае, когда все стенки профиля имеют одинаковую толщину t , из этих формул получаются формулы (3).

Пример 1. Определить напряжения и угол закручивания дуралюминового швеллера (фиг. 7.5) длиной $l=2$ м от крутящего момента $M_k = 200$ кг см.

Для заданного профиля

$$J_k = \frac{1}{3} (2 \cdot 3 \cdot 0,4^3 + 5 \cdot 0,3^3) = 0,173 \text{ см}^4.$$

Наибольшие напряжения возникают в горизонтальных полках:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k}{J_k} t_{\max} = \frac{200}{0,173} \cdot 0,4 = 462 \text{ кг/см}^2.$$

Абсолютный угол закручивания, принимая для дуралюмина $G=280\,000$ кг/см², равен

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_k} = \frac{200 \cdot 200}{280\,000 \cdot 0,173} = 0,826 \text{ радиан или } \varphi = 0,826 \frac{180}{\pi} = 47^\circ.$$

При сравнительно небольших напряжениях угол закручивания получается очень большой. Это показывает, что жесткость на кручение открытого профиля чрезвычайно мала.

Задачи. 1. Определить допускаемый крутящий момент дуралюминового равнобокого угольника с размерами $50 \times 50 \times 4$ мм по условиям прочности и жесткости, если $[\tau]=500$ кг/см², $[\varphi]=1^\circ$ на метр и $G=280\,000$ кг/см². *Ответ:* по прочности $M_k=256$ кг см, по жесткости $M_k=10$ кг см.

2. В стержне длиной $l=0,6$ м на участке $l_1=0,2$ м крутящий момент положительный, $M_k=130$ кг см, а на остальной части отрицательный $M_k'=-80$ кг см. Сечение стержня—швеллер высотой $h=60$ мм и шириной полки $b=35$ мм. Подобрать толщину стенок, чтобы напряжения не превосходили 120 кг/см², и вычислить абсолютный угол закручивания всего стержня, если модуль $G=280\,000$ кг/см². *Ответ:* $t=5$ мм; $\varphi=13' 36''$.

§ 3. Напряжения в замкнутом профиле

Тонкостенная труба. Полый вал, у которого отношение внутреннего диаметра к наружному достаточно велико и приближается к единице, представляет собой трубу с тонкой стенкой. Ее можно получить из тонкого плоского листа, если его свернуть и края соединить, положим, при помощи заклепок или сварки. Труба может быть и цельнотянутой. Сечение такой трубы представляет собой тонкостенный замкнутый профиль (фиг. 7.6).

Напряжения по толщине его стенки при кручении распределяются по трапеции [формула (6) гл. VI], как в полом валу:

$$\tau_{\text{в}} = \frac{M_{\text{к}} D}{J_p' 2} \quad \text{и} \quad \tau_{\text{н}} = \frac{M_{\text{к}} d}{J_p' 2}.$$

Разница между напряжениями у наружной и внутренней поверхности (фиг. 7.6) тем меньше, чем тоньше стенки профиля, и практически можно считать, что в тонкостенном замкнутом профиле касательные напряжения распределяются равномерно по толщине стенок. Их величина равна напряжению, возникающему в точках средней линии сечения стенки:

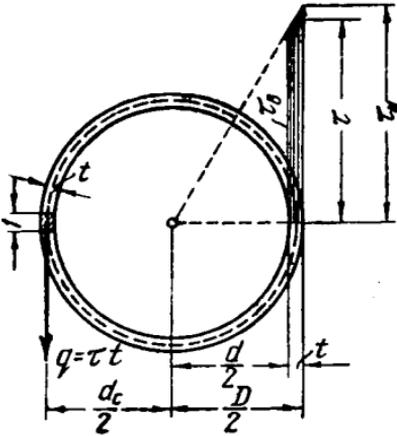
$$\tau = \frac{\tau_{\text{н}} + \tau_{\text{в}}}{2} = \frac{M_{\text{к}} d_c}{J_p' 2},$$

где d_c — диаметр средней линии.

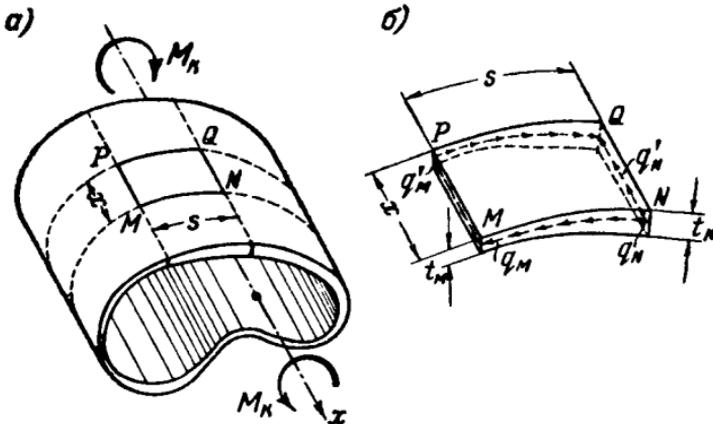
При расчете тонкостенных профилей часто приходится пользоваться не величиной напряжений, а равнодействующей касательных напряжений, приходящихся на единицу длины контура сечения. Такая равнодействующая напряжений называется погонным касательным усилием $q = \tau t$.

Как было установлено в гл. VI, § 2, напряжения в точках окружности круглой

трубы одинаковы, следовательно, и погонное касательное усилие имеет постоянное значение для всего контура трубы.



Фиг. 7.6. Напряжение в тонкостенной трубе при кручении.



Фиг. 7.7. Кручение замкнутого профиля.

a — продольными и поперечными сечениями вырезан элемент *MNPQ*; *б* — погонные касательные усилия в гранях элемента.

Замкнутый профиль. Рассмотрим стержни с замкнутым контуром сечения произвольного очертания, причем такие, у которых все поперечные сечения одинаковы. Подобный стержень представляет собой цилиндр с произвольным основанием и с постоянной толщиной стенки вдоль его образующей. В поперечном сечении толщина стенки может быть различной для

отдельных участков контура (фиг. 7.7). Будем предполагать, что форма контура все время остается неизменной и поперечные сечения поворачиваются при кручении, как диски, жесткие в своей плоскости. В действительных конструкциях это обеспечивается введением в конструкцию диафрагм. Примером такой конструкции является крыло самолета или фюзеляж, у которых для придания неизменности формы их поперечных сечений служат соответственно нервюры и шангоуты. При закручивании в таком стержне, как и в круглой трубе, возникают касательные напряжения, которые можно считать распределенными равномерно по толщине стенок. Касательные напряжения на длине контура, равной единице, образуют погонное касательное усилие q , направленное по касательной к контуру сечения. Оказывается, что усилия q имеют постоянное значение во всех точках контура не только для круглого профиля, но и для всякого другого замкнутого тонкостенного профиля.

Для доказательства выделим из стержня двумя поперечными и двумя продольными сечениями (фиг. 7.7, а) часть стенки $MNPQ$ с произвольной длиной s по контуру. От оставшейся части стержня на боковые грани выделенной стенки передаются силы взаимодействия в виде погонных касательных усилий $q = \tau t$ (фиг. 7.7, б). Так как касательные напряжения от момента M_k во всех поперечных сечениях одинаковые, т. е. в точках M и P касательные усилия равны, то по закону парности для всех точек продольной грани PM касательное усилие имеет постоянное значение $q'_M = -q_M = -q_P$ и дает равнодействующую силу $q'_M x$. На основании этих же соображений и в любой другой продольной грани QN усилие $q'_N = -q_N$ имеет постоянное значение и дает равнодействующую $q'_N x$, направленную противоположно силе $q'_M x$. Составляя условие равновесия элемента $MNPQ$ в виде проекции всех его сил на ось x , параллельной образующей получаем

$$q'_M x - q'_N x = 0.$$

Отсюда находим, что $q'_M = q'_N$, а принимая во внимание закон парности, получаем, что $q_M = q_N$. Точки M и N взяты произвольно по длине контура, следовательно, *при кручении тонкостенного замкнутого профиля погонное касательное усилие постоянно по всему сечению:*

$$q = \tau t = \text{const.} \quad (5)$$

Направление усилий совпадает с направлением касательной к контуру. Касательные напряжения изменяются по длине контура в зависимости от толщины стенок, так как $\tau = \frac{q}{t}$.

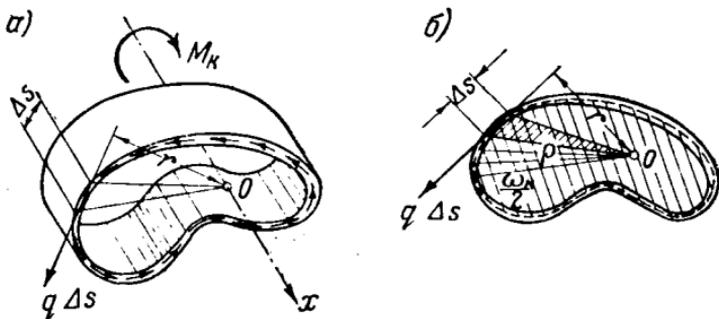
Разрежем брус поперечным сечением по PQ на две части (фиг. 7.7, а) и, отбросив переднюю, найдем величину q из условия, что оставшаяся часть бруса (фиг. 7.8, а) должна находиться в равновесии под действием внешних и внутренних сил. Составим это условие. Так как в поперечном сечении на единицу длины s контура действует усилие q , то на малый элемент длиной Δs будет действовать малая сила $q \Delta s$ (фиг. 7.8, а). Она создает относительно произвольной оси Ox момент $\Delta M = q \Delta s r$. Здесь r — плечо силы — является перпендикуляром, опущенным из полюса O (точки пересечения оси с плоскостью сечения) на направление касательной к контуру, так как именно по этому направлению действует малая сила $q \Delta s$.

Сумму моментов всех этих сил нужно распространить на все поперечное сечение по замкнутому контуру. Она дает величину момента внутренних сил, действующего на профиль со стороны разреза и вращающего относительно оси x против часовой стрелки,

$$\sum_k \Delta M = \sum_k q r \Delta s = q \sum_k r \Delta s.$$

Принимая во внимание, что усилие q является постоянной величиной, оно вынесено за знак суммы как общий множитель.

Оставшееся под знаком суммы произведение $r\Delta s = \Delta\omega$ равно удвоенной площади малого треугольника с основанием Δs и высотой r (фиг. 7.8, б). Такие треугольники являются секторами, которые образуются подвижным переменным радиусом r , когда один его конец перемещается по контуру, а второй все время совпадает с выбранным центром O . Сумма произведений $r\Delta s$, равная сумме удвоенных площадей малых треугольников, представляет собой удвоенную площадь, ометаемую подвижным радиусом. При



Фиг. 7.8. Напряжения в замкнутом профиле.

a — отсеченная часть стержня; **б** — площадь контура, ометаемая подвижным радиусом r .

обходе всего контура она равна удвоенной площади ω_k , ограниченной средней линией сечения (фиг. 7.8, б),

$$\sum_k r\Delta s = \sum_k \Delta\omega = \omega_k.$$

Таким образом внутренние касательные усилия в замкнутом контуре создают момент

$$\sum_k \Delta M = q\omega_k.$$

С противоположной стороны действует внешний момент, равный крутящему моменту M_k и вращающий этот же профиль по часовой стрелке. Условие равновесия сил, приложенных к отсеченной части тонкостенного цилиндра, получает вид

$$\sum_k \Delta M - M_k = q\omega_k - M_k = 0.$$

Отсюда окончательно находим

$$q = \frac{M_k}{\omega_k}. \quad (6)$$

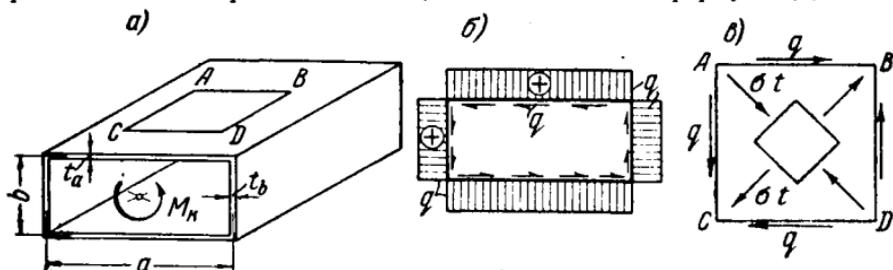
Погонное касательное усилие равно крутящему моменту, деленному на удвоенную площадь, ограниченную контуром. Условимся считать положительным касательное усилие, если оно действует в направлении обхода сечения против часовой стрелки. Его величины, отложенные в виде ординат перпендикулярно касательной к контуру, определяют эпюру погонных касательных усилий q . Положительные ординаты этой эпюры будем откладывать снаружи контура. Тогда стрелки, изображающие величину q в плоскости сечения, повернутые на 90° по часовой стрелке, будут совпадать с ординатами эпюры.

Для примера возьмем тонкостенный брус с замкнутым прямоугольным сечением (фиг. 7.9, а). При действии крутящего момента M_k в сечениях бруса возникают погонные касательные усилия $q = \frac{M_k}{2ab}$, эпюра которых изображена на фиг. 7.9, б.

Касательные напряжения при кручении замкнутого профиля с произвольным контуром равны

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{M_K}{\omega_K t} \quad (7)$$

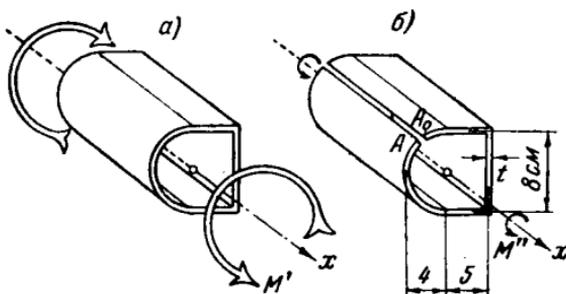
По этим же формулам следует определять касательные усилия и напряжения в сечениях тонкостенной круглой трубы, которая является частным случаем замкнутого профиля. В сечениях вдоль образующей тонкостенного цилиндра, нормальных к его контуру, также возникают касательные напряжения $\tau = \frac{q}{t}$ (фиг. 7.7); на основании закона парности они равны напряжениям в поперечном сечении, вычисляемым по формуле (7).



Фиг. 7.9. Распределение усилий в замкнутом профиле.

a — тонкостенный стержень с прямоугольным контуром; *b* — эпюра погонных касательных усилий; *в* — пластинка, выделенная из тонкостенного бруса, находится в условиях чистого сдвига.

Всякий прямоугольный элемент *ABCD*, вырезанный из тонкостенного бруса продольными и поперечными сечениями, представляет собой пластинку, нагруженную по граням только касательными усилиями *q* (фиг. 7.9, в). Она находится в условиях чистого сдвига (гл. V, § 1). В этом случае в площадках, наклоненных на 45° к продольному или поперечному сечению, возникают главные нормальные усилия, численно равные касательным $|\sigma_t| = |\tau_t| = q$. В одном направлении они растягивают пластинку, а в другом — сжимают.



Фиг. 7.10. Сопротивление кручению замкнутого и открытого профилей.

a — замкнутый профиль выдерживает большую крутящую нагрузку; *b* — открытый профиль не может работать на кручение.

Сжимающие напряжения при некотором значении нагрузки вызывают волнообразование обшивки. Вычисление нагрузки, при которой волнообразование может произойти, а также случаи, когда оно допустимо и когда не допустимо, рассматриваются ниже в гл. X, § 8.

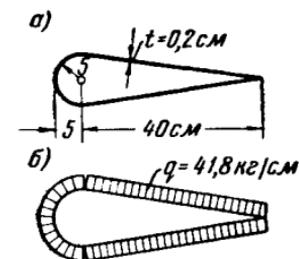
Необходимо отметить, что тонкостенный замкнутый профиль с неизменной формой сечения сопротивляется закручиванию значительно сильнее, чем

открытый с тем же очертанием контура. При одинаковых допускаемых напряжениях тонкостенный цилиндр (труба) выдерживает во много раз большую крутящую нагрузку (фиг. 7.10,а), чем открытый профиль, полученный из цилиндра, путем разреза его в продольном направлении (фиг. 7.10,б).

В первом случае допускаемая грузоподъемность определяется, исходя из формулы (7) для замкнутого профиля $M'_k = [\tau] \omega_k t$. Во втором случае нужно пользоваться формулой (3), как для вытянутого прямоугольника

$$M''_k = [\tau] \frac{st^2}{3}. \text{ Отсюда следует, что } \frac{M'_k}{M''_k} = \frac{\omega_k}{\frac{1}{3} st}$$

грузоподъемности превосходит открытый с той же площадью поперечного сечения во столько раз, во сколько удвоенная площадь, ограниченная контуром сечения, больше трети площади самого сечения. Крутящий момент, который может воспринять открытый профиль, по сравнению с моментом замкнутого профиля весьма незначителен, и обычно считают, что открытый профиль на кручение работать не может.



Фиг. 7.11. Пример определения напряжений при кручении.

а — сечение элерона; б — эпюра погонных касательных усилий в обшивке.

Также в пользу замкнутого сечения было бы сравнение и по деформациям. Жесткость на кручение открытого сечения во много меньше жесткости замкнутого (см. ниже § 4).

Пример 1. Определим напряжения в обшивке элерона, сечение которого изображено на фиг. 7.11,а, при скручивании его моментом $M_k = 200$ кгм. Сечение обшивки представляет собой замкнутый контур. Неизменность контура обеспечивается первьюрами.

Удвоенная площадь, ограниченная контуром сечения обшивки,

$$\omega_k = 2 \left(\frac{3,14 \cdot 10^2}{4 \cdot 2} + \frac{10 \cdot 40}{2} \right) = 478 \text{ см}^2.$$

Погонное касательное усилие в ней находим по формуле (6):

$$q = \frac{M_k}{\omega_k} = \frac{20\,000}{478} = 41,8 \text{ кг/см.}$$

Касательные напряжения равны

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{41,8}{0,2} = 209 \text{ кг/см}^2.$$

На фиг. 7.11,б изображена эпюра q . При постоянной толщине стенок такой же вид имеет и эпюра τ . Если бы обшивка имела продольный разрез, то напряжения в ней пришлось бы вычислять как в открытом профиле по формуле (3). Для сравнения определим эти напряжения. Длина периметра контура

$$s = 3,14 \cdot 5 + 2 \sqrt{5^2 + 40^2} = 96,3 \text{ см.}$$

Касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{3M_k}{st^2} = \frac{3 \cdot 20\,000}{96,3 (0,2)^2} = 15\,600 \text{ кг/см}^2$$

увеличиваются в $\frac{15\,600}{209} = 75$ раз, и, конечно, никакой материал их не выдержит.

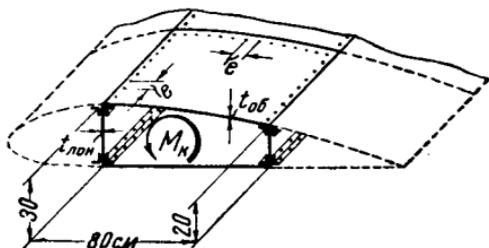
В этом случае обшивка получает значительные деформации и выходит из работы. Для передачи крутящей нагрузки необходимо предусмотреть другие элементы конструкции.

Пример 2. Часть крыла самолета, воспринимающая крутящую нагрузку, состоит из двух тонкостенных лонжеронов и соединяющих их листов обшивки (фиг. 7.12). Носок и хвостик сечения крыла имеют вырезы и поэтому при расчете не принимаются во внимание. Листы обшивки толщиной $t=0,15$ см соединены между собой и с лонжеронами заклепками диаметром $d=3$ мм с шагом $e=4$ см. Определить напряжения среза и смятия заклепок, если крутящий момент $M_k=260$ кгм.

Работающая часть крыла представляет собой замкнутый профиль с очертанием, весьма близким к трапеции. Из формулы (6) следует, что усилие q не зависит от толщины стенок, следовательно, соединительные угольники не влияют на его величину:

$$q = \frac{M_k}{\omega_k} = \frac{26\,000}{2 \left(\frac{30+20}{2} \right) 80} = 6,5 \text{ кг/см.}$$

Оно возникает как в поперечных, так и в продольных сечениях и передается на заклепки поперечных швов между листами, а также на заклепки, соединяющие листы с лонжеронами. На каждую заклепку приходится сила $P=qe=6,5 \cdot 4=26$ кг, вызывающая срез заклепки и смятие листа. Напряжение среза



Фиг. 7.12. К расчету заклепок обшивки крыла при его кручении.

$$\tau = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{26}{\frac{3,14 (0,3)^2}{4}} = 368 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжение смятия

$$\sigma_{см} = \frac{P}{td} = \frac{26}{0,15 \cdot 0,3} = 578 \text{ кг/см}^2.$$

Задачи 1. Круглая труба со стенкой толщиной $t=2$ мм и диаметром контура $d=100$ мм нагружена моментом $M_k=100$ кгм. Сравнить напряжения, вычисленные в ней, как в замкнутом контуре и как в полой валу. **Ответ:** $\tau_{замк}=319$ кг/см²; $\tau_{нар}=326$ кг/см²; $\tau_{внут}=314$ кг/см².

2. Лист толщиной $t=0,8$ см свернут в прямоугольный цилиндр с размерами контура поперечного сечения 15×24 см. Продольные края листа соединены внахлестку одним рядом заклепок диаметром $d=2$ мм, расположенных через 8 мм друг от друга. Определить крутящий момент, который может выдержать соединение, если для заклепок допускаемое напряжение на срез $[\tau]=1120$ кг/см² и на смятие $[\sigma_{см}]=2800$ кг/см². **Ответ:** $M_k=318$ кг см.

3. Замкнутый профиль в виде равнобедренного треугольника с основанием 12 см и высотой 25 см подвергается действию крутящего момента $M_k=72$ кгм. Определить наименьшую толщину стенок, чтобы напряжения нигде не превосходили $\tau=200$ кг/см². **Ответ:** $t=1,2$ мм.

§ 4. Деформация тонкостенного стержня

Основные предпосылки. За последние годы большое развитие получила новая теория расчета тонкостенных конструкций, в создании которой весьма значительны заслуги советских ученых. Особые успехи в этом

отношении достигнуты проф. В. З. Власовым, проф. А. А. Уманским и их сотрудниками¹.

Основы созданной ими теории излагаются ниже. Принятое в предыдущем параграфе предположение, что при деформации обеспечена *неизменяемость формы контура* и очертания сечений остаются одинаковыми, сохраняется и в дальнейшем. Как уже указывалось, последнее достигается постановкой поперечных диафрагм, нервюр или шпангоутов, которые не деформируются в своей плоскости и этим придают контуру неизменную форму. Однако эти диафрагмы не оказывают никакого сопротивления перемещениям из их плоскости, т. е. из плоскости поперечных сечений; деформация в продольном направлении происходит совершенно свободно. Поперечные сечения поворачиваются друг относительно друга как диски, не меняющие формы своего контура: круг остается кругом, прямоугольник — прямоугольником, но в то же время деформация сечения может возникать без всяких препятствий. Рассматриваются только *призматические* стержни. Продольные перемещения точек наружной поверхности стенки стержня отличаются от перемещений точек сечения по ее средней линии на пренебрежимо малую величину. Деформация сечения определяется как *деформация контура* (средней линии) сечения, и по толщине стенки продольные смещения считаются одинаковыми. Крыло самолета или фюзеляж представляют собой конструкции, которые полностью соответствуют принятым условиям. Правда, эти конструкции не являются призматическими, но в первом приближении их можно разбить на участки и рассматривать каждый участок как призматический.

При закручивании стержней с замкнутым профилем в поперечных сечениях обязательно возникают касательные усилия q по средней линии стенки (фиг. 7.8). В стержнях с открытым профилем эти усилия отсутствуют (фиг. 7.5). Деформация тонкостенных стержней круглого замкнутого сечения такая же, как и бруса сплошного круглого сечения (фиг. 6.3): сечения остаются плоскими и после закручивания. Несколько иначе происходит деформация тонкостенных стержней некруглого сечения. Если закручивать, положим, коробчатый стержень с прямоугольным контуром и с одинаковой толщиной стенок t (фиг. 7.13,а), то каждая его прямоугольная грань превращается в параллелограмм (фиг. 7.13,б). Поперечные сечения не остаются плоскими, а деформируются. В отличие от стержня сплошного прямоугольного сечения в тонкостенном коробчатом стержне изменение прямых углов между продольными и поперечными линиями происходит одинаково по всей ширине каждой грани (ср. фиг. 7.1).

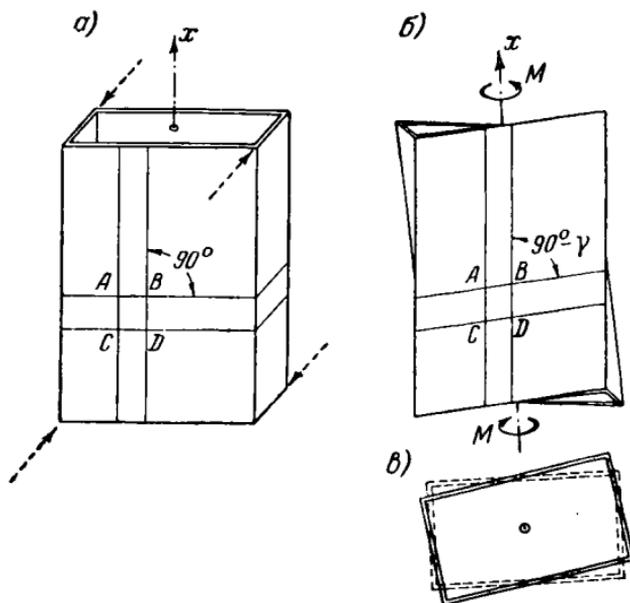
Таким образом кручение тонкостенных стержней с любым очертанием контура сопровождается, во-первых, поворотом сечений, а во-вторых, деформацией сечений. Прямые углы между продольными и поперечными линиями изменяются на угол, равный относительному сдвигу γ . Он связан с касательными усилиями зависимостью [гл. V, формула (2)]

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{q}{Gt}.$$

Так как $q = \text{const}$, то для профилей с постоянной толщиной t угол сдвига тоже постоянный. Вследствие деформации сечений точки, расположенные на контуре, выходят из своей плоскости и наклон получают не только продольные, но и поперечные линии (фиг. 7.13,б). Это оказывает существенное влияние на величину угла сдвига, которое нельзя не учитывать при определении деформации кручения.

¹ В. З. Власов, Упругие тонкостенные стержни, Москва, 1940. В. З. Власов, Общая теория оболочек, ГТТИ, Москва—Ленинград, 1949. В. З. Власов, Строительная механика тонкостенных пространственных систем, Стройиздат, Москва, 1949. А. А. Уманский, Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций, Оборонгиз, Москва, 1939. Д. В. Бычков и К. Ю. Мрощинский, Кручение металлических балок, 1945. А. М. Афанасьев, В. Т. Байков, В. А. Марьян и др., Сборник задач по расчету тонкостенных конструкций, Оборонгиз, Москва, 1941.

Деформация. Выделим из тонкостенного бруса (фиг. 7.14, а) двумя поперечными сечениями малый элемент длиной Δx , изображенный на фиг. 7.14, б в увеличенном масштабе. При закручивании бруса верхнее сечение элемента повернется около некоторого полюса O на малый угол $\Delta\varphi$ по отношению к нижнему сечению, которое будем считать неподвижным. Если принять, что точка A перейдет в положение A' , оставаясь в плоскости верхнего сечения, то другие точки сечения вследствие наклона поперечных линий сместятся также и в продольном направлении. Точка A опишет дугу $\rho\Delta\varphi$, где радиус $\rho=OA=OA'$. По малости деформаций и угла $\Delta\varphi$ дугу можно приравнять секущей, $\rho\Delta\varphi=AA'$. Сдвиг при этом происходит в направлении усилия q_x^r по касательной к контуру. Поэтому, чтобы



Фиг. 7.13. Деформация тонкостенного стержня. а — коробчатый стержень с прямоугольными гранями; б — одинаковое изменение прямых углов по всей ширине; в — сечение поворачивается, не меняя своей формы.

получить величину смещения точки A , именно в плоскости сдвига стенки нужно отрезок AA' спроектировать на касательную к контуру. По фиг. 7.14, в находим

$$AA_1 = AA' \cos \alpha = \rho \Delta\varphi \cos \alpha.$$

Угол α образован касательной к контуру в точке A с направлением перемещения AA' , которое происходит перпендикулярно переменному радиусу ρ . Если провести нормаль r из полюса на направление касательной, то угол между ρ и r будет также равен α , как образованный сторонами, перпендикулярными к касательной и к направлению перемещения. Принимая во внимание, что $\rho \cos \alpha = r$, и произведя эту замену, получаем

$$AA_1 = r \Delta\varphi.$$

Эта зависимость уже знакома нам из теории кручения круглого вала, где мы пользовались ею при выводе закона пропорциональности и формулы (1) главы VI (фиг. 6.5, б). Тогда направление перемещения совпадало с касательной и нормаль r совпадала с радиусом ρ .

На фиг. 7.15 изображены в плоскости прямоугольный элемент $ABCD$ со сторонами Δx и Δs , выделенный из стенки прямоугольными и попе-

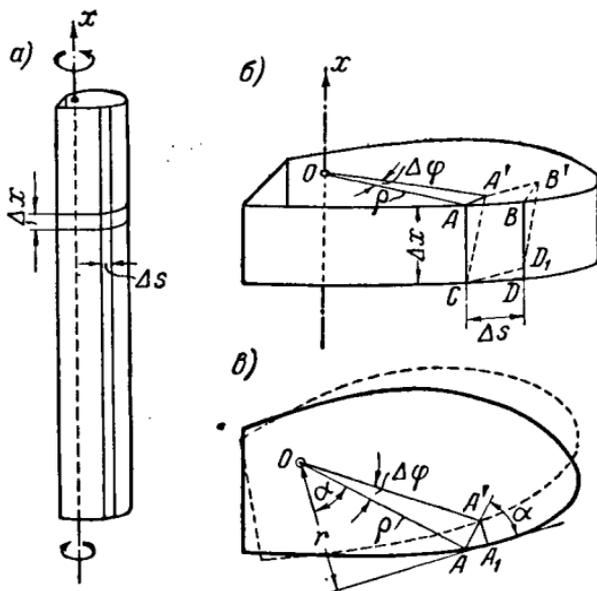
речными линиями до деформации стержня (фиг. 7.14), и тот же элемент после деформации ($A_1B_1CD_1$). Вследствие наклона продольных линий в зависимости от угла закручивания получается угол

$$\gamma_1 = \frac{AA_1}{\Delta x} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta x} = r\vartheta.$$

Вследствие наклона поперечных линий получается угол

$$\gamma_2 = \frac{DD_1}{\Delta s} = \frac{\Delta W}{\Delta s}.$$

Точка D смещается в продольном направлении на величину $DD_1 = \Delta W$.



Фиг. 7.14. Перемещения точек сечения при закручивании.

a — тонкостенный брус с замкнутым сечением произвольной формы;
 b — взаимное смещение точек контура при повороте верхнего сечения элемента относительно нижнего; c — проекция повернутого сечения на первоначальную плоскость.

которая представляет собой приращение деформации сечения на малом участке Δs контура. Угол сдвига, равный изменению прямого угла, зависит от угла закручивания и от деформации (фиг. 7.15), $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = r\vartheta + \frac{\Delta W}{\Delta s}$. С другой стороны, $\gamma = \frac{q}{Gt}$. Приравнявая оба выражения угла сдвига, находим зависимость между касательными усилиями, углом закручивания и деформацией

$$r\vartheta + \frac{\Delta W}{\Delta s} = \frac{q}{Gt}.$$

Эта зависимость дает широкие возможности для изучения деформаций тонкостенных профилей. Прежде всего составим выражение для приращения деформации, перенеся $r\vartheta$ в правую часть и умножив полученную зависимость на Δs ,

$$\Delta W = \frac{q}{G} \frac{\Delta s}{t} - \vartheta r \Delta s.$$

Величина $r\Delta s = \Delta\omega$ нам уже встречалась. Она является удвоенной площадью малого сектора (фиг. 7.8, б). Для сокращения записи приведем действительную длину Δs , измеренную по средней линии сечения с переменной толщиной стенок, к длине $\Delta s'$ другого, эквивалентного профиля с постоянной толщиной, равной 1. Иначе говоря, условимся длину, отнесенную к единице толщины, называть *приведенной длиной* $\Delta s' = \frac{\Delta s}{t}$.

Таким образом *приращение депланации замкнутого профиля* будет

$$\Delta W = \frac{q}{G} \Delta s' - \vartheta \Delta\omega. \quad (8)$$

В открытом профиле касательное усилие q отсутствует, как это показано в § 2 (фиг. 7.5), следовательно, член $\frac{q}{G} \Delta s'$ обращается в нуль и *приращение депланации открытого профиля* равно

$$\Delta W = -\vartheta \Delta\omega,$$

Депланацию какой-либо точки N по отношению к произвольной точке M , находящейся на расстоянии s от точки N , принятой за начальную, получим, суммируя приращения депланации на этом участке профиля

$$W = \int_0^s \Delta W$$

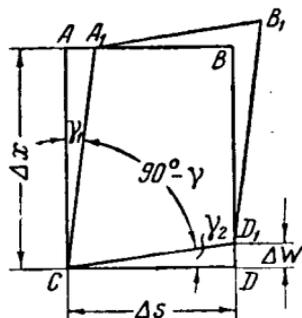
В стержнях с замкнутым профилем при некоторых соотношениях размеров сечения, при которых $\frac{q}{G} \Delta s' = \vartheta \Delta\omega$, величина ΔW получается равной нулю и депланация отсутствует. Например, известно, что сечение круглой трубы остается плоским при кручении. Но в стержнях с открытым профилем кручение всегда вызывает депланацию сечения.

Пример 1. Установить соотношение размеров прямоугольного замкнутого профиля со стенками различной толщины (фиг. 7.9, а), при котором сечение останется плоским (не депланирует) при кручении.

Это возможно, если $\frac{q}{G} \frac{\Delta s}{t} = \vartheta \Delta\omega$. Обе части этого равенства умножим на $\frac{t}{\vartheta \Delta s}$; тогда $\frac{q}{G \vartheta} = rt$. Слева получаем постоянную величину, так как q и ϑ для всего сечения одинаковые; следовательно, контур не будет депланировать, если и правая часть будет постоянной, $rt = \text{const}$, для всех участков сечения любого очертания. В прямоугольнике это возможно, когда размеры подобраны так, что $rt = \frac{a}{2} t_s = \frac{b}{2} t_a$.

При постоянной толщине стенок, например, квадратное сечение и вообще всякое сечение в виде правильного многоугольника не депланирует, потому что нормаль r , проведенная из центра на направление любой стороны, будет для всего контура иметь одну и ту же величину. Но если rt не является постоянным, то замкнутый профиль при кручении обязательно депланирует.

Уравнение замкнутости. Разрежем замкнутый профиль по образующей (фиг. 7.16, а), превратив его таким образом в открытый. Кручение разрезанного профиля вызовет продольное смещение соприкасающихся сечений P_0Q_0 и PQ (фиг. 7.16, б). Наглядное представление об этой деформации легко получить на модели тонкостенного открытого профиля, выполненной из прямоугольного листа дуралюмина или даже просто из листа плотной



Фиг. 7.15. Деформация прямоугольного элемента $ABCD$, выделенного из тонкостенного бруса.

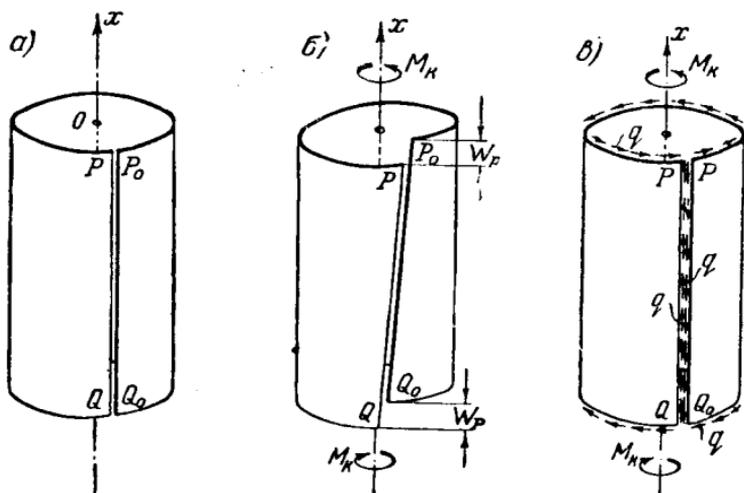
бумаги, свернутого в трубку. При закручивании такой модели края будут скользить друг по другу в продольном направлении, и точки плоского сечения выйдут из своей плоскости (фиг. 7.16,б). Разница между продольными перемещениями совпадающих точек P_0 и P представляет собой депланацию W открытого профиля, которая равна сумме приращений ΔW всего контура,

$$W = \sum_k \Delta W = -\vartheta \sum_k \Delta \omega.$$

Угол ϑ имеет постоянное значение, является углом закручивания открытого профиля и вычисляется по формуле (4). Он резко отличается по величине от угла закручивания замкнутого профиля. Величина

$$\sum_k \Delta \omega = \omega_k$$

здесь представляет собой удвоенную площадь контура, потому что точки P_0 и P совпадают, и подвижный конец радиуса ρ должен обойти весь контур.



Фиг. 7.16. Условие замкнутости.

а — стержень с замкнутым сечением разрезан по образующей; б — депланация открытого профиля; в — погонные касательные усилия q устраняют депланацию.

Приложим теперь по краям P_0Q_0 и PQ погонное касательное усилие q , направленное вдоль разреза в сторону, противоположную смещению краев. По закону парности оно вызовет в поперечных сечениях такое же по величине усилие q и, кроме того, оно уменьшит депланацию краев открытого профиля. Если подобрать q так, чтобы $q\omega_k = M_k$, где M_k — момент, вызывающий депланацию W_p открытого профиля, то расхождение точек у разреза должно исчезнуть и открытый профиль вновь станет замкнутым (фиг. 7.16,в). При этом угол закручивания стержня значительно уменьшится.

При депланации в замкнутом профиле одни точки контура получают смещение в положительном, другие в отрицательном направлении оси x , но между продольными смещениями смежных точек не должно быть разницы W . Сумма приращений депланации (8) по всему замкнутому контуру должна равняться нулю

$$\sum_k \frac{q}{G} \Delta s' - \sum_k \vartheta \Delta \omega = 0.$$

Так как G и ϑ являются постоянными величинами, вынесем их из-под знака суммы, умножим уравнение на G и перенесем его второй член вправо. Принимая во внимание, что $\sum_k \Delta\omega = \omega_k$, окончательно находим

$$\sum_k q \Delta s' = G \vartheta \omega_k. \quad (9)$$

Эта зависимость называется *уравнением замкнутости*. В этом уравнении q может быть величиной изменяемой. Уравнение (9) показывает, что сумма касательных усилий, распределенных на приведенном периметре, подсчитанная по длине контура, должна равняться удвоенной площади контура, умноженной на $G\vartheta$.

Угол закручивания. Уравнение замкнутости имеет большое практическое значение. Мы используем его в первую очередь для определения угла закручивания замкнутого профиля, для которого касательные усилия q при кручении, как известно, являются постоянными. Чтобы вычислить $\sum_k q \Delta s'$, достаточно умножить постоянную величину q на сумму приведенных длин, которая называется *приведенным периметром* контура

$$s'_k = \sum_k \Delta s' = \sum_k \frac{\Delta s}{t}.$$

При кручении замкнутого профиля уравнение замкнутости получается в виде

$$q s'_k = G \vartheta \omega_k.$$

Учитывая значение q по формуле (6), находим угол закручивания

$$\vartheta = \frac{q}{G \frac{\omega_k}{s'_k}} = \frac{M_k}{G \frac{\omega_k^2}{s'_k}}. \quad (10)$$

Формулу угла закручивания можно преобразовать к более привычному виду, если обозначить $\frac{\omega_k^2}{s'_k} = J_k$. Величина J_k имеет размерность $см^4$ и

характеризует жесткость сечения на кручение. Таким образом в замкнутом профиле для угла закручивания можно применять общую формулу

$$\vartheta = \frac{M_k}{G J_k}.$$

Особенность состоит лишь в том, что J_k определяется иначе, чем в круглом или прямоугольном валу или в открытом профиле. По сравнению с последним в замкнутом профиле жесткость на кручение получается значительно большей при одинаковой конфигурации и площади поперечных сечений обоих профилей.

Пример 2. Брус, изготовленный из стального листа толщиной $t = 1$ мм, имеет сечение, изображенное на фиг. 7.10,б. При закручивании его крайние точки A_0 и A у продольной щели сместились вдоль оси бруса на 18 мм. Определить касательное усилие q , которое необходимо приложить по краям листа, чтобы уничтожить продольное расхождение крайних точек.

Мы не можем здесь воспользоваться условием замкнутости и подставить в него заданную для соприкасающихся точек деформацию открытого профиля $W_A = -\vartheta \omega_k = 1,8$ см, потому что соответствующий ей крутящий момент вызывает различные углы закручивания в замкнутом и открытом профилях. Поэтому, вычислив удвоенную площадь контура

$$\omega_k = 2 \left(\frac{3,14 \cdot 8^2}{2 \cdot 4} + 5 \cdot 8 \right) = 130,2 \text{ см}^2,$$

сначала воспользуемся формулой $W_A = -\vartheta \omega_k$ и найдем при заданной деформации угол закручивания открытого профиля

$$\vartheta = -\frac{W_A}{\omega_k} = -\frac{1,8}{130,2} = -0,0138 \frac{1}{\text{см}}.$$

Затем определим соответствующий ему крутящий момент по формуле (4)

$$M_k = \vartheta G \frac{S t^3}{3} = -0,0138 \cdot 800\,000 \frac{(8+2 \cdot 5+3,14 \cdot 4) 0,1^3}{3} = -113 \text{ кг см}.$$

Искомое касательное усилие равно

$$q = \frac{M_k}{\omega_k} = -\frac{113}{130,2} = -0,87 \text{ кг/см}.$$

Для сравнения определим угол закручивания замкнутого профиля (фиг. 7.10, а). При постоянной толщине приведенный периметр равен действительному, деленному на толщину

$$s'_k = \frac{s_k}{t} = \frac{8+2 \cdot 5+3,14 \cdot 4}{0,1} = 306.$$

По формуле (10)

$$\vartheta = \frac{q}{G \frac{\omega_k}{s'_k}} = \frac{0,87}{800\,000 \frac{130,2}{306}} = 0,0000025 \frac{1}{\text{см}}.$$

Жесткость замкнутого профиля, как уже отмечалось, значительно превосходит жесткость открытого.

Пример 3. Вычислить погонный угол закручивания крыла, сечение которого показано на фиг. 7.12, если крутящий момент $M_k = 60\,000 \text{ кг см}$ и модуль сдвига $G = 280\,000 \text{ кг/см}^2$. Толщина стенок лонжеронов $t_{\text{лон}} = 3 \text{ мм}$ и толщина обшивки $t_{\text{об}} = 1,5 \text{ мм}$. Носок и хвостик имеют вырезы и являются открытыми частями профиля, обладающими ничтожной жесткостью. Таким образом крутящий момент воспринимается главным образом средней, замкнутой частью сечения крыла. Угольники, соединяющие лонжероны с обшивкой, не влияют на жесткость при кручении. Удвоенная площадь контура средней части крыла

$$\omega_k = 2 \left(\frac{20+30}{2} \right) 80 = 4000 \text{ см}^2.$$

Приведенный периметр

$$s'_k = \sum_k \frac{\Delta s}{t} = \frac{30}{0,3} + \frac{80}{0,15} + \frac{20}{0,3} + \frac{\sqrt{80^2 + 10^2}}{0,15} = 1237.$$

Для определения жесткости на кручение замкнутого профиля вычисляем

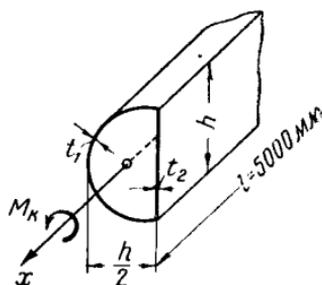
$$J_R = \frac{\omega_K^2}{s'_K} = \frac{4000^2}{1237} = 12930 \text{ см}^4.$$

Погонный угол закручивания будет

$$\vartheta = \frac{M_K}{GJ_R} = \frac{60\,000}{280\,000 \cdot 12\,930} = 0,0000166 \frac{1}{\text{см}},$$

или $0,0000166 \frac{180 \cdot 100}{3,14} 60 = 5,7' = 5'42''$ на погонный метр.

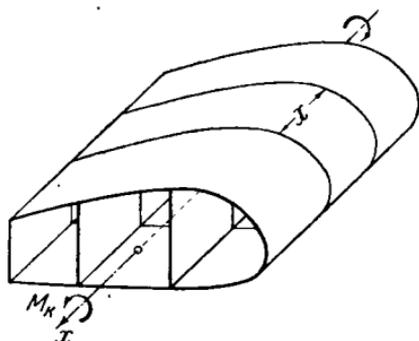
Задача. Определить напряжения в обшивке и в стенке лонжерона носка крыла (фиг. 7.17) и вычислить его абсолютный угол закручивания, если носок нагружен крутящим моментом $M_K = 150 \text{ кгм}$. Обшивка толщиной $t_1 = 1 \text{ мм}$ имеет сечение в виде полукруга с диаметром, равным высоте лонжерона $h = 200 \text{ мм}$; толщина стенки последнего $t_2 = 2 \text{ мм}$. Материал дуралюмин, $G = 273\,000 \text{ кг/см}^2$. **Ответ:** $\tau_1 = 477 \text{ кг/см}^2$; $\tau_2 = 238 \text{ кг/см}^2$; $\varphi = 6,6^\circ$.



Фиг. 7.17. К примеру расчета на кручение.

§ 5. Многоконтурный профиль

Распределение погонных касательных усилий. Если в тонкостенном брус с замкнутым контуром поставить внутри продольную стенку, соединяющую внешний контур, то его сечение будет составлять не один, а два замкнутых контура, объединенных в одно целое. Поставив две



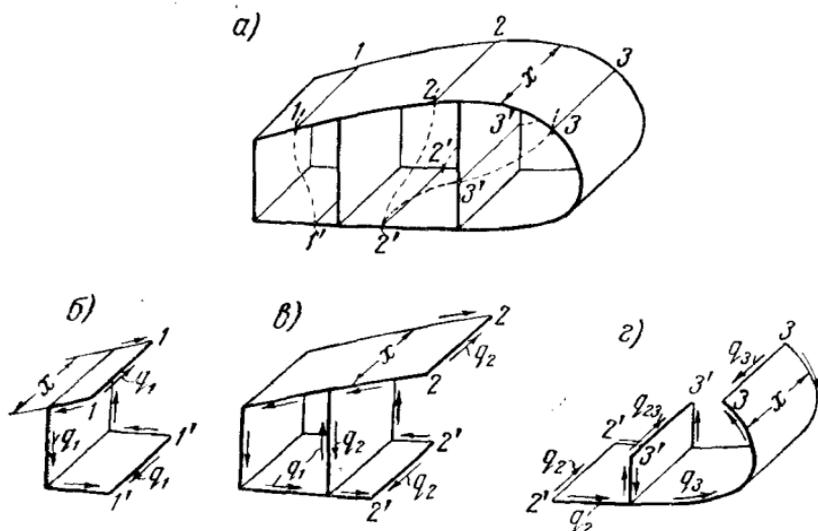
Фиг. 7.18. Тонкостенный брус с трехконтурным профилем.

внутренние стенки (фиг. 7.18), получим три замкнутых контура и т. д. Например, двухлонжеронное крыло в сечении имеет три замкнутых контура. Сечение, состоящее из нескольких замкнутых контуров, называется многоконтурным, многозамкнутым или многосвязным профилем. Основные предпосылки, принятые нами в предыдущем параграфе, остаются в силе также и для многоконтурного профиля. Важнейшая из них — неизменность очертания контура тонкостенного профиля — обеспечивается постановкой часто расположенных поперечных диафрагм или нервюр, и тогда сечения поворачиваются при кручении, как жесткие в своей плоскости диски.

Крутящая нагрузка вызывает в многоконтурном профиле касательные усилия, которые для каждого контура в отдельности имеют постоянные значения, но в то же время неодинаковые для различных контуров сечения.

В самом деле, возьмем для примера тонкостенный брус с трехконтурным профилем (фиг. 7.18), вырежем из него двумя поперечными сечениями

участок длиной x (фиг. 7.19,а) и отделим в нем часть, положим, первого контура продольным сечением 1—1', не затрагивая соседнего контура (фиг. 7.19,б). Составляя условие равновесия отделенной части, все силы, приложенные к ней, спроектируем на продольную ось x , подобно тому, как это было сделано при выводе зависимости по фиг. 7.7. Из условия равновесия легко убедиться, что касательные усилия q_1 по краям 1—1 и 1'—1' должны быть одинаковыми. По закону парности такие же усилия будут в поперечном сечении у точек 1 и 1'. Так как точки выбраны произвольно, то можно сказать, что погонное касательное усилие q_1 постоянно для всех точек первого контура, через которые можно провести разрез, не затрагивая других контуров.



фиг. 7.19. Погонные касательные усилия постоянны в пределах каждого контура.

x — элемент, выделенный из бруса с трехконтурным профилем;
 б — продольный разрез элемента по первому контуру; в — по второму контуру; г — разрез через промежуточную стенку.

Точно так же, разрезая брус вдоль через второй контур сечением 2—2', обнаружим постоянство усилия q_2 (фиг. 7.19,в). Аналогично в стенках, принадлежащих только третьему контуру, будет постоянное усилие q_3 .

Если произвести разрез через два смежных контура, например, через второй и третий, то придется разрезать и промежуточную стенку. Касательное усилие вдоль ее грани q_{23} (фиг. 7.19,г) тоже будет постоянным. Составляя условие равновесия отрезанной части бруса в виде суммы проекций всех сил на ось x с учетом их направления (фиг. 7.19,г), получаем

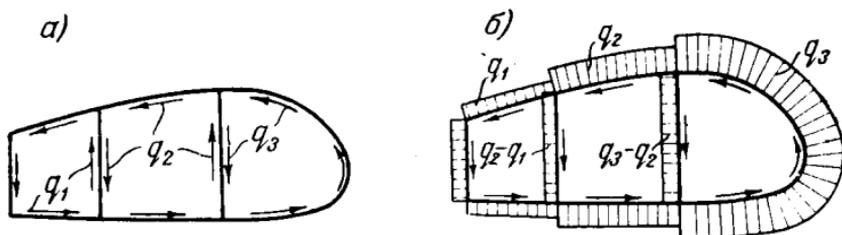
$$q_3x - q_2x - q_{23}x = 0,$$

откуда $q_{23} = q_3 - q_2$. Касательное усилие в промежуточной стенке равно разности усилий в смежных контурах. Если изобразить их на многоконтурном сечении, то на всех промежуточных стенках положительные усилия смежных контуров будут направлены в разные стороны (фиг. 7.20,а).

На эпюре погонных касательных усилий (фиг. 7.20,б) отложены в виде ординат, перпендикулярных контуру, величины q_1 , q_2 и q_3 на участках, принадлежащих только соответствующему контуру. Положительные q , как было условлено (фиг. 7.9), откладываются снаружи. На промежуточных стенках,

принадлежащих двум контурам одновременно, ординаты эпюры равны разности усилий смежных контуров и отложены снаружи того из них, в котором больше положительное усилие q . Если усилия q во всех контурах окажутся одинаковыми, то касательных усилий во внутренних стенках не будет. Наличие внутренних стенок в этом случае не внесет никаких изменений в распределение усилий, и многоконтурный профиль фактически станет одноконтурным.

Уравнения замкнутости. Рассмотрим для примера тот же трехконтурный профиль (фиг. 7.18) и применим к каждому его контуру в отдельности уравнение замкнутости. Обходя любой контур, неизбежно будем возвращаться к исходной точке, и сумма приращений деформации (8), накопленной на замкнутом пути, всегда будет равна нулю, что и приводит



Фиг. 7.20. Распределение погонных касательных усилий в многоконтурном профиле.

a — направление усилий q ; b — эпюра q .

к уравнению (9). Прежде всего преобразуем уравнение (9), разделив обе его части на постоянную для сечения величину $G\delta$. Для любого замкнутого контура, который входит в состав профиля, уравнение замкнутости можно записать так:

$$\sum_k \frac{q}{G\delta} \Delta s' = \omega_k.$$

Обозначим постоянное для отдельного контура касательное усилие деленное на $G\delta$, через

$$p = \frac{q}{G\delta}. \quad (11)$$

Усилие, равное p , возникает, как видно из последней формулы, при закручивании всего профиля на угол, при котором $G\delta = 1$. Поэтому будем называть его *единичным касательным усилием*. При таком угле закручивания нашего профиля в его первом контуре возникает единичное касательное усилие, равное p_1 , во втором контуре — p_2 , в третьем — p_3 . Эпюры этих усилий можно построить отдельно для каждого контура (фиг. 7.21). Если затем умножить каждую из них на $G\delta$, то получим соответственно эпюры q_1 , q_2 и q_3 , которые в сумме дают окончательную эпюру касательных усилий многоконтурного профиля (фиг. 7.20, б). С введением понятия касательного усилия p уравнение замкнутости принимает вид

$$\sum_k p \Delta s' = \omega_k. \quad (12)$$

Это выражение показывает, что сумма произведений единичных касательных усилий на соответствующие приведенные длины элементов контура, взятая по длине контура, должна равняться его удвоенной площади.

Чтобы составить эту сумму для первого контура, нужно принять во внимание, что на его стенки AB , BC и CD действует только положительное

касательное усилие p_1 , а на стенке DA касательное усилие равно разности $p_1 - p_2$ (фиг. 7.21). Таким образом

$$\begin{aligned} \sum_1 p \Delta s' &= p_1 s'_{AB} + p_1 s'_{BC} + p_1 s'_{CD} + (p_1 - p_2) s'_{DA} = \\ &= p_1 (s'_{AB} + s'_{BC} + s'_{CD} + s'_{DA}) - p_2 s'_{DA}. \end{aligned}$$

Стоящую в скобках сумму приведенных длин стенок первого контура, равную его приведенному периметру, обозначим s'_1 , а приведенную длину стенки

между первым и вторым контурами обозначим s'_{12} . Тогда искомая сумма будет

$$\sum_1 p \Delta s' = p_1 s'_1 - p_2 s'_{12}.$$

Она равна удвоенной площади, ограниченной контуром, независимо от положения полюса внутри или вне контура, так как при обходе по замкнутому пути переменный радиус ρ ометает площадь вне контура один раз в положительном, а второй раз в отрицательном направлении (фиг. 7.22). Остается только площадь внутри контура, которая и составляет $\omega_k = \omega_1$. Таким образом уравнение замкнутости первого контура будет

$$p_1 s'_1 - p_2 s'_{12} = \omega_1. \quad (12')$$

Точно так же, обходя второй контур, при составлении уравнения замкнутости, мы на всем его протяжении будем встречать положительную величину p_2 , которую нужно умножить на приведенный периметр s'_2 второго контура. На стенках, общих с первым и третьим контурами, встречаются величины p_1 и p_3 , действующие для среднего контура в отрицательном направлении (фиг. 7.21). Их нужно взять со знаком минус и

умножить соответственно на приведенные длины s'_{12} и s'_{23} промежуточных стенок. Сумма этих произведений составляет левую часть уравнения замкнутости. Правая его часть равна удвоенной площади ω_2 , ограниченной лишь вторым контуром. Запишем уравнение замкнутости второго контура, расположив по порядку усилия p :

$$-p_1 s'_{12} + p_2 s'_2 - p_3 s'_{23} = \omega_2. \quad (12'')$$

Совершенно аналогично записывается уравнение замкнутости третьего контура

$$-p_2 s'_{23} + p_3 s'_3 = \omega_3. \quad (12''')$$

Число таких уравнений во всяком многоконтурном профиле будет всегда равно числу его контуров. Это позволяет путем совместного решения развернутых уравнений замкнутости определить единичные касательные усилия p всех контуров.

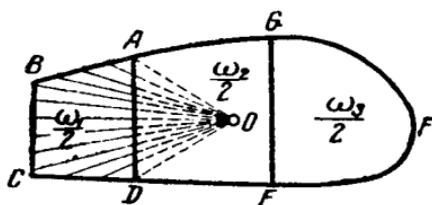
Угол закручивания. Зная величины p , легко перейти к касательным усилиям $q = G\vartheta p$. Но предварительно нужно знать погонный угол закручивания ϑ . Чтобы его определить, воспользуемся условием равновесия части бруса, отделенной поперечным разрезом (фиг. 7.23) Постоянное касательное усилие одного замкнутого контура из состава профиля создает момент, который равен углу этого контура, умноженному на его удвоенную площадь ω . Выражая касательное усилие через величину p , для первого контура получим момент $M_1 = q_1 \omega_1 = G\vartheta p_1 \omega_1$. Точно так же моменты второго и третьего контуров будут $M_2 = G\vartheta p_2 \omega_2$ и $M_3 = G\vartheta p_3 \omega_3$.

Условие равновесия отрезанной части бруса требует, чтобы

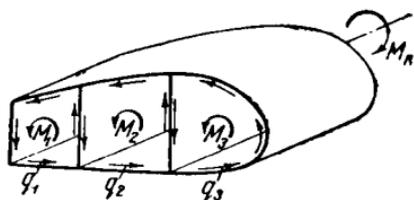
$$M_1 + M_2 + M_3 - M_k = 0.$$

Подставляя сюда полученные выше выражения моментов контуров, запишем условие равновесия так:

$$G\vartheta (p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 + p_3 \omega_3) = G\vartheta \sum p \omega = M_k,$$



Фиг. 7.22. Площадь, ометаемая радиусом-вектором, не зависит от положения полюса (при полном обходе замкнутого контура).



Фиг. 7.23. Схема равновесия отсеченной части бруса.

откуда получаем погонный угол закручивания многоконтурного профиля

$$\vartheta = \frac{M_k}{G \sum p \omega}. \quad (13)$$

Формулу погонного касательного усилия какого-нибудь контура получим, если в его выражение $q = G\vartheta p$ подставим найденный угол закручивания, а именно

$$q = \frac{M_k}{\sum p \omega} p. \quad (14)$$

Все время мы рассматривали в качестве примера трехконтурный профиль. Но совершенно очевидно, что высказанные до сих пор положения остаются справедливыми для любого сечения с произвольным числом замкнутых контуров, образованных введением как угодно расположенных внутренних стенок.

Жесткость на кручение. Наибольшие касательные усилия многоконтурного профиля и его угол закручивания можно представить в общей форме, если обозначить

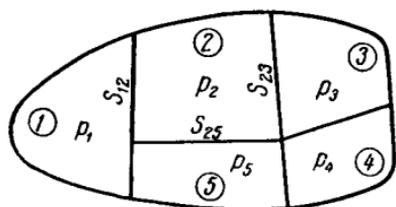
$$G \sum p \omega = G J_k \quad \text{и} \quad \frac{\sum p \omega}{p_{\max}} = \frac{J_k}{p_{\max}} = W_k. \quad (15)$$

Первая величина представляет собой жесткость на кручение многоконтурного профиля, а вторая — его момент сопротивления кручению. Их вычисление связано с предварительным определением величин p , которые мы представили как касательные усилия, соответствующие $G\vartheta = 1$.

Но из развернутых уравнений замкнутости легко убедиться, что величины p зависят только от размеров и конфигурации профиля, от длин стенок,

их толщин и удвоенных площадей контуров. Они характеризуют распределение касательных усилий по сечению и могут быть найдены совершенно независимо от нагрузки. Иногда величины p называются средними радиусами контуров. Определение их производится путем решения системы уравнений замкнутости, составление которых не представляет никаких трудностей [формулы (12)].

Для наглядности покажем, как записывается развернутое уравнение замкнутости какого-либо контура профиля, изображенного на фиг. 7. 24. Сначала перенумеруем контуры и напомним в них величины p . Тогда, предварительно вычислив приведенные длины всех стенок и удвоенные площади контуров, можно сразу написать уравнение замкнутости любого контура. Например, для второго контура по фиг. 7. 24 видим, что с ним граничат контуры первый, третий и пятый.



Следовательно, к произведению $p_2 s_2$ нужно приписать со знаком минус произведения: $-p_1 s_{12}$, $-p_3 s_{13}$, $-p_5 s_{15}$ и все это приравнять удвоенной площади второго контура. Располагая члены уравнения по порядку величин p , получаем

$$-p_1 s_{12} + p_2 s_2 - p_3 s_{13} - p_5 s_{15} = \omega_2.$$

Фиг. 7. 24. Схема для составления уравнения замкнутости.

Продолжая это для других контуров, составляем систему уравнений, из решения которой находим искомые величины p .

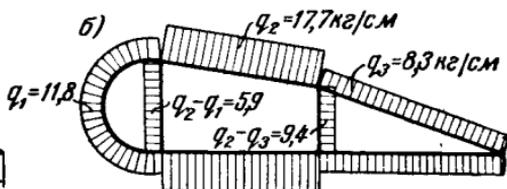
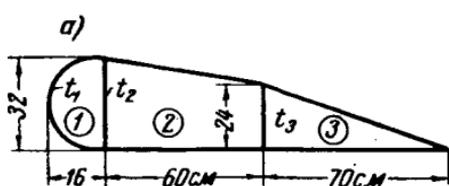
Вычислив затем жесткость на кручение профиля (15), определяем касательные усилия любого контура и угол закручивания бруса по формулам

$$q = \frac{M_k}{J_k} p; \quad \vartheta = \frac{M_k}{GJ_k}.$$

Наибольшие усилия будут в контуре с наибольшей величиной p . Из полученных результатов легко получить уже известные формулы для замкнутого, одноконтурного профиля, рассматривая его как частный случай многоконтурного.

Введение величин p позволяет свести расчет на кручение многоконтурного профиля к общим формулам. Это особенно удобно, когда приходится иметь дело с различными случаями приложения нагрузки.

Пример 1. Построить эпюру погонных касательных усилий в тонкостенном профиле крыльевого типа (фиг. 7. 25) при нагружении его моментом



Фиг. 7. 25. Пример расчета на кручение трехконтурного профиля.

а — тонкостенный профиль по типу сечения крыла; б — эпюра погонных касательных усилий при кручении.

$M=800$ кгм и определить абсолютный угол закручивания, если длина бруса (размах крыла) $l=4,5$ м. Толщина обшивки $t_1=1$ мм, толщина стенки переднего лонжерона $t_2=4$ мм, заднего $t_3=2$ мм. Материал — дуралюмин.

Прежде всего обозначаем номера контуров и вычисляем последовательно приведенные периметры и длины общих стенок:

$$s'_1 = \frac{3,14 \cdot 16}{0,1} + \frac{32}{0,4} = 583;$$

$$s'_2 = \frac{32}{0,4} + \frac{60}{0,1} + \frac{24}{0,2} + \frac{\sqrt{60^2 + 8^2}}{0,1} = 1405;$$

$$s'_3 = \frac{24}{0,2} + \frac{70}{0,1} + \frac{\sqrt{24^2 + 70^2}}{0,1} = 1560;$$

$$s'_{12} = \frac{32}{0,4} = 80; \quad s'_{23} = \frac{24}{0,2} = 120.$$

Удвоенные площади контуров:

$$\omega_1 = \frac{3,14 \cdot 32^2}{4} = 805 \text{ см}^2; \quad \omega_2 = (32 + 24) 60 = 3360 \text{ см}^2;$$

$$\omega_3 = 24 \cdot 70 = 1680 \text{ см}^2.$$

Составляем уравнения замкнутости

$$\begin{aligned} 583p_1 - 80p_2 &= 805 \\ - 80p_1 + 1405p_2 - 120p_3 &= 3360 \\ - 120p_2 + 1560p_3 &= 1680. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения совместно, находим

$$p_1 = 1,73 \text{ см}^2; \quad p_2 = 2,59 \text{ см}^2; \quad p_3 = 1,27 \text{ см}^2.$$

Теперь вычисляем величину

$$J_k = \sum p \omega = 1,73 \cdot 805 + 2,59 \cdot 3360 + 1,27 \cdot 1680 = 11720 \text{ см}^4.$$

Затем находим погонные касательные усилия контуров

$$q_1 = \frac{M_k}{J_k} p_1 = \frac{80000}{11720} 1,73 = 11,8 \text{ кг/см};$$

$$q_2 = \frac{80000}{11720} 2,59 = 17,7 \text{ кг/см};$$

$$q_3 = \frac{80000}{11720} 1,27 = 8,7 \text{ кг/см}.$$

Эпюра касательных усилий изображена на фиг. 7.25, б. Наибольшие напряжения возникают в средней части обшивки

$$\tau_{\max} = \frac{q_2}{t_1} = \frac{17,7}{0,1} = 177 \text{ кг/см}^2.$$

Наконец, вычисляем абсолютный угол закручивания крыла

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_k} = \frac{80\,000 \cdot 450}{280\,000 \cdot 11\,720} = 0,011 \text{ радиан или}$$

$$\varphi = 0,011 \frac{180}{\pi} = 0,64^\circ.$$

Задача 1. Прямоугольный профиль со сторонами 25×80 см и толщиной стенок $t_1 = 1$ мм разделен на два контура внутренней стенкой, поставленной параллельно короткой стороне на расстоянии 20 см от середины сечения. Определить касательные напряжения внутренней стенки толщиной $t_2 = 5$ мм при нагружении профиля крутящим моментом $M_k = 1620$ кгм. Ответ: $\tau = 20$ кг/см².

Контрольные вопросы

1. В чем состоит отличие деформации кручения бруса некруглого сечения от деформации кручения круглого бруса?
2. Что называется депланацией сечения?
3. Где получается наибольший угол сдвига при кручении прямоугольного бруса?
4. В каких точках прямоугольного сечения возникают наибольшие напряжения от кручения? Какие точки не испытывают напряжений?
5. Как изменяются напряжения кручения вдоль длинной стороны сечения, имеющего вид вытянутого прямоугольника? Чему они равны в срединной поверхности?
6. Что такое «открытый профиль»? Контур сечения? Почему открытый профиль можно рассчитывать как брус с узким прямоугольным сечением?
7. Как доказать, что погонное касательное усилие при кручении стержня замкнутого профиля одинаково для всех точек контура?
8. Доказать, что момент внутренних усилий при кручении равен касательному усилию, умноженному на удвоенную площадь, ограниченную контуром.
9. Показать, как построить эпюру касательных усилий замкнутого профиля.
10. В каких местах замкнутого профиля с различной толщиной стенок возникает наибольшее касательное напряжение?
11. Какие напряжения появляются при кручении в продольных сечениях тонкостенного бруса? Их величина? Возникают ли нормальные напряжения при кручении тонкостенного профиля и где?
12. Для чего ставятся нервюры и шпангоуты?
13. Какой профиль, открытый или замкнутый, обладает большей грузоподъемностью и почему?
14. Перечислите основные допущения, которые принимаются в теории тонкостенных стержней.
15. Чему равна приведенная длина дуги контура? Приведенный периметр контура?
16. Какие замкнутые сечения, кроме круглых, остаются плоскими при деформации кручения?

17. Какие допущения положены в основу теории кручения многоконтурного профиля? Чем достигается неизменность формы его сечения?

18. Как распределяются касательные усилия в многоконтурном профиле? Из какого условия следует, что касательные усилия в отдельных контурах постоянны? Чему они равны в промежуточных стенках?

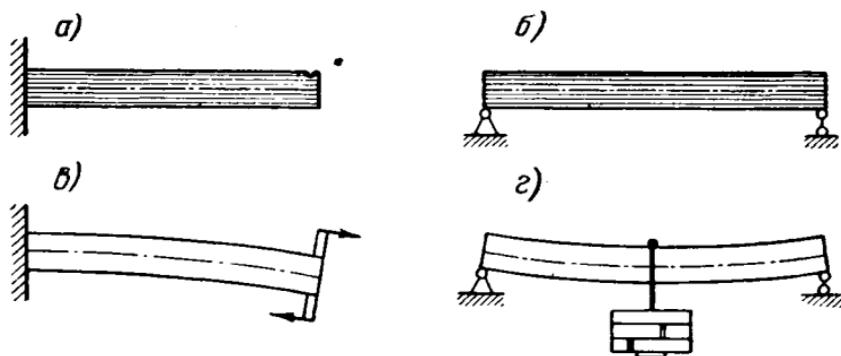
19. Из какого условия выводится формула угла закручивания многоконтурного профиля?

20. В каком порядке производится расчет на кручение многоконтурного профиля?

Глава VIII
ИЗГИБ. УСИЛИЯ

§ 1. Явление изгиба

Возьмем прямой брус постоянного сечения, заделанный горизонтально одним концом в стену (фиг. 8. 1,а) или лежащий свободно на двух опорах (фиг. 8. 1,б). Если приложить момент, действующий в плоскости, проходящей по оси бруса (фиг. 8. 1,в), или силу перпендикулярно оси, например, подвесив груз



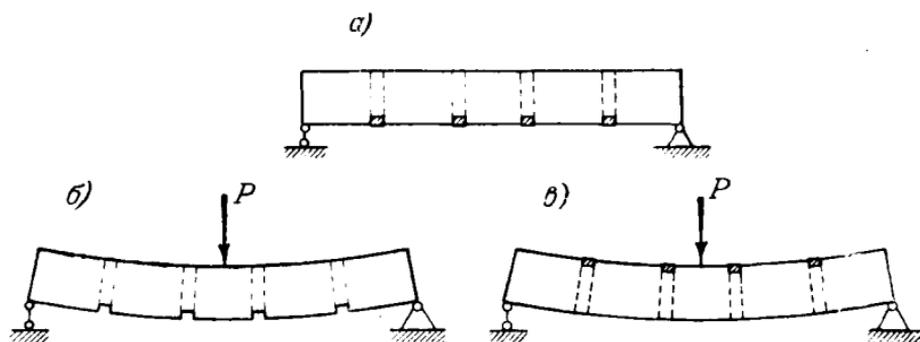
Фиг. 8. 1. Примеры балок.

а — консоль; б — простая балка; в — нагрузка в виде пары (момента); г — поперечная нагрузка.

(фиг. 8. 1,г), то такие брусья изогнутся и их прямые оси искривятся. Деформация бруса, сопровождающаяся искривлением его оси, вызываемая поперечной нагрузкой, а также парами, лежащими в плоскости, проходящей через ось бруса, носит название *поперечного изгиба* или просто *изгиба*. Брус с прямой осью, работающий главным образом на изгиб, называется *балкой*. Балку с одним защемленным и другим свободным концом называют *консолью* (фиг. 8. 1,а). Балка, имеющая одну неподвижную, а другую подвижную цилиндрические опоры на концах, называется *простой балкой* (фиг. 8. 1,б), а если концы свешиваются

за опоры как консоль, то *консольной балкой* (см. например, фиг. 8.6,а).

Разделим мысленно весь брус на тончайшие продольные волокна, параллельные оси и скрепленные между собой в одно целое (фиг. 8.1,а и б). Подобное волокнистое строение имеет дерево. Другие материалы обладают обычно однородной структурой и в них фактически нет никаких волокон или слоев, но такое представление удобно для дальнейшего изложения. При изгибе бруса искривляются все его волокна. Волокна, расположенные с выпуклой стороны, испытывают при деформации растяжение, а расположенные с вогнутой — сжатие. В этом легко убедиться на следующем простом опыте. Из простой балки выпилим снизу



Фиг. 8. 2. Сжатие и растяжение волокон при изгибе.

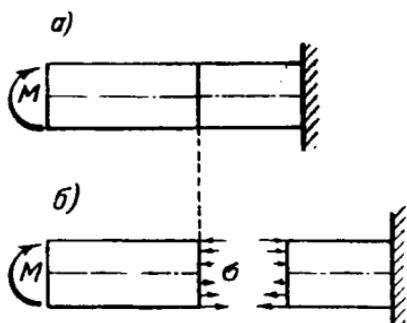
а — в пропилах балки снизу вставлены брусочки; б — при изгибе выпуклостью вниз брусочки выпали; в — сверху брусочки зажаты.

небольшие брусочки и вставим их обратно так, чтобы они держались силами трения (фиг. 8.2,а). Если изогнуть балку выпуклостью вниз, то пропилы раздвинутся и вложенные брусочки выпадут (фиг. 8.2,б). При этом можно наблюдать снижение прочности балки по сравнению с балкой без пропилов. Перевернув балку пропилами вверх, брусочки можно вставить неплотно, чтобы они свободно вынимались. Но если вновь изогнуть балку, то пропилы укоротятся и плотно зажмут брусочки (фиг. 8.2,в). Заметного изменения прочности балки при этом не обнаружится.

Для выяснения внутренних усилий, возникающих при изгибе в сечениях балки, воспользуемся методом сечений. Сначала рассмотрим балку, изгибаемую только моментом M (фиг. 8.3,а). Рассечем ее перпендикулярно оси на две части и тем самым разрушим связи между этими частями (фиг. 8.3,б). Связи, нарушенные сечением, заменяются силами, эквивалентными силам взаимодействия, возникающим между частицами материала при действии внешней нагрузки. Чтобы равновесие, например, левой части балки не было нарушено, в произведенном сечении должны возникать такие силы взаимодействия, которые могли бы за-

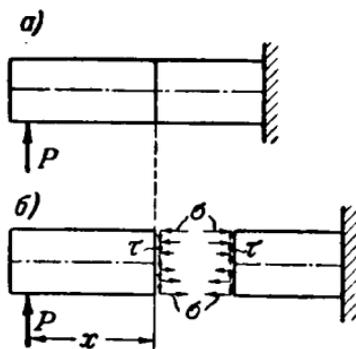
менить связь, препятствующую повороту левой части относительно правой, и уравновесить собой приложенный момент M , вызывающий этот поворот. Такими силами взаимодействия являются нормальные силы, определяемые напряжениями σ ; на выпуклой стороне изогнутой балки они растягивающие, на вогнутой — сжимающие. Они направлены перпендикулярно к сечению и заменяют собой действие правой части балки на левую. Очевидно, что эти силы могут быть приведены к паре с моментом M .

Теперь возьмем балку, изгибаемую вертикальной силой P (фиг. 8.4,а), и произведем такой же разрез. Нормальными си-



Фиг. 8.3. От момента возникают нормальные напряжения.

а — балка изгибается моментом M ; б — силы в сечении, заменяющие разрушенные связи.



Фиг. 8.4. От поперечной нагрузки возникают нормальные и касательные напряжения.

а — балка изгибается силой P ; б — силы в сечении, уравнивающие поперечную нагрузку.

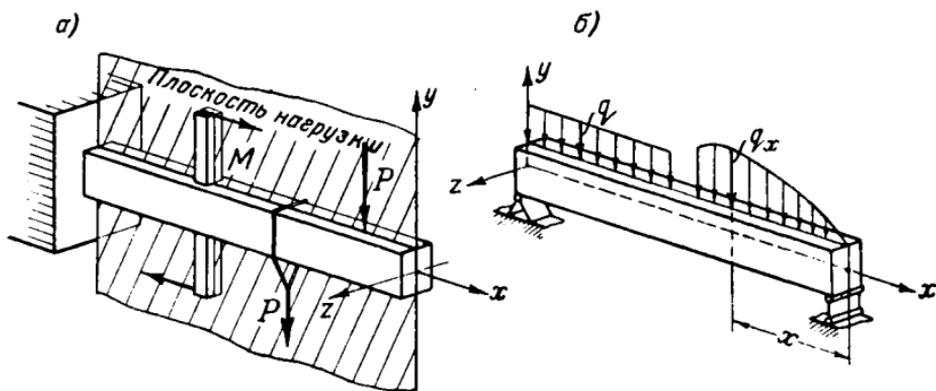
лами, определяемыми напряжениями σ , направленными горизонтально (фиг. 8.4,б), можно заменить связь, препятствующую повороту левой части, и уравновесить момент $M = Px$, возникающий в произведенном сечении. Но сила P стремится не только повернуть, но и сдвинуть левую часть вверх относительно правой. Чтобы заменить связь, препятствующую этому сдвигу, в сечении должны возникать вертикальные силы взаимодействия, определяемые касательными напряжениями τ . Нормальные и касательные силы в сечении уравнивают внешнюю силу P . Таким образом при изгибе от поперечной нагрузки в сечениях балки возникают одновременно и нормальные и касательные напряжения. Они характеризуют внутренние силы взаимодействия между левым и правым торцевыми сечениями разреза (фиг. 8.4,б).

Задача расчета на изгиб состоит в том, чтобы определить наибольшие напряжения, опасные для прочности балки. Они зависят от внешней нагрузки, приложенной к балке, и от ее раз-

меров. Выясним характер изменения внутренних сил в зависимости от распределения внешней нагрузки по длине балки, установим опасное сечение, после чего в следующей главе перейдем к вычислению напряжений.

§ 2. Нагрузки и реакции

В настоящей главе рассматриваются балки, сечение которых имеет ось симметрии; все внешние силы лежат в одной плоскости, являющейся плоскостью симметрии балки (фиг. 8.5). Условимся ось x всегда направлять по оси балки, перпендикулярно к ней в плоскости нагрузки направлять ось y , а перпендикулярно пло-



Фиг. 8.5. Виды нагрузок и их приложение в плоскости симметрии балок.

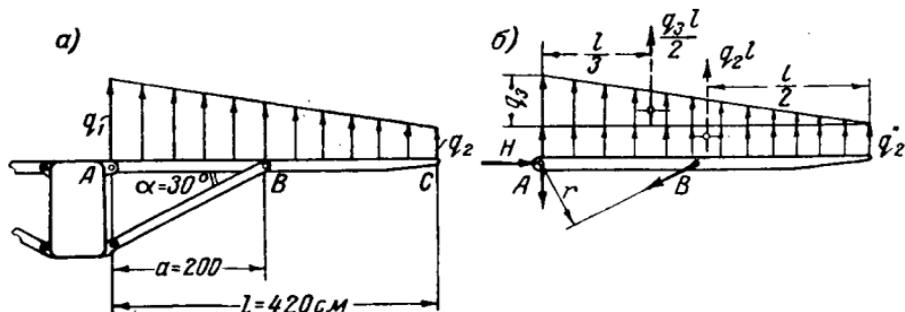
сти нагрузки — ось z (фиг. 8.5). Начало осей будем совмещать с центром тяжести начального сечения. Внешними силами являются нагрузки, непосредственно приложенные к балке (например, ее вес), или силы взаимодействия, которые передают части конструкции, опирающиеся на балку. Напоминаем, что нагрузки сводятся по характеру своего приложения к следующим видам: 1) сосредоточенные силы P , приложенные на поверхности балки и распределенные по очень малой площади, 2) сосредоточенные пары с моментами M (фиг. 8.5,а), 3) сплошные нагрузки или нагрузки, распределенные непрерывно по части поверхности балки. Обычно их характеризуют интенсивностью — величиной нагрузки, приходящейся на единицу длины. Они могут быть равномерные, как говорят, с постоянной интенсивностью q и неравномерные с переменной интенсивностью q_x (фиг. 8.5,б) .

Приложенную нагрузку балка передает на другие элементы конструкции. Их сопротивления действуют на балку в виде реактивных сил или опорных реакций, которые зависят от нагрузки и от типа опор. Выше, в гл. I, § 7 были приведены типы опор и даны примеры определения опорных реакций. Здесь приводится

еще один пример определения реакций опор и несколько задач ввиду важности этого вопроса для расчета балок.

Пример 1. Лонжерон крыла самолета прикреплен к фюзеляжу в точке A при помощи неподвижной цилиндрической опоры и в точке B при помощи подкоса, который можно рассматривать как подвижную опору. Воздушная нагрузка крыла, приходящаяся на лонжерон, распределяется по длине по трапеции и имеет на концах интенсивность $q_1=8$ кг/см и $q_2=3$ кг/см. Определить опорные реакции лонжерона (фиг. 8.6).

Прежде всего действие опор заменим реактивными силами A , H и B , направление которых выбираем, как указано на



Фиг. 8.6. Определение опорных реакций.

а — нагрузка лонжерона крыла; б — реактивные силы A , H и B , заменяющие действие опор.

фиг. 8.6,б. Затем составляем уравнения равновесия всех сил, приложенных к лонжерону. Сплошную нагрузку, распределенную по трапеции, можно рассматривать с стоящей из равномерной с интенсивностью q_2 и из треугольной с наибольшей интенсивностью $q_3=q_1-q_2=5$ кг/см. Равнодействующая равномерной нагрузки q_2l , равная площади прямоугольника эпюры нагрузки, приложена в центре тяжести прямоугольника, т. е. по середине лонжерона. Равнодействующая добавочной треугольной нагрузки $\frac{q_3l}{2}$ равна площади треугольника с основанием l и высотой q_3 и приложена в центре тяжести треугольника на расстоянии $\frac{l}{3}=140$ см от левого конца.

Вычисляем сумму моментов всех сил относительно точки B :

$$\sum M_B = Aa + q_2l \left(\frac{l}{2} - a \right) - \frac{q_3l}{2} \left(a - \frac{l}{3} \right) = 0.$$

Отсюда, подставляя размеры, указанные на фиг. 8.6, находим

$$A = -\frac{q_2l}{a} \left(\frac{l}{2} - a \right) + \frac{q_3l}{2a} \left(a - \frac{l}{3} \right) = -\frac{3 \cdot 420}{200} 10 + \frac{5 \cdot 420}{2 \cdot 200} 60 = 252 \text{ кг.}$$

Затем составляем сумму моментов всех сил относительно опоры A :

$$\sum M_A = Br - q_2 l \frac{l}{2} - \frac{q_3 l}{2} \frac{l}{3} = 0.$$

Принимая во внимание, что плечо силы B равно перпендикуляру, опущенному из точки A на направление силы, $r = a \sin \alpha = 200 \frac{1}{2} = 100$ см, из последнего уравнения находим

$$B = \frac{q_2 l^2}{2r} + \frac{q_3 l^2}{6r} = \frac{3 \cdot 420^2}{2 \cdot 100} + \frac{5 \cdot 420^2}{6 \cdot 100} = 4116 \text{ кг.}$$

Горизонтальную реакцию H найдем, беря сумму проекций всех сил на ось лонжерона $\sum X = B \cos \alpha - H = 0$; отсюда

$$H = B \cos \alpha = 4116 \cdot 0,866 = 3564 \text{ кг.}$$

Проверку производим по условию, что сумма вертикальных проекций реактивных сил должна равняться всей нагрузке:

$A + B \sin \alpha = \frac{q_1 + q_2}{2} l$. Подставляя сюда числовые значения:

$252 + 4116 \frac{1}{2} = \frac{8+3}{2} 420$ или $2310 = 2310$, убеждаемся в правильности вычисления реакций.

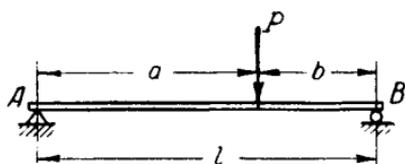
Все реакции получились со знаком плюс, следовательно, они направлены так, как мы предположили вначале. Если бы мы для какой-либо реакции предположили обратное направление, например, реакцию A направили бы вверх, то в уравнение моментов $\sum M_B$ она вошла бы с обратным знаком и получилась бы отрицательной. Это указывало бы, что в действительности данная реакция имеет направление, обратное предположенному вначале, и его необходимо исправить. Часто подвижная опора имеет свободу перемещения только в горизонтальном направлении. Тогда ее реакция всегда направлена вертикально. В этом случае и в неподвижной опоре горизонтальная реакция при вертикальной нагрузке не возникает.

Задачи. 1. Определить опорные реакции простой балки от сосредоточенной силы P , приложенной на расстоянии a от левой опоры и $-b$ от правой (фиг. 8.7). *Ответ:* $A = \frac{Pb}{l}$;

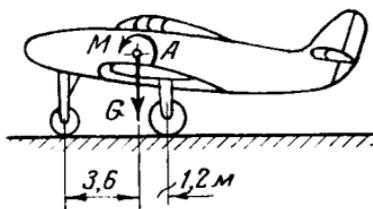
$$B = \frac{Pa}{l}.$$

2. Определить вертикальные реакции каждого из трех колес самолета, если нагрузки при посадке приводятся к вертикальной силе $G = 15000$ кг и моменту $M = 1200$ кгм, приложенных в точке A (фиг. 8.8). *Ответ:* реакция переднего колеса 4000 кг, каждого заднего 5500 кг.

3. На крыло самолета действует сплошная нагрузка, приведенная вдоль оси крыла к трапеции с наибольшей интенсивностью $q_A = 300 \text{ кгм}$ и наименьшей — $q_B = 100 \text{ кгм}$, и вес



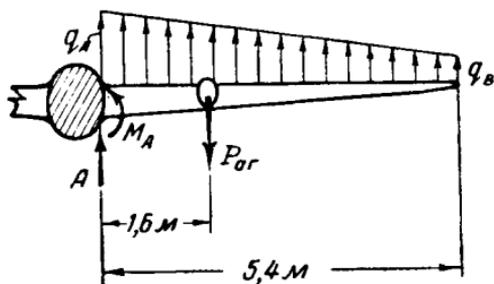
Фиг. 8.7. Определить реакции от силы P .



Фиг. 8.8. Найти давления на колеса.

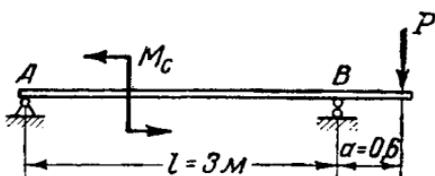
агрегата $P_{ар} = 360 \text{ кг}$ (фиг. 8.9). Определить вертикальное давление A и момент M_A , передаваемые на фюзеляж.

Ответ: $A = 820 \text{ кг}$, $M_A = 1854 \text{ кгм}$.



Фиг. 8.9. Вычислить силы, передаваемые на фюзеляж.

4. Найти опорные реакции консольной балки от



Фиг. 8.10. Найти реакции.

нагрузки сосредоточенным моментом $M_c = 240 \text{ кгм}$ и силой $P = 400 \text{ кг}$ (фиг. 8.10). Ответ: $A = 0$; $B = 400 \text{ кг}$.

§ 3. Поперечная сила и изгибающий момент

Пусть дана балка, для которой известны все внешние силы, в том числе и опорные реакции (фиг. 8.11,а). Под действием этих сил она находится в равновесии. Следовательно, сумма проекций всех сил на вертикальную ось и сумма моментов относительно какой-нибудь оси, перпендикулярной плоскости нагрузки, например, проходящей через точку, где приложена сила P_3 , будут равны нулю:

$$\sum Y = P_1 + P_2 - P_3 + P_4 = 1 + 2 - 7,5 + 4,5 = 0;$$

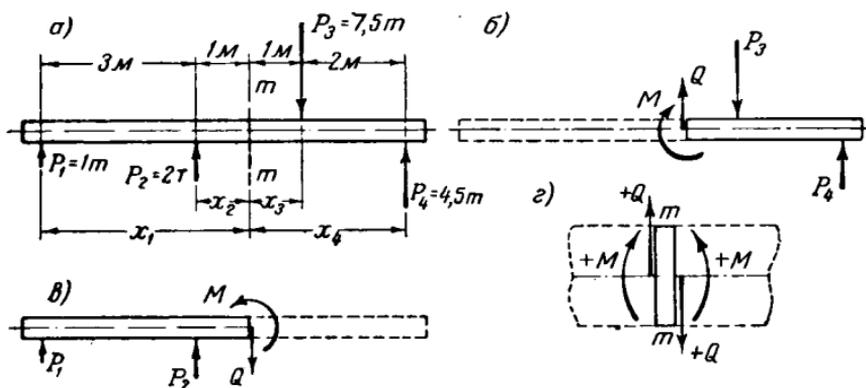
$$\sum M = P_1 5 + P_2 2 - P_4 2 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 - 4,5 \cdot 2 = 0.$$

Сумма проекций на горизонтальную ось при любой вертикальной нагрузке всегда равна нулю. Разрежем балку на две

части произвольно выбранным сечением mn , перпендикулярным ее оси, и отбросим одну ее часть, например, левую (фиг. 8. 11,б). Чтобы уравновесить правую часть, необходимо заменить действие отброшенной части соответствующими усилиями, приложенными в сечении. Этими усилиями будут, во-первых, так называемая *поперечная сила* Q , равная сумме вертикальных проекций всех сил, приложенных к левой части балки (в данном случае, когда силы вертикальны, сумма проекций сил превращается в сумму сил):

$$Q = P_1 + P_2 = 1 + 2 = 3 \text{ т.}$$

Во-вторых, так называемый *изгибающий момент* M , равный сумме моментов всех сил, приложенных к левой части балки и



Фиг. 8. 11. Поперечная сила и изгибающий момент.

a — балка нагружена уравновешенной нагрузкой; $б$ — схема равновесия правой части; $в$ — равновесие левой части; $г$ — действие левой и правой отброшенных частей на выделенный из балки короткий элемент.

взятых относительно центральной оси сечения, перпендикулярной плоскости нагрузки,

$$M = P_1 x_1 + P_2 x_2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 6 \text{ тм.}$$

Величины Q и M заменяют собой действие левых сил на правую оставшуюся часть балки. Другими словами, поперечная сила в данном сечении является проекцией на нормаль к оси балки системы сил, заменяющих действие отброшенной части на остающуюся, а момент этой системы сил относительно центральной оси поперечного сечения является изгибающим моментом в данном сечении. При этом неважно, какая часть балки будет отброшена, левая или правая: усилия Q и M уравнивают нагрузку, приложенную к той части, на которую они действуют. В самом деле, заменим в сечении mn действие левой части усилиями Q и M (фиг. 8. 11,б) и составим сумму проекций всех сил

правой части на вертикаль и сумму моментов относительно центральной оси поперечного сечения mm :

- 1) $Q - P_3 + P_4 = 3 - 7,5 + 4,5 = 0$;
- 2) $M + P_3 x_3 - P_4 x_4 = 6 + 7,5 \cdot 1 - 4,5 \cdot 3 = 0$.

Условия равновесия правой части балки удовлетворяются. Из первого уравнения следует, что поперечная сила Q в данном сечении равна сумме проекций правых сил, взятых со знаком, обратным знаку левых сил, $Q = P_3 - P_4$. Если при подсчете поперечной силы слева нагрузка, направленная вверх, входит со знаком плюс, то при подсчете справа такая нагрузка входит со знаком минус. То же можно сказать и об изгибающем моменте M .

Из второго уравнения

$$M = -P_3 x_3 + P_4 x_4,$$

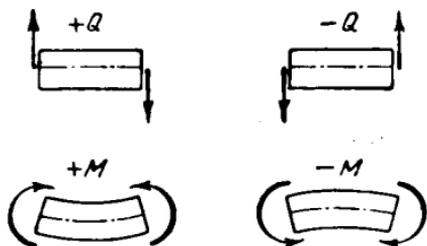
он равен сумме моментов правых сил, взятых со знаком, обратным знаку моментов левых сил.

Если отбросить правую часть балки (фиг. 8.11, в), то действие сил, приложенных к ней, на оставшуюся левую часть нужно заменить в сечении mm теми же усилиями Q и M , которые действуют

на правую часть (фиг. 8.11, б), но направленными противоположно. В каждом поперечном разрезе поперечная сила состоит из двух равных и противоположных сил, а изгибающий момент — из двух равных и противоположных моментов, действующих одновременно на торцевые сечения по обе стороны от разреза (фиг. 8.11, б и в).

Это иллюстрируется также равновесием тонкого поперечного слоя (фиг. 8.11, з), вырезанного из балки. Действие отброшенных левой и правой частей заменяется в обоих торцевых сечениях поперечными силами и изгибающими моментами, направленными навстречу друг другу.

П р а в и л о з н а к о в. Условимся считать положительной поперечную силу, если она действует на правую часть вверх, а на левую — вниз (фиг. 8.12). Поперечную силу противоположного направления будем считать отрицательной. Точно так же изгибающий момент условимся считать положительным, если он действует на правую часть по часовой стрелке, а на левую — против часовой стрелки (фиг. 8.12). При наличии поперечной силы одно поперечное сечение стремится сдвинуться по вертикали относительно другого. При положительной поперечной силе сечение слева стремится сдвинуться вверх, а сечение справа — вниз, и весь элемент, выделенный этими сечениями, как бы стремится повернуться по часовой стрелке (фиг. 8.11, з). Сдвигу соответствуют касательные напряжения τ ; они тем больше, чем больше поперечная сила Q . При действии изгибающего момента смеж-



Фиг. 8.12. Правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов.

ные сечения стремятся повернуться одно относительно другого. При положительном изгибающем моменте в верхних волокнах возникает сжатие, а в нижних — растяжение, и балка изгибается выпуклостью вниз (фиг. 8. 12). При этом в поперечных сечениях балки возникают нормальные напряжения σ , величина которых зависит от величины изгибающего момента M .

Все внешние силы, перпендикулярные оси балки и лежащие с одной стороны от какого-нибудь сечения, всегда можно заменить двумя величинами в данном сечении — поперечной силой Q и изгибающим моментом M . Нужно уметь их вычислять в любом сечении и от любой нагрузки. При вычислении исходят из установленного выше положения, что *поперечная сила в данном сечении равна алгебраической сумме проекций на нормаль к оси балки всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, а изгибающий момент в данном сечении равен алгебраической сумме моментов относительно центральной оси сечения всех сил, расположенных по одну сторону от него.*

§ 4. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Перерезывающая сила Q и изгибающий момент M , а следовательно, и напряжения τ и σ изменяются при переходе от одного сечения к другому, так как при этом может изменяться и количество сил, расположенных с одной стороны, и их расстояния до рассматриваемого сечения.

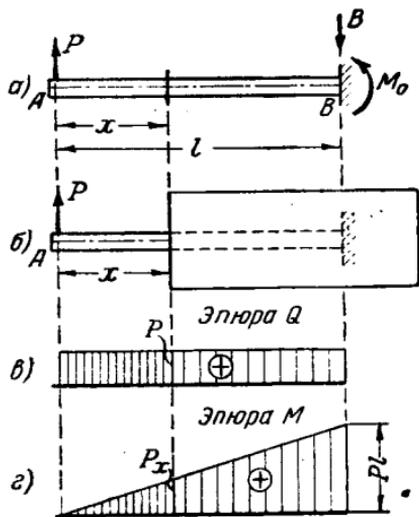
В тех случаях, для которых Q или M равны нулю, касательные или соответственно нормальные напряжения будут отсутствовать. Наоборот, в сечениях, где Q или M имеют наибольшую величину, соответствующие им напряжения будут также наибольшими (подразумевается брус постоянного сечения). Таким образом определение опасных сечений сводится к определению сечений с максимальными значениями усилий Q и M . Чтобы найти опасные сечения, необходимо знать, как изменяются Q и M от сечения к сечению по длине балки. Для этого служат так называемые *эпюры поперечных сил и изгибающих моментов*. Если в каждом сечении отложить перпендикулярно оси балки отрезки, изображающие в каком-нибудь произвольно выбранном масштабе величины поперечных сил или изгибающих моментов в этих сечениях, то получим график или эпюру Q или соответственно эпюру M , которые и показывают изменение этих величин по длине балки. Умение строить эпюры Q и M важно не только для определения опасных сечений и вычисления наибольших напряжений. Это важно и для определения деформаций балки. Построение эпюр обычно производится отдельно на оси, проведенной параллельно оси балки. Положительные ординаты эпюр, т. е. отрезки, равные положительным величинам Q или M , откладываются от этой оси вверх, в положительную сторону оси y , согласно принятому в балке направлению осей (фиг. 8. 5). При

таком построении ординаты эпюры M получаются всегда с вогнутой стороны балки, со стороны сжатых волокон (фиг. 8.12).

Чтобы получить навыки, необходимые для расчетов на изгиб, рассмотрим несколько примеров построения эпюр.

§ 5. Примеры эпюр усилий для консоли

Пример 1. Пусть консоль нагружена одной сосредоточенной силой P на свободном конце (фиг. 8.13). Начав с левого конца, можно построить эпюры Q и M , не определяя опорных реакций.



Фиг. 8.13. Построение эпюр усилий для консоли от одной силы P .

а — произвольное сечение на расстоянии x от конца консоли; б — правая отсеченная часть закрыта экраном; в — эпюра поперечных сил; г — эпюра изгибающих моментов.

Возьмем произвольное сечение на расстоянии x от свободного конца. Вместо отбрасывания правой части балки закроем ее экраном. Тогда будет видна только левая оставшаяся часть (фиг. 8.13,б). В сечении на расстоянии x поперечная сила $Q = P$ положительна, так как направлена вверх. Как бы ни изменялось расстояние x при передвижке экрана вдоль балки, величина Q останется постоянной. Проводим под балкой ее ось и откладываем вверх от нее во всех сечениях одну и ту же величину P . Концы ординат эпюры Q лежат на прямой, параллельной оси балки (фиг. 8.13,в). Крайняя правая ордината равна опорной реакции B , направленной вниз.

Изгибающий момент в выбранном сечении $M = Px$ также положителен, потому что сила P создает в сечении момент по часовой стрелке.

Его величина пропорциональна величине x в первой степени. Передвигая экран и, следовательно, изменяя расстояние x^* , получаем различные величины изгибающих моментов:

в точке A, при $x=0$, $M = P \cdot 0 = 0$; по середине балки, при $x = \frac{l}{2}$, $M = \frac{Pl}{2}$; в точке B, при $x=l$, $M = Pl = M_{\max}$. Снова проводим ось

балки и откладываем вверх от нее во всех сечениях в произвольном масштабе величины изгибающих моментов, пропорциональные расстояниям до этих сечений. Концы ординат располагаются на наклонной прямой, и эпюра изгибающих моментов имеет вид

* Сечение, имеющее переменную абсциссу x , часто называют *текущим* сечением.

треугольника (фиг. 8.13,з). Всегда, когда момент связан с абсциссой x уравнением первой степени, эпюра изгибающих моментов M изображается наклонной прямой. Наибольшая ордината эпюры M получилась в опорном сечении. Она равна опорному моменту $M_0 = Pl$. Между прочим, легко заметить, что любая ордината эпюры M равна левой части площади эпюры Q . На фиг. 8.13,в площадь прямоугольника с основанием x и высотой P равна Px , что и дает величину изгибающего момента; то же получается и для всех других сечений.

Пример 2. Нагрузим консоль тремя сосредоточенными силами P_1 , P_2 и P_3 (фиг. 8.14,а). Построение эпюр начнем от свободного конца А.

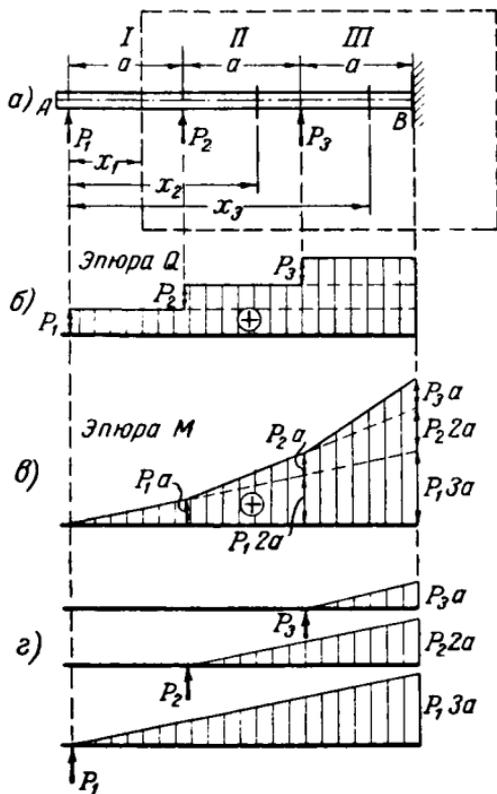
Закроем листом бумаги изображение балки на фиг. 8.14,а и станем передвигать лист вправо вдоль балки, приводя в совпадение его левый край с различными поперечными сечениями. Тогда постепенно будем открывать одну за другой силы, расположенные слева от рассматриваемых сечений. Сумма проекций на вертикаль левых сил равна поперечной силе в сечении балки, совпадающем с краем листа, а сумма их моментов относительно центральной оси этого сечения равна изгибающему моменту.

Переменное расстояние от конца А до сечения балки, совпадающего с левым краем листа, обозначим x ; причем расстояния до сечений, расположенных между силами P_1 и P_2 , будем обозначать через x_1 ; до сечений между P_2 и P_3 — через x_2 и т. д. (На фиг. 8.14,а пунктиром показано положение листа, когда его левый край находится на расстоянии x , от конца А.) Беря различные сечения, вычисляем поперечные силы для отдельных участков:

в первом участке $Q_1 = P_1$;

во втором участке $Q_2 = P_1 + P_2$;

в третьем участке $Q_3 = P_1 + P_2 + P_3$.



Фиг. 8.14. Эпюры усилий консоли от нескольких сосредоточенных сил.

а — консоль нагружена тремя силами P_1 , P_2 и P_3 ; б — эпюра поперечных сил; в — эпюра изгибающих моментов; г — эпюры изгибающих моментов от каждой силы в отдельности.

В каждом участке между силами P поперечная сила имеет постоянное значение, и эпюра Q для всех участков очерчивается прямыми, параллельными оси балки (фиг. 8. 14,б). От каждой сосредоточенной силы P в отдельности эпюра Q имеет вид прямоугольника (пунктир на фиг. 8. 14,б); окончательную эпюру можно получить путем сложения эпюр, построенных раздельно для каждой силы P . На границах участков, т. е. в тех местах, где приложена сосредоточенная нагрузка, поперечная сила имеет два значения. Например, под силой P_2 поперечная сила слева равна P_1 , а справа P_1+P_2 . Аналогично получается под силой P_3 . Под сосредоточенной силой в эпюре Q имеется скачок на величину этой силы. Фактически сосредоточенных сил не бывает, имеются нагрузки, распределенные на некотором участке по длине балки, и изменение поперечной силы происходит постепенно, как при распределенной нагрузке (см. ниже примеры 3 и 7).

Теперь перейдем к составлению выражений для ординат эпюры M на отдельных участках (фиг. 8. 14,а).

В первом участке $M_1=P_1x_1$;

во втором участке $M_2=P_1x_2+P_2(x_2-a)$;

в третьем участке $M_3=P_1x_3+P_2(x_3-a)+P_3(x_3-2a)$.

В пределах первого участка слева мы имеем только одну силу P_1 . Слева от сечений второго участка имеются две силы: P_1 и P_2 ; до этих сечений расстояние силы P_1 равно x_2 , а расстояние силы P_2 на величину a меньше. Обе они создают положительный изгибающий момент. Передвинувшись в третий участок, мы будем иметь слева уже три силы: P_1 , P_2 и P_3 ; расстояния каждой из них до рассматриваемого сечения соответственно равны: x_3 , (x_3-a) и (x_3-2a) . На всех участках M зависит от x в первой степени. Между сосредоточенными силами при отсутствии на участке каких-либо других нагрузок изгибающий момент изменяется по наклонной прямой. Чтобы провести эти прямые, вычислим ординаты эпюры M на границах участков. Из уравнения первого участка при $x_1=0$ имеем $M_1=0$. При $x_1=x_2=a$ изгибающие моменты из уравнений первого и второго участков получаются одинаковыми: $M_1=M_2=P_1a$; скачка в эпюре M под сосредоточенной силой не будет. Так же одинаковыми получаются изгибающие моменты при $x_2=x_3=2a$, вычисленные из уравнений второго и третьего участков $M_2=M_3=P_12a+P_2a$. При $x_3=3a$ получаем изгибающий момент в опорном сечении $M_3=M_B=P_13a+P_22a+P_3a$. Концы этих ординат соединяются наклонными прямыми (фиг. 8. 14,в), изображающими зависимость M от x , причем каждая сила вносит изменение наклона этих прямых, и поэтому под сосредоточенной силой эпюра изгибающих моментов всегда имеет перелом. Если построить эпюры M от каждой силы в отдельности, то они будут иметь вид треугольников (фиг. 8. 14,г); складывая их, получим общую, как говорят, *суммарную эпюру M* (фиг. 8. 14,в).

Эпюра изгибающих моментов связана с эпюрой поперечных сил. Зависимость между ними в данном примере выражается в том, что, как и в предыдущем примере, в любом сечении ордината эпюры M равна площади эпюры Q , расположенной левее этого сечения. Например, левее силы P_3 площадь эпюры Q состоит из двух прямоугольников: $P_1 2a + P_2 a$, что составляет величину M под силой P_3 . Изгибающий момент в опорном сечении равен всей площади эпюры Q .

Пример 3. Рассмотрим построение эпюр в балке с защемленным концом от равномерной нагрузки интенсивностью q кг/см (фиг. 8. 15).

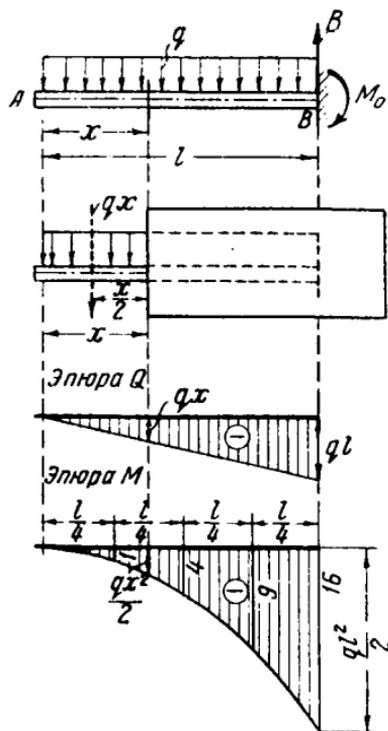
Возьмем произвольное сечение на расстоянии x от свободного конца. Правую часть балки мысленно отбросим (закроем экраном). На единицу длины приходится нагрузка q , а на всем левом участке длиной x она равна qx ; равнодействующая qx приложена в центре тяжести равномерной нагрузки по середине участка x (фиг. 8. 15). Проектируя все левые силы на вертикаль, находим поперечную силу; по принятому правилу знаков она получается отрицательной: $Q = -qx$.

Передвигая экран и изменяя расстояние x , находим поперечные силы в различных сечениях: в сечении A , при $x=0$, $Q=0$; по середине балки, при $x = \frac{l}{2}$, $Q = -\frac{ql}{2}$; в сечении B , при $x=l$, $Q = -ql$.

Откладывая их перпендикулярно оси балки вниз, как отрицательные, и соединяя полученные точки прямыми, строим тем самым эпюру Q , которая должна изменяться по наклонной прямой. потому что поперечная сила зависит от x в первой степени (фиг. 8. 15). Реакция опоры B равна ординате эпюры Q в опорном сечении и направлена вверх: $B = ql$.

Изгибающий момент, который равен сумме моментов левых сил, в данном сечении можно вычислить как момент равнодействующей qx , умножив ее на расстояние $\frac{x}{2}$ до сечения

$$M = -qx \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$



Фиг. 8. 15. Эпюры усилий от сплошной равномерной нагрузки.

Момент отрицателен, так как действует на правую часть против часовой стрелки.

Подставляя различные значения x , вычисляем M в нескольких сечениях:

$$\text{при } x=0, M=0;$$

$$\text{при } x = \frac{l}{4}, M = -\frac{q}{2} \left(\frac{l}{4}\right)^2 = -\frac{ql^2}{32};$$

$$\text{при } x = 2\frac{l}{4}, M = -\frac{q}{2} \left(2\frac{l}{4}\right)^2 = -4\frac{ql^2}{32} = -\frac{ql^2}{8};$$

$$\text{при } x = 3\frac{l}{4}, M = -\frac{q}{2} \left(3\frac{l}{4}\right)^2 = -9\frac{ql^2}{32};$$

$$\text{при } x=l, M = \frac{ql^2}{2}.$$

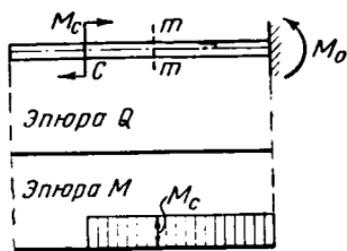
Отложим ординаты, изображающие величины M , вниз от оси. Концы ординат в данном случае будут расположены не на прямой, а на кривой (фиг. 8.15). Кривая, ординаты которой пропорциональны их расстояниям в квадрате, умноженным на постоянную величину, называется параболой второй степени (гл. I, § 2). Эпюра изгибающих моментов от равномерно распределенной нагрузки очерчивается по параболе второй степени.

Наибольшая ордината получается в опорном сечении. Она равна величине реактивного момента $M_0 = \frac{ql^2}{2}$. Этот момент направлен по часовой стрелке.

Пример 4. Построим эпюры Q и M для консоли, нагруженной сосредоточенным моментом M_c (фиг. 8.16).

Левее точки C нет никаких нагрузок; этот участок балки не испытывает никаких усилий и не изгибается. Возьмем сечение mn правее точки C . Сумма проекции на вертикаль левых сил равна нулю, так как сосредоточенный момент (пара сил) ни на какую ось проекции не дает. Поперечная сила по всей длине консоли отсутствует.

Сумма моментов левых сил относительно любого сечения правее точки C равна сосредоточенному моменту M_c , потому что пара дает один и тот же момент относительно любой точки. Изгибающий момент возникает только справа от сечения C и имеет постоянную



Фиг. 8.16. Эпюры Q и M от сосредоточенного момента M_c .

положительную величину M_c , которую и откладываем вверх от оси балки (фиг. 8.16). Опорный момент $M_0 = M_c$ направлен против часовой стрелки, а опорная реакция равна нулю.

Пример 5. Консоль нагружена несколькими сосредоточенными моментами: $M_A = 5 \text{ тм}$, $M_B = -3 \text{ тм}$ и $M_C = 4 \text{ тм}$ (фиг. 8.17).

Если построение эпюр начинать от опорного сечения, то предварительно необходимо определить опорные реакции, чтобы знать все внешние силы, действующие на балку. От моментной нагрузки реактивная сила в заделке не возникает. Нагрузка может быть уравновешена только одним реактивным моментом. Отбросим опору и заменим ее действие опорным моментом M_0 . Выбрав его направление по часовой стрелке (фиг. 8.17), из условия равновесия находим

$$M_0 = -M_A + M_B + M_C = -5 + 3 + 4 = 2 \text{ тм.}$$

Поперечная сила в любом сечении балки отсутствует, потому что сумма проекций левых или правых моментных нагрузок равна нулю (фиг. 8.17). Чтобы построить эпюру M , берем последовательно ряд сечений и подсчитываем суммы моментов с левой стороны от них. Левее сечения 1—1 имеется только опорный момент M_0 . На первом участке все ординаты эпюры M одинаковые:

$$M_1 = M_0 = 2 \text{ тм;}$$

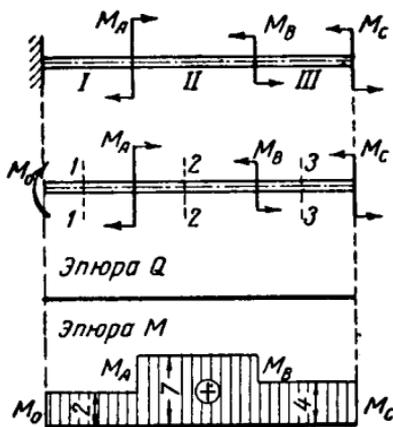
эпюра очерчивается горизонтальной прямой, параллельной оси балки (фиг. 8.17). Слева от сечения 2—2 имеется уже два момента; изгибающий момент равен их сумме:

$$M_2 = M_0 + M_A = 2 + 5 = 7 \text{ тм.}$$

Здесь эпюра проходит выше эпюры первого участка на величину M_A . В третьем участке изгибающий момент равен сумме трех левых моментов, причем момент M_B направлен против часовой стрелки и входит в сумму со знаком минус:

$$M_3 = M_0 + M_A - M_B = 2 + 5 - 3 = 4 \text{ тм.}$$

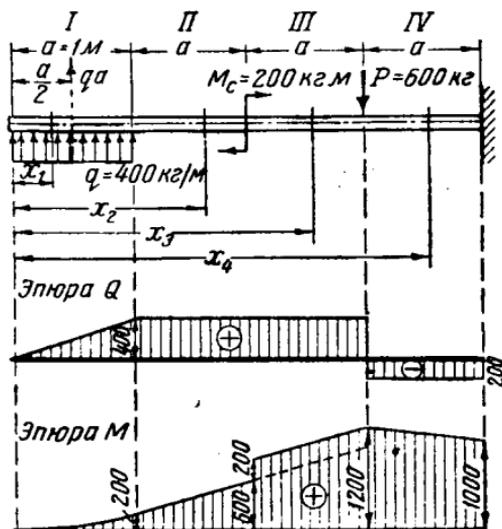
Концы ординат лежат на горизонтальной прямой, которая проходит ниже эпюры второго участка на величину M_B . В сечениях, где приложена сосредоточенная моментная нагрузка, изгибающий момент имеет два различных значения слева и справа от места приложения нагрузки. Под сосредоточенным моментом в эпюре M получается скачок на величину этого момента. Если добавляют положительный момент, то скачок получается вверх; если отрицательный, то вниз. При этом нужно помнить, что положительный момент слева направлен по часовой стрелке, а справа — против часовой стрелки. Учитывая последнее обстоятельство, эпюру, изображенную на фиг. 8.17, можно получить, идя



Фиг. 8.17. Усилия от нагрузки несколькими сосредоточенными моментами.

справа, от свободного конца балки. В самом деле, изгибающий момент, вычисленный как сумма правых моментов, в сечении 3—3 равен $M_3 = M_C = 4 \text{ тм}$, в сечении 2—2 равен $M_2 = M_C + M_B = 4 + 3 = 7 \text{ тм}$, в сечении 1—1 получаем $M_1 = M_C + M_B - M_A = 4 + 3 - 5 = 2 \text{ тм}$, что полностью соответствует эпюре. Замечание, сделанное в примере 2 о скачках в эпюре поперечных сил, относится и к скачкам в эпюре изгибающих моментов.

Пример 6. Консоль заделана правым концом и нагружена равномерной нагрузкой $q = 400 \text{ кг/м}$, сосредоточенным моментом $M_C = 200 \text{ кгм}$ и силой $P = 600 \text{ кг}$ (фиг. 8.18). Построить эпюры Q и M .



Фиг. 8.18. Построение эпюр усилий при действии сложной нагрузки.

Участок I. Возьмем произвольное сечение и обозначим расстояние до него через x_1 , подчеркнув тем самым, что x_1 меняется в пределах только первого участка. (Для наглядности здесь тоже рекомендуется закрывать листом бумаги часть балки правее сечения x .)

$$\begin{aligned} \text{В данном сечении } Q_1 &= \\ &= qx_1; \quad M_1 = qx_1 \frac{x_1}{2} = \frac{qx_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Поперечная сила изменяется по наклонной прямой, а изгибающий момент — по квадратной параболе.

$$\text{При } x_1 = 0, \quad Q = 0 \text{ и } M_1 = 0;$$

$$\text{при } x_1 = a, \quad Q_1 = qa = 400 \text{ кг}; \quad M_1 = \frac{q}{2} a^2 = 200 \text{ кгм}.$$

Принимая во внимание правило знаков, по этим ординатам строим эпюры Q и M для первого участка (фиг. 8.18).

Участок II. Берем произвольное сечение на расстоянии x_2 в пределах второго участка. Равнодействующая равномерной нагрузки $qa = 400 \text{ кг}$ приложена в центре тяжести на расстоянии $\frac{a}{2}$ от конца (фиг. 8.18) и находится слева от сечения x_2 . Следовательно:

$$Q_2 = qa = 400 \text{ кг}; \quad M_2 = qa \left(x_2 - \frac{a}{2} \right).$$

Поперечная сила постоянна для всего второго участка, а изгибающий момент меняется пропорционально первой степени x , т. е. по наклонной прямой (фиг. 8.18):

$$\text{при } x_2 = a, \quad M_2 = qa \left(a - \frac{a}{2} \right) = \frac{qa^2}{2} = 200 \text{ кгм};$$

$$\text{при } x_2 = 2a, \quad M_2 = qa \left(2a - \frac{a}{2} \right) = \frac{3qa^2}{2} = 600 \text{ кгм}.$$

Участок III. К левым силам добавляется момент M_C ; сумма их проекций не изменяется, потому что проекция момента на любую ось равна нулю, но сумма моментов левых сил изменится. Для третьего участка имеем:

$$Q_3 = qa; \quad M_3 = qa \left(x_3 - \frac{a}{2} \right) + M_C = 400 \left(x_3 - \frac{a}{2} \right) + 200.$$

Поперечная сила осталась прежней, сосредоточенный момент не отражается на ее эпюре. К изгибающему моменту добавилась постоянная величина, но ординаты его эпюры изменяются по прямой с прежним наклоном, потому что его зависимость от x осталась такой же, как и для второго участка. На границе со вторым участком (фиг. 8.18) изгибающий момент имеет два значения: $M_2 = 600 \text{ кгм}$ и $M_3 = 600 + 200 = 800 \text{ кгм}$. Эпюра M под сосредоточенным моментом претерпевает скачок на величину этого момента.

Участок IV. Передвигая сечение в последний участок на расстояние x_4 от начала, присоединим к левым силам еще и сосредоточенную силу P , направленную вниз (фиг. 8.18). В этом участке поперечная сила равна $Q_4 = qa - P = 400 - 600 = -200 \text{ кг}$. На границе между третьим и четвертым участками она имеет два значения (фиг. 8.18): $Q_3 = 400 \text{ кг}$ и $Q_4 = -200 \text{ кг}$. Под сосредоточенной силой в эпюре Q получается скачок на величину этой силы.

Теперь составим для четвертого участка выражение изгибающего момента

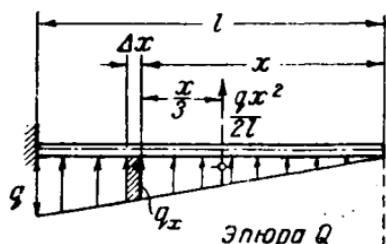
$$M_4 = qa \left(x_4 - \frac{a}{2} \right) + M_C - P(x_4 - 3a) = 400 \left(x_4 - \frac{a}{2} \right) + 200 - 600(x_4 - 3a).$$

Это есть уравнение прямой, так как содержит x в первой степени. Наклон этой прямой отличается от наклона прямой третьего участка благодаря влиянию сосредоточенной силы P , под которой в эпюре M получается перелом. Подставляя значения x_4 , находим ординаты и строим эпюру M (фиг. 8.18).

Пример 7. Построим эпюры Q и M в балке с левым зашпеченным концом от сплошной нагрузки, изменяющейся вдоль балки по треугольнику с максимальной интенсивностью q (фиг. 8.19). В данном примере удобнее начать построение эпюр, идя от правого, свободного конца балки (на этот раз следует закрыть левую часть и лист бумаги передвигать влево).

В произвольном сечении на расстоянии x сплошная нагрузка имеет интенсивность q_x . На очень малый участок приходится нагрузка $q_x \Delta x$, равная площади эпюры нагрузки на этом участке (фиг. 8.19). Площадь всей эпюры в виде треугольника с основанием l и высотой q составляет всю нагрузку балки, равную $\frac{ql}{2}$. Нагрузка, расположенная справа от вы-

бранного сечения, равна площади треугольника с основанием



x и высотой q_x . Она дает равнодействующую $\frac{q_x x}{2}$. Выразим ее че-

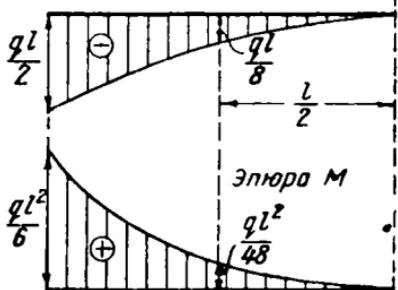
рез известную интенсивность q опорного сечения. Для этого найдем q_x из подобия двух треугольников: большого с основанием l и малого с основанием x ; для них можно составить пропорцию $\frac{q_x}{x} =$

$$= \frac{q}{l}, \text{ откуда } q_x = \frac{q}{l} x. \text{ Принимая}$$

во внимание это значение q_x , окончательно получаем выражение равнодействующей правых сил $\frac{qx^2}{2l}$.

Она проходит через центр тяжести малого треугольника нагрузки (фиг. 8.19) и дает в произвольном сечении x поперечную силу

$$Q = -\frac{qx^2}{2l}.$$



Фиг. 8.19. Эпюры усилий от сплошной треугольной нагрузки.

Согласно принятому правилу знаков (фиг. 8.12) поперечная сила получается отрицательной, потому что сумма правых сил направлена вверх. Она зависит от x^2 и изменяется

по квадратной параболе: при $x=0$, $Q=0$; при $x=\frac{l}{2}$,

$$Q = \frac{q}{2l} \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ql}{8}; \text{ при } x=l, Q = \frac{q}{2l} l^2 = \frac{ql}{2}.$$

Изгибающий момент, равный сумме моментов правых сил, можно вычислить как произведение равнодействующей этих сил на ее расстояние до выбранного сечения. Это расстояние равно $\frac{x}{3}$.

т. е. расстоянию от сечения до центра тяжести малого треугольника, где проходит равнодействующая. Таким образом

$$M = \frac{qx^2}{2l} \frac{x}{3} = \frac{qx^3}{6l}.$$

Здесь изгибающий момент положителен, потому что действует на левую часть против часовой стрелки. Он зависит от x^3 ; концы ординат его эпюры лежат на кривой, которая называется параболой третьей степени. Отдельные точки параболы получим, давая величине x различные значения. Напри-

мер, при $x=0$, $M=0$; при $x=\frac{l}{2}$, $M=\frac{q}{6l} \frac{l^3}{8}=\frac{ql^2}{48}$;

при $x=l$, $M=\frac{q}{6l} l^3=\frac{ql^2}{6}$ и т. д.

Соединяя полученные точки плавной кривой, построим эпюры Q и M (фиг. 8. 19).

Свойства эпюр Q и M . На разобранных примерах установлены некоторые общие свойства, которые могут послужить для облегчения построения и проверки правильности эпюр. Напомним эти свойства. Они сводятся к следующему.

Эпюра Q : а) имеет скачок под силой, равный этой силе; б) на свободных участках между нагрузкой очерчивается по горизонтальной прямой; в) на участках со сплошной равномерной нагрузкой изменяется по наклонной прямой, с треугольной нагрузкой — по квадратной параболе; г) в местах приложения нагрузки в виде сосредоточенных моментов никаких изменений не имеет.

Эпюра M : а) имеет перелом под силой; б) на свободных участках между нагрузкой изменяется по наклонной прямой; в) на участках со сплошной равномерной нагрузкой изменяется по квадратной параболе, с треугольной нагрузкой — по параболе третьей степени; г) имеет скачок под сосредоточенным моментом на величину этого момента.

Задачи. 1. Построить эпюры Q и M для консоли, нагруженной на свободном конце силой P и по середине силой $2P$ (фиг. 8. 20,а). Как изменятся эпюры Q и M , если силу $2P$ направить вверх?

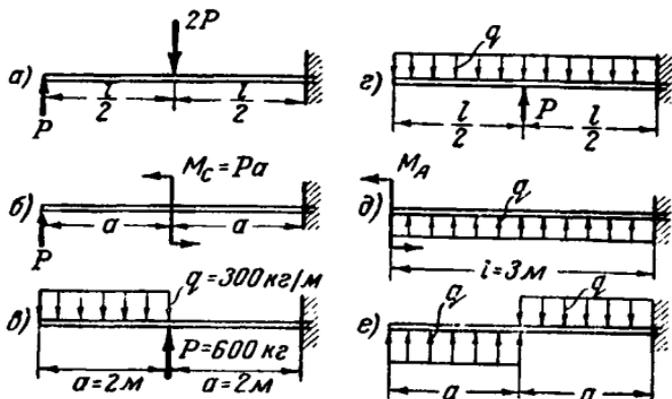
2. Постройте эпюры Q и M сначала отдельно от одной силы P , приложенной на конце, и от одного момента Pa , приложенного по середине, а затем построьте те же эпюры при одновременном действии силы и момента (фиг. 8. 20,б).

3. Нагрузка балки состоит из равномерной, интенсивностью $q=300$ кг/м, приложенной на левой половине, и из сосредоточенной силы $P=600$ кг (фиг. 8. 20,в). Постройте эпюры Q и M .

4. Равномерная нагрузка интенсивностью q приложена на всей длине консоли, а по середине приложена сосредоточенная сила $P=ql$. Построить эпюры Q и M для двух случаев: 1) сосредоточенная сила направлена вверх (фиг. 8. 20,г) и 2) сила направлена вниз.

5. Балка нагружена сплошной нагрузкой интенсивностью $q=80$ кг/м и сосредоточенным моментом $M_A=360$ кгм (фиг. 8. 20,д). Постройте эпюры Q и M . Как они изменятся, если величину сосредоточенного момента уменьшить вдвое.

6. Построить эпюры Q и M для балки, изображенной на фиг. 8. 20, е.



Фиг. 8. 20. Примеры нагрузок консоли для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

7. Для крыла самолета (фиг. 8. 9) построить эпюры усилий от заданной сплошной нагрузки.

§ 6. Примеры эпюр усилий для простой балки на двух опорах

Пример 1. Построить эпюры для простой балки, нагруженной одной сосредоточенной силой P , приложенной на расстоянии a от левой опоры и b от правой опоры (фиг. 8. 21).

Построение эпюр нельзя начать ни с левого, ни с правого конца, не определив предварительно опорных реакций балки. Это является общим правилом для всех балок, за исключением консоли, у которой один конец свободен, и построение можно начинать от этого конца без определения реакций. Отбросим опоры и действие их заменим реакциями A и B (фиг. 8. 21, б). Составляя уравнения моментов всех сил относительно правой и левой опор, соответственно находим $A = \frac{Pb}{l}$ и $B = \frac{Pa}{l}$ (см. задачу 1, § 2 настоящей главы). Теперь можно приступить к построению эпюр при помощи тех же способов и правил, как это мы делали в балке с одним заделанным концом. Начинать можно от любого конца, от левого или от правого, потому что все силы, расположенные по любую сторону от произвольного сечения, нам теперь известны. Снова рекомендуем закрыть листом изображение балки и, передвигая лист, например, вправо, постепенно открывать силы, расположенные слева от произвольного сечения, взятого на расстоянии x_1 до края листа (фиг. 8. 21, б). Открытую часть балки можно рассматривать как консоль, заделанную в сечении на расстоянии x_1 . Поперечная сила в этом сечении, равная сумме левых сил, $Q = A = \frac{Pb}{l}$, положительна и имеет постоянное

значение. Эпюра Q очерчивается горизонтальной прямой, ограничивающей положительные ординаты, которые нужно откладывать вверх. Передвинув лист бумаги вправо в участок b , откроем силу P , которая войдет в сумму левых сил со знаком минус:

$$Q = A - P = \frac{Pb}{l} - P = P \frac{b-l}{l}.$$

Но $b-l = -(-b+l) = -a$, а следовательно, поперечная сила для участка b получается отрицательной:

$$Q = A - P = -\frac{Pa}{l} = -B.$$

Ординаты эпюры Q на этом участке нужно откладывать вниз; они ограничиваются прямой, проведенной снизу параллельно оси балки (фиг. 8.21, в). Под сосредоточенной нагрузкой получается скачок. Сила P распределяется на две части: одна часть, равная $\frac{Pb}{l} = A$, передается на левую опору, вторая часть, равная $\frac{Pa}{l} = B$, передается на правую опору.

Для любого сечения участка a слева находится только одна сила, равная реакции A , и изгибающий момент для участка a равен моменту этой силы:

$$M_a = Ax_1 = \frac{Pb}{l} x_1.$$

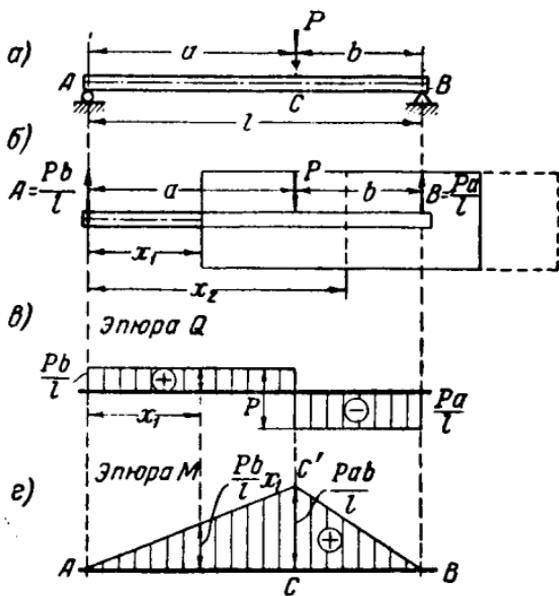
Он положителен, вызывает сжатие верхних волокон и зависит от x_1 в первой степени, следовательно, изменяется по прямой:

$$\text{при } x_1 = 0, \quad M_a = 0;$$

$$\text{при } x_1 = a, \quad M_a = \frac{Pb}{l} a = \frac{Pab}{l}.$$

По этим ординатам проводим прямую, ограничивающую эпюру M участка a (фиг. 8.21, г). Для сечений участка b слева добавляется еще сила P , и изгибающий момент здесь будет

$$M_b = Ax_2 - P(x_2 - a) = \frac{Pb}{l} x_2 - P(x_2 - a).$$



Фиг. 8.21. Построение эпюр усилий для простой балки от сосредоточенной силы P . a —сила P приложена в сечении C ; b —опоры заменены реакциями A и B ; $в$ —эпюра поперечных сил; $г$ —эпюра изгибающих моментов.

Возьмем два значения изгибающего момента участка b :
при $x=a$, $M_b = \frac{Pb}{l}a - P(a-a) = \frac{Pab}{l}$;

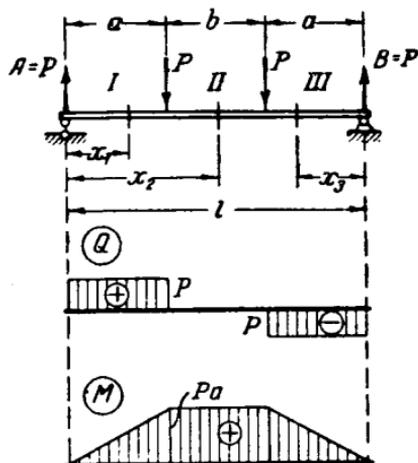
при $x=l$, $M_b = \frac{Pb}{l}l - P(l-a) = Pb - Pb = 0$.

Под грузом изгибающий момент получается одинаковым как из уравнения участка a , так и из уравнения участка b . Эюра M имеет здесь перелом. В крайних сечениях, совпадающих с шарнирными опорами, изгибающий момент равен нулю. Наибольшей величины он достигает в сечении под грузом. В этом сечении эюра поперечных сил проходит через ось балки, т. е. через нулевое значение.

В частном случае, когда сила P приложена по середине балки, $a=b=\frac{l}{2}$, опорные реакции будут равны между собой и каждая равна половине нагрузки $A=B=\frac{P}{2}$. Внешние силы, действующие на балку, расположены симметрично. Наибольший изгибающий момент получается по середине балки:

$$M = \frac{P}{2} \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}.$$

Пример 2. Построим эюры Q и M для простой балки, нагруженной двумя симметрично расположенными силами P (фиг. 8.22).



Фиг. 8.22. Эюры усилий в простой балке от симметричной нагрузки.

Вследствие симметрии опорные реакции одинаковы и равны $A=B=P$. Поперечную силу и изгибающий момент вычислим для каждого участка в отдельности, обходя балку слева направо:

Участок I: $Q_1 = A = P$;

$$M_1 = Ax_1 = Px_1.$$

Участок II: $Q_2 = A - P = 0$;

$$M_2 = Ax_2 - P(x_2 - a) = Px_2 - Px_2 + Pa = Pa.$$

Для третьего участка выражения получаются значительно проще, если пойти справа:

$$Q_3 = -B = -P; \quad M_3 = Bx_3 = Px_3.$$

В первом участке поперечная сила положительна, во втором она равна нулю, а в третьем отрицательна. Изгибающий момент в крайних участках изменяется по наклонным прямым. В опор-

ных сечениях он равен нулю и возрастает к среднему участку. В средней части балки изгибающий момент постоянен. В сечениях, расположенных симметрично относительно середины, изгибающие моменты одинаковы по величине и по знаку: эпюра M является симметричной. Ординаты эпюры Q в симметрично расположенных сечениях имеют одинаковую величину, но противоположные знаки. Такая эпюра является обратно симметричной (фиг. 8. 22). Таким образом от симметричной нагрузки в симметричной балке эпюра M получается симметричной, а эпюра Q обратно симметричной.

Пример 3. Построить эпюры Q и M для балки, изображенной на фиг. 8. 23.

Нагрузка балки обратно симметрична: она получается из симметричной нагрузки путем изменения направления сил на обратное в одной половине. Данная нагрузка составляет пару с моментом $3P \frac{l}{3} = Pl$. Ее невозможно

уравновесить силами одного направления; пара сил может быть уравновешена только парой сил. Поэтому в опорах должны возникнуть реакции $A = -B$, составляющие пару сил. Если нагрузка стремится вращать балку против часовой стрелки, то реакции должны быть направлены так, чтобы составить пару, вращающую по часовой стрелке. Напишем уравнение моментов всех сил относительно правой опоры

$$Al - 3P \frac{l}{3} = 0, \text{ откуда } A = P.$$

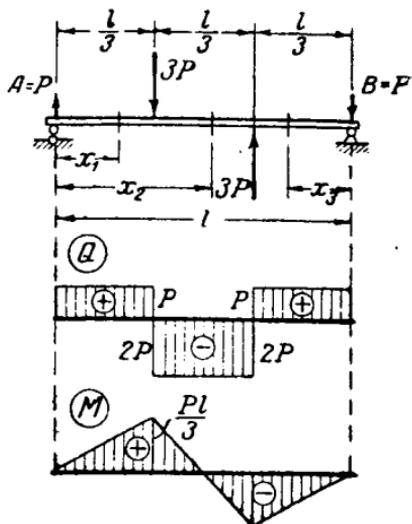
Выражения поперечной силы и изгибающего момента для первых двух участков составим по нагрузке, расположенной слева от сечения, а для третьего — по нагрузке справа (фиг. 8. 23):

$$\text{участок I: } Q_1 = A = P; \quad M_1 = Ax_1 = Px_1;$$

$$\text{участок II: } Q_2 = A - 3P = -2P; \quad M_2 = Px_2 - 3P \left(x_2 - \frac{l}{3} \right);$$

$$\text{участок III: } Q_3 = B = P; \quad M_3 = -Bx_3 = -Px_3.$$

Поперечная сила в обоих крайних участках положительна и имеет одинаковую величину; в среднем участке она отрицательна. Изгибающий момент во всех участках изменяется по наклонным прямым. На границах участков имеем:



Фиг. 8. 23. Эпюры усилий от обратно симметричной нагрузки.

при $x_1=0$, $M_1=0$;

при $x_1=x_2=\frac{l}{2}$, $M_1=M_2=\frac{Pl}{3}$;

при $x_3=\frac{l}{3}$, $M_3=-B\frac{l}{3}=-\frac{Pl}{3}$;

при $x_3=l$, $M_3=0$.

На этот раз в симметричных сечениях изгибающий момент имеет одинаковую величину, но противоположные знаки. В симметричной балке от обратно симметричной нагрузки эпюра M получается обратно симметричной, а эпюра Q — симметричной.

Пример 4. Балка на двух опорах нагружена равномерной нагрузкой интенсивностью q (фиг. 8. 24). Прежде всего определим опорные реакции. На один погонный метр приходится нагрузка q , а на длине l вся нагрузка балки равна ql . Вследствие симметрии расположения нагрузки реакции опор одинаковые и каждая из них равна половине всей нагрузки

$$A=B=\frac{ql}{2}.$$

Возьмем произвольное сечение на расстоянии x от левой опоры. Равнодействующая нагрузки, распределенной на этом участке, равна qx . Сумма проекций левых сил на вертикальную ось состоит из реакции A , направленной вверх, и из

Фиг. 8. 24. Поперечная сила и изгибающий момент от равномерной нагрузки.

нагрузки qx , направленной вниз. Поперечная сила в произвольном выбранном сечении равна

$$Q=A-qx=\frac{ql}{2}-qx.$$

Она изменяется по прямой. Чтобы провести эту прямую, необходимо вычислить по крайней мере две ординаты. Например, при $x=0$, $Q=\frac{ql}{2}-q\cdot 0=\frac{ql}{2}$; при $x=l$, $Q=\frac{ql}{2}-ql=-\frac{ql}{2}$.

Отложим эти ординаты на левой опоре вверх, а на правой вниз, и, соединив их концы, получим прямую, ограничивающую эпюру Q . По середине балки, при $x=\frac{l}{2}$, поперечная сила равна нулю: $Q=\frac{ql}{2}-q\frac{l}{2}=0$.

Сумма моментов левых сил относительно центральной оси произвольного сечения состоит из момента от реакции и мо-

мента от сплошной нагрузки, равнодействующая которой приложена в центре тяжести нагрузки, т. е. по середине левого участка, на расстоянии $\frac{x}{2}$ от сечения. Изгибающий момент

$$M = Ax - qx \frac{x}{2} = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2} (l - x).$$

При равномерной нагрузке он зависит от x во второй степени, и ординаты его эпюры должны лежать на кривой—параболе второй степени (гл. I, § 2). Вычислим некоторые ординаты:

при $x=0$, $M=0$;

$$\text{при } x = \frac{l}{4}, \quad M = \frac{ql}{2.4} \left(l - \frac{l}{4} \right) = 3 \frac{ql^2}{32};$$

$$\text{при } x = 2 \frac{l}{4}, \quad M = \frac{q}{2} 2 \frac{l}{4} \left(l - 2 \frac{l}{4} \right) = 4 \frac{ql^2}{32} = \frac{ql^2}{8};$$

$$\text{при } x = 3 \frac{l}{4}, \quad M = \frac{q}{2} 3 \frac{l}{4} \left(l - 3 \frac{l}{4} \right) = 3 \frac{ql^2}{32};$$

$$\text{при } x = l, \quad M = \frac{q}{2} l (l - l) = 0.$$

Отложим найденные ординаты вверх от оси балки и, соединив концы их плавной кривой, получим эпюру M (фиг. 8.24). Наибольший изгибающий момент получается по середине пролета:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}.$$

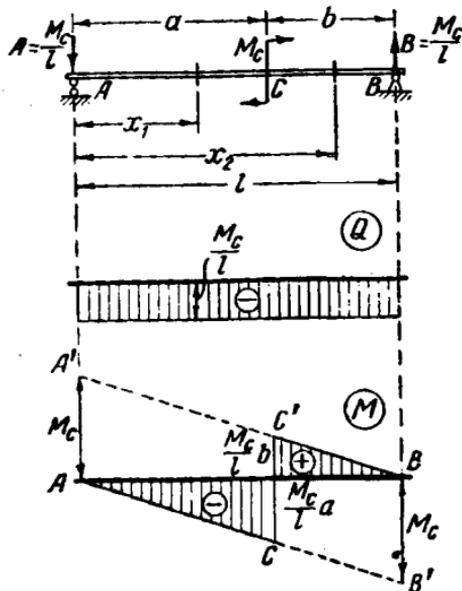
Простая балка, нагруженная равномерной нагрузкой q , в практике встречается очень часто. Для нее в дальнейшем важно будет знать не только M_{\max} , но также площадь эпюры M , ограниченную выпуклой параболой второй степени. Площадь половины такой фигуры, согласно примеру 1, § 5 гл. VI (фиг. 6.16), равна $\frac{2}{3}$ основания $a = \frac{l}{2}$, умноженного на высоту $b = \frac{ql^2}{8}$. Вся площадь эпюры M от равномерной нагрузки простой балки равна

$$\Omega = 2 \frac{2}{3} \frac{l}{2} \frac{ql^2}{8} = \frac{2}{3} l \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{12}.$$

Пример 5. Построить эпюры Q и M для простой балки, нагруженной сосредоточенным моментом M_C в сечении C на расстоянии a от левой опоры и b от правой (фиг. 8.25).

Так как нагрузка составляет пару сил, то опорные реакции, чтобы уравновесить нагрузку, должны составить пару с моментом такой же величины, но вращающим в обратную сторону. Это

значит, что реакции должны быть одинаковы по величине и противоположны по направлению. Момент M_C вращает по часовой стрелке, следовательно, реакции должны вращать против часовой стрелки (фиг. 8. 25): $Al=Bl=M_C$, откуда $A=B=\frac{M_C}{l}$. Реакция A направлена вниз, следовательно, поперечная сила получается отрицательной. Она постоянна по всей длине балки, потому что для всех сечений первого и второго участков, до и после момента M_C , слева имеется единственная сила в виде реакции A . Момент M_C непосредственно на эпюре Q не отражается. Таким образом



$Q = -\frac{M_C}{l}$.

Изгибающий момент в пределах первого участка равен

$M_1 = -Ax_1 = -\frac{M_C}{l}x_1$; он отрицателен и изменяется по прямой: при $x_1=0$, $M_1=0$; при $x_1=a$, $M_1 = -\frac{M_C}{l}a$.

Фиг. 8. 25. Эпюры усилий в простой балке от сосредоточенного момента.

Как только сечение передвинется во второй участок, слева сразу появляется момент M_C , и изгибающий момент второго участка будет

$$M_2 = -Ax_2 + M_C = -\frac{M_C}{l}x_2 + M_C.$$

Он изменяется по прямой, определяемой ординатами:

при $x_2 = a$, $M_2 = -\frac{M_C}{l}a + M_C = \frac{M_C}{l}(-a + l) = \frac{M_C}{l}b$;

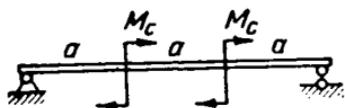
при $x_2 = l$, $M_2 = -\frac{M_C}{l}l + M_C = 0$.

Прямая $C'B$ второго участка параллельна прямой AB' , полученной для первого участка, потому что их ординаты отличаются на одну и ту же величину, равную M_C . Под сосредоточенным моментом эпюра M имеет скачок на величину этого момента.

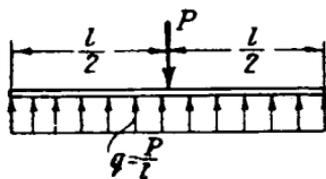
Если изменить расстояния a и b и приложить момент в другом сечении, то эпюра Q не изменится, так как реакции зависят только от величины M_C и пролета l . Не изменится и наклон прямых AB' и $A'B$ в эпюре M , но скачок в ней передвинется в то сече-

ние, где приложен сосредоточенный момент. В частности, если момент приложить на левой опоре, то эпюра будет иметь вид треугольника $AA'B$.

Задачи. 1. Построить эпюры Q и M для простой балки, нагруженной двумя одинаковыми моментами M_c (фиг. 8. 26).



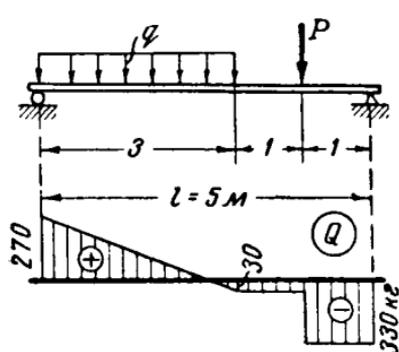
Фиг. 8. 26. Построить эпюры Q и M .



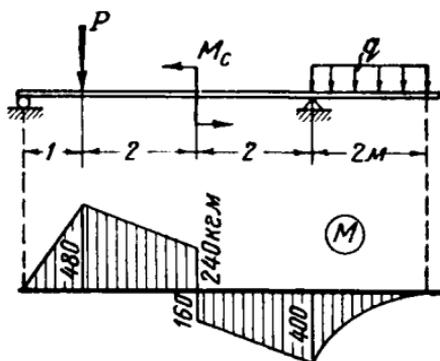
Фиг. 8. 27. Построить эпюры усилий балки от равномерной нагрузки.

2. Балка нагружена равномерной нагрузкой (фиг. 8. 27). Построить эпюры Q и M .

3. Простая балка пролетом $l=5$ м нагружена равномерной нагрузкой q на участке длиной 3 м от левой опоры и сосредото-



Фиг. 8. 28. По заданной эпюре Q определить нагрузку.



Фиг. 8. 29. Вычислить нагрузку по эпюре изгибающих моментов.

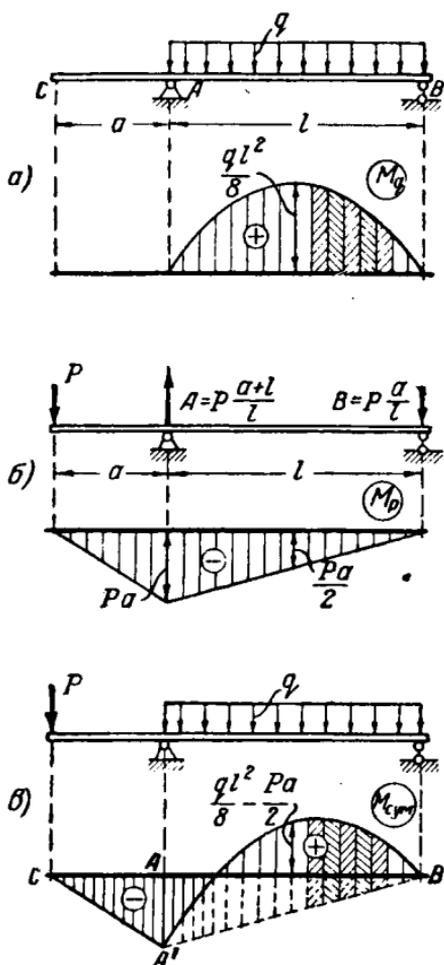
ченной силой P на расстоянии 1 м от правой опоры. Для этой балки построена эпюра Q (фиг. 8. 28). Определить величины нагрузок q и P и построить эпюру M .

4. Известна эпюра изгибающих моментов для консольной балки, нагруженной силой P , сосредоточенным моментом M_c и равномерной нагрузкой q (фиг. 8. 29). Вычислить величину этих нагрузок и построить эпюру поперечных сил.

5. Для лонжерона крыла, изображенного на фиг. 8. 6, вычислить по заданной нагрузке ординаты эпюр Q и M в сечениях A , B , C и по середине участков AB и BC . Построить по найденным ординатам эпюры этих усилий.

§ 7. Сложная нагрузка

Сложение эюр. Иногда приходится, особенно для изгибающих моментов, производить построение эюр не сразу от всей приложенной нагрузки, а отдельно от сил, от сосредоточенных моментов, от сплошной нагрузки и т. д. и затем составлять общую или, как говорят, суммарную эюру от их совместного действия. В примере, изображенном на фиг. 8.14, был дан простой случай сложения эюр от ряда сосредоточенных грузов.



Фиг. 8.30. Сложение эюр усилий.

a — эюра M от равномерной нагрузки q ; *б* — то же от сосредоточенной силы P ; *в* — суммарная эюра M при совместном действии нагрузок.

че, наложить их друг на друга. В пределах консоли от нагрузки q изгибающий момент не возникает, эюра M_q имеет здесь нулевые ординаты. При наложении на этом участке остаются только отрицательные ординаты эюры M_P без изменений. На участке

составлять общую или, как говорят, суммарную эюру от их совместного действия. В примере, изображенном на фиг. 8.14, был дан простой случай сложения эюр от ряда сосредоточенных грузов. Покажем, как получается суммарная эюра в более сложных случаях, если известны эюры от отдельных силовых факторов. Пусть, например, консольная балка нагружена равномерной нагрузкой q в пределах пролета l (фиг. 8.30, *a*). Из примера 4 предыдущего параграфа (фиг. 8.24) известно, что эюра M_q от этой нагрузки положительна и имеет вид выпуклой параболы второй степени с наибольшей ординатой по середине, $M_{q \max} = \frac{ql^2}{8}$. Кроме того, пусть

эта же балка нагружена еще и сосредоточенной силой P на конце консоли (8.30, *б*). Найдем от нее опорные реакции:

$$A = \frac{P(a+l)}{l} \quad \text{и} \quad B = \frac{Pa}{l};$$

затем построим эюру M_P , которая получается отрицательной и имеет вид треугольника с наибольшей ординатой на левой опоре; $M_{P \max} = -Pa$.

Чтобы получить общую эюру от совместного действия нагрузок q и P (фиг. 8.30, *в*), нужно сложить эюры M_q и M_P или, иначе,

между опорами к отрицательным ординатам треугольной эпюры M_p нужно приложить положительные ординаты эпюры M_q ; разность между ними и будет давать ординаты суммарной эпюры. У левой опоры, где ординаты M_p по абсолютной величине больше ординат M_q , суммарная эпюра получается отрицательной; в сечениях, где M_p меньше M_q , суммарная эпюра положительная; по середине пролета

$$M_{\text{сум}} = M_q - M_p = \frac{ql^2}{8} - \frac{Pa}{2}.$$

Если параболическую эпюру M_q разбить на некоторое число вертикальных тонких полосок, то при сложении эти полоски как бы передвигаются по вертикали и размещаются своим основанием на прямой $A'B$ треугольной эпюры M_p , оставаясь попрежнему вертикальными и плотно заполняя весь участок между опорами. При этом симметричная относительно середины парабола (фиг. 8.30, а) перекошится и не будет симметричной (фиг. 8.30, в), но число полосок, ограниченных ею, и их расстояния по горизонтали не изменяются. Поэтому площадь такой перекошенной параболы второй степени остается прежней, $\Omega = \frac{ql^3}{12}$, и ее центр тяжести лежит

на средней вертикали, как и в симметричной параболе. Исходя из этого построения, легко определить площадь суммарной эпюры $M_{\text{сум}}$. В пределах консоли она не изменилась и равна площади $\triangle САА'$. На участке AB она состоит из положительной площади параболы и отрицательной площади $\triangle A'AB$: $\Omega_{AB} = \frac{ql^3}{12} - \frac{Pal}{2}$. Эту же эпюру можно получить и общим

путем: сначала определить опорные реакции от всей нагрузки, а затем составить уравнения эпюр Q и M для каждого участка, как это делалось в примерах § 5 и 6.

Сплошная нагрузка переменной интенсивности. В инженерных сооружениях часто приходится иметь дело со сплошной нагрузкой, интенсивность которой подчинена сложному закону распределения ее по длине балки, нередко заданному лишь графиком. Например, воздушное давление распределено по площади крыла самолета неравномерно. Средние по каждой хорде величины давлений меняются по размаху (фиг. 8.31, а). Для получения в каждом намеченном сечении интенсивности q [кг/см], приходящейся на единицу длины по размаху крыла, нужно среднее (по хорде) значение давления, действующее в данном сечении, умножить на хорду сечения b . Вычисляя величины $q = pb$ для ряда сечений, взятых через равные промежутки Δx , и откладывая их на графике в виде ординат, соединенных плавной кривой, получаем эпюру нагрузки q распределенной по размаху (на фиг. 8.31, б изображена такая эпюра для полуразмаха l).

ного конца, можно опорные реакции при определении усилий не вычислять. Тогда поперечная сила в любом сечении на границе между интервалами равна сумме площадей полос эпюры нагрузки, расположенной в данном случае слева от сечения. Эти полосы имеют разную высоту q и одинаковую ширину Δx , которая при суммировании выходит за скобки. Например, в четвертом сечении (фиг. 8. 31,в)

$$Q_4 = (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \Delta x.$$

Для вычисления Q достаточно сложить средние ординаты эпюры q для интервалов, расположенных слева от сечения, и умножить сумму на длину интервала Δx . Чтобы вычислить изгибающий момент в каком-либо сечении на границе между интервалами, нужно нагрузку каждого интервала $q\Delta x$ умножить на ее расстояние до сечения и сложить эти произведения. Принимая во внимание, что длина всех интервалов одинаковая и выходит за скобки, то, например, для того же четвертого сечения получается

$$M_4 = (3,5q_1 + 2,5q_2 + 1,5q_3 + 0,5q_4) (\Delta x)^2.$$

Здесь в скобках стоит сумма произведений левых ординат эпюры q на число интервалов, заключенных между соответствующей ординатой и сечением. Вся сумма умножается на квадрат интервала Δx . По вычисленным таким образом ординатам строятся эпюры Q и M (фиг. 8. 31,в и г).

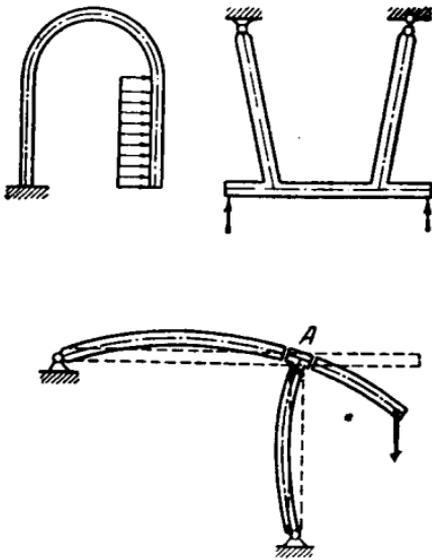
Рассмотренный приближенный способ, пригодный для любой нагрузки, дает результаты, которые будут тем точнее, чем мельче будут интервалы Δx , т. е. чем больше будет взято промежуточных сечений. Это позволяет производить расчет с любой степенью точности, которая может быть признана целесообразной. Достаточно удовлетворительная для целей практики точность расчета получается, если разделить полуразмах l на $n=6$ или больше частей.

Задачи. 1. Простая балка пролетом $l=4$ м нагружена равномерной нагрузкой $q=200$ кг/м, направленной вниз. Добавить к этой балке в опорных сечениях два одинаковых отрицательных момента M_0 , вызывающих изгиб ее выпуклостью вверх, и подобрать их величину так, чтобы площади эпюр изгибающих моментов отдельно от нагрузки q и от опорных моментов M_0 были равны. Построить эпюру $M_{\text{сум}}$ от совместного действия нагрузки q и моментов M_0 . *Ответ:* $M_0 = \frac{ql^2}{12}$.

2. Для крыла, длина которого от корневого сечения до свободного конца $l=5,4$ м, известны ординаты эпюры q для средних сечений интервалов (фиг. 8. 31,б): $q_1=240$; $q_2=580$; $q_3=820$; $q_4=980$; $q_5=1100$; $q_6=1160$ кг/м. Вычислить усилия Q и M во всех сечениях и построить их эпюры. *Ответ:* в корневом сечении $Q=4392$ кг; $M=9300$ кгм.

§ 8. Рама

Система брусьев или стержней, жестко связанных между собой во всех или в некоторых узлах, называется рамой, как, например, системы, изображенные на фиг. 8.32. Жесткое соединение стержней, из которых состоит рама, предполагает отсутствие деформаций узловых соединений, таким образом, если от действия нагрузки узел рамы поворачивается на какой-нибудь угол, то вместе с ним поворачиваются на тот же угол крайние сечения всех стержней, соединенных с этим узлом



Фиг. 8.32. Примеры рам.

(фиг. 8.32, узел *A*). Рама, у которой оси всех стержней и ее нагрузка лежат в одной плоскости и в той же плоскости происходит деформация рамы, называется плоской. В противном случае рама относится к числу пространственных. В настоящем параграфе рассматриваются только плоские рамы. Закрепление плоских рам производится при помощи таких же опор, как и закрепление балок. Определение опорных реакций рам ничем не отличается от определения реакций балок. Для этой цели применяются те же приемы и те же уравнения равновесия статики (гл. I, § 7).

Усилия, заменяющие в данном поперечном сечении действие отброшенной части рамы на остающуюся, состоят не только, из поперечной силы Q и изгибающего момента M , как в балке от нагрузки перпендикулярной ее оси; в плоской раме, как правило, появляется еще одно усилие, а именно, *продольная сила* N . Усилия M , Q и N возникают одновременно, все вместе заменяют действие отброшенной части на остающуюся и уравнивают внешние силы, приложенные к этой остающейся части. По аналогии с вычислением усилий M и Q (§ 3 настоящей главы) при вычислении усилия N будем исходить из того, что продольная сила в данном сечении равна алгебраической сумме проекций на ось рассматриваемого участка рамы всех сил, расположенных по одну сторону от сечения. Например, для рамы, изображенной на фиг. 8.33, *a*, в сечении mm получается изгибающий момент $M = Pa$. Здесь a — перпендикуляр, опущенный из центра сечения mm на направление силы P . В том же сечении поперечная сила $Q = P \sin \alpha$, а продольная сила $N = P \cos \alpha$. Угол α измеряется

между направлением внешней силы P и направлением оси рамы в данном сечении. В тех сечениях, где нагрузка P перпендикулярна оси рамы, там угол $\alpha = 90^\circ$, а так как $\cos 90^\circ = 0$, то продольная сила в этих сечениях отсутствует, $N = 0$. Там, где сила P параллельна оси рамы, отсутствует поперечная сила, $Q = 0$, потому что угол $\alpha = 0$ и $\sin 0 = 0$.

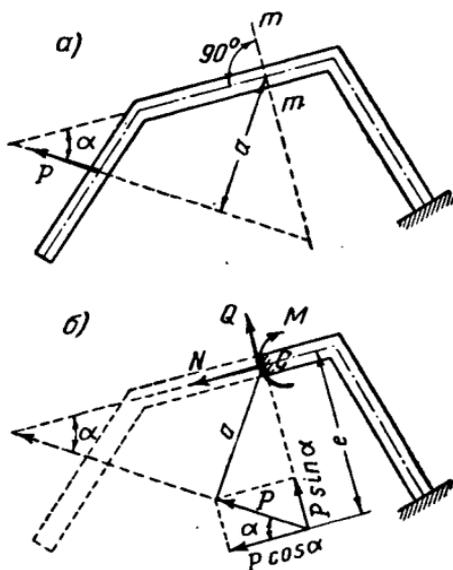
Раскладывая внешнюю нагрузку P (фиг. 8.33, б) на два направления — перпендикулярное и параллельное оси рамы в данном сечении, получаем составляющие, из которых первая равна поперечной силе Q , а вторая — продольной силе N от этой нагрузки. При этом составляющая N создает относительно центра тяжести сечения mm момент

$$M = Ne = P \cos \alpha \frac{a}{\cos \alpha} = Pa,$$

который оказывается равен изгибающему моменту. Расстояние e от центра тяжести S до пересечения силы P с направлением поперечного сечения, равно $\frac{a}{\cos \alpha}$

(фиг. 8.33, а), называется *эксцентриситетом* приложения нагрузки в данном сечении. Усилия M , Q и N изменяются от сечения к сечению рамы. Наглядную картину этого изменения дают эпюры, ординаты которых должны быть отложены по перпендикуляру к оси рамы в каждом сечении.

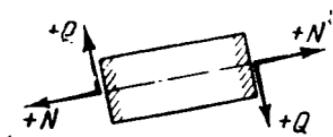
Правило знаков для усилий M и Q примем такое же, как и в балках (фиг. 8.12). Но в раме не всегда ясно, какие волокна являются верхними и какие нижними, поэтому условимся откладывать ординаты эпюры M всегда на стороне сжатых волокон в соответствии с принятым правилом построения эпюры M в балках (§ 4 настоящей главы). При таком построении можно не указывать, какие ординаты эпюры M считаются положительными и какие отрицательными. Знак поперечной силы будем определять, исходя из того, что положительная поперечная сила стремится повернуть выделенный элемент по часовой стрелке, а отрицательная — против часовой стрелки. Это соответствует принятому ранее правилу знаков (фиг. 8.12). Продольную силу условимся считать положительной, если она вызывает растяжение в данном сечении, и отрицательной, если она вызывает сжатие.



Фиг. 8.33. Усилия в раме.

a — сила P образует угол α с осью рамы в сечении mm ; б — усилия в сечении mm от нагрузки P .

На фиг. 8.34 показано направление действия положительных усилий Q и N на выделенный элемент. При построении эпюр Q и N положительные ординаты будем отмечать знаком плюс, а отрицательные — знаком минус и откладывать ординаты с разными знаками в разные стороны от оси рамы, причем не будем уста-

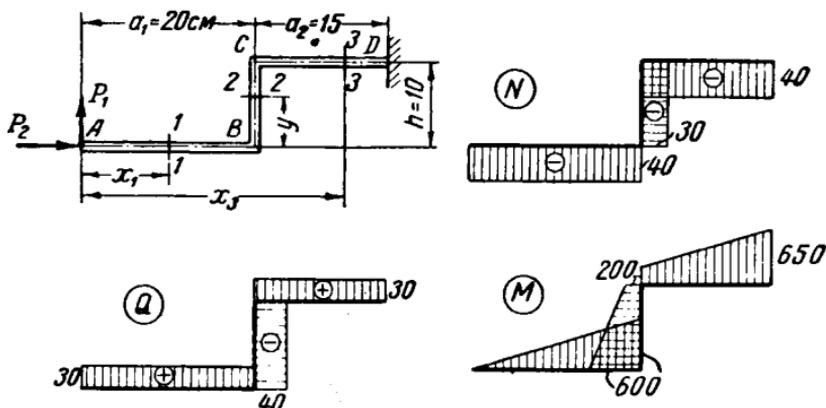


Фиг. 8.34. Правило знаков для поперечной и продольной сил.

навливать с какой стороны откладывать положительные ординаты и с какой — отрицательные. Применение этих правил покажем на следующих примерах.

§ 9. Построение эпюр усилий в рамах

Пример 1. Построить эпюры поперечной и продольной сил и изгибающего момента от сил $P_1=30$ кг и $P_2=40$ кг, приложенных на одном конце рамы, заделанном другим концом в стену (фиг. 8.35). Построение начнем от левого свободного конца A ,



Фиг. 8.35. Построение эпюр Q , N и M в раме от сосредоточенных сил.

вычисляя усилия последовательно для каждого участка. При этом рекомендуется правую часть рамы закрыть листом бумаги и левую часть рассматривать как консоль.

Участок AB . Слева от произвольного сечения $i—i$ находятся силы P_1 и P_2 . Их проекция на вертикальную ось $i—i$ равна положительной поперечной силе $Q_1=P_1=30$ кг. Проекция на горизонтальную ось равна продольной силе, которая вызывает сжатие $N_1=-P_2=-40$ кг. Поперечная и продольная силы на участке AB постоянные. Откладываем положительные ординаты эпю-

ры Q вверх, а отрицательные ординаты эпюры N вниз и отмечаем их знаками плюс и минус соответственно (фиг. 8.35). Изгибающий момент в сечении $1-1$, $M_1 = P_1 x_1$, вызывает сжатие верхних волокон и изменяется по наклонной прямой от $M_1 = 0$ при $x_1 = 0$ до $M_1 = P_1 a_1 = 30 \cdot 20 = 600$ кгсм при $x_1 = a_1$. Откладываем ординаты эпюры M вверх и соединяем прямой.

Участок BC. Чтобы получить поперечную силу, нужно проектировать левые силы на перпендикуляр к оси бруса, т. е. на горизонтальную ось $2-2$, $Q = -P_2 = -40$ кг. Поперечная сила на этом участке стремится повернуть выделенный элемент против часовой стрелки. Она отрицательна, поэтому ординаты ее эпюры откладываем вправо от оси BC .

Продольная сила равна сумме проекций на ось бруса, т. е. на вертикаль BC , $N_2 = -P_1 = -30$ кг. Она вызывает сжатие в сечении $2-2$; ординаты эпюры откладываем вправо с той же стороны от оси, как и для участка AB .

Изгибающий момент в сечении $2-2$ равен $M_2 = P_1 a_1 - P_2 y$. От силы P_1 возникает постоянный момент, направленный по часовой стрелке; он вызывает сжатие левых волокон. От силы P_2 момент изменяется пропорционально расстоянию y и направлен против часовой стрелки; он вызывает сжатие правых волокон. Ординаты эпюры M уменьшаются по прямой от $M_2 = P_1 a_1 = 30 \cdot 20 = 600$ кгсм при $y = 0$ до $M_2 = P_1 a_1 - P_2 h = 600 - 40 \cdot 10 = 200$ кгсм при $y = h$. Они отложены на фиг. 8.35 со стороны сжатых волокон.

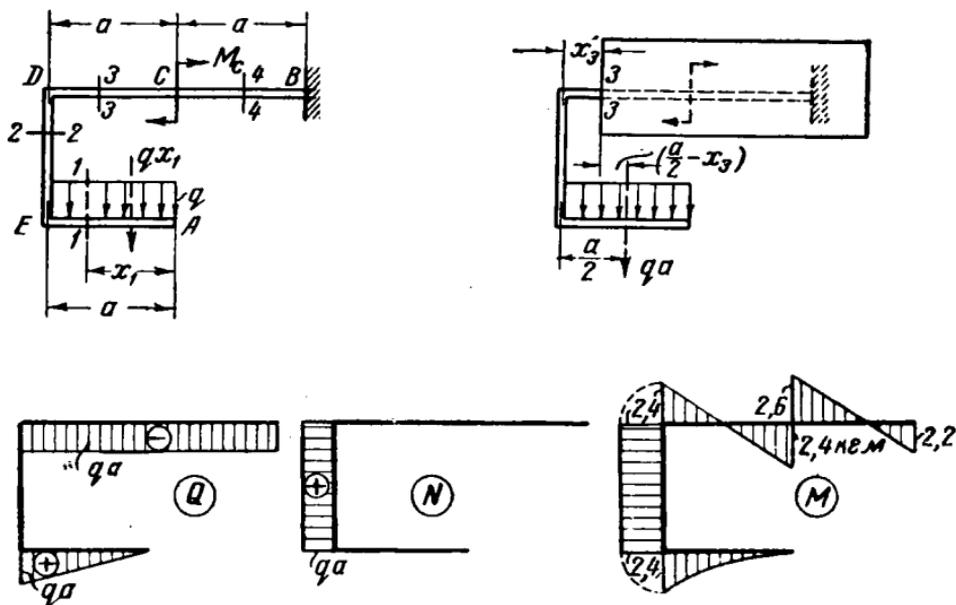
Участок CD. Поперечная и продольная силы получают здесь такие же, как и для участка AB , потому что сечение $3-3$ параллельно сечению $1-1$ и между ними нет нагрузки. Изгибающий момент в сечении $3-3$ равен $M_3 = P_1 x_3 - P_2 h$. Он изменяется по наклонной прямой от $M_3 = P_1 a_1 - P_2 h = 200$ кгсм при $x_3 = a$ до $M_3 = P_1 (a_1 + a_2) - P_2 h = 30 \cdot 35 - 40 \cdot 10 = 650$ кгсм при $x_3 = a_1 + a_2$. На участке CD сжимаются верхние волокна, потому что момент от силы P_1 , направленный по часовой стрелке, больше момента от силы P_2 , имеющего обратное направление. На эпюре M (фиг. 8.35) знаки не надписаны, так как ординаты отложены со стороны сжатых волокон, что вполне определяет направление действия изгибающего момента в каждом сечении.

Пример 2. Построить эпюры для рамы, заделанной одним концом и нагруженной равномерной нагрузкой интенсивностью $q = 120$ кг/м на участке AE длиной $a = 20$ см и сосредоточенным моментом $M_C = 5$ кгм (фиг. 8.36).

Построение эпюр начнем от свободного конца A и будем идти по оси рамы к концу B .

Поперечная сила в сечении $1-1$ равна сумме позади лежащих сил $Q_1 = qx$. Она изменяется по прямой от $Q_A = 0$ до $Q_E = qa = 120 \cdot 0,2 = 24$ кг. На этом участке поперечная сила положительна, потому что она стремится повернуть выделенный элемент по часовой стрелке. Отложим ординаты ее эпюры на на-

ружных волокон вниз (фиг. 8. 36). На участке ED поперечная сила равна нулю, потому что на горизонтальное направление, перпендикулярное оси рамы, силы, лежащие позади сечения 2—2, проекций не дают. Если отбросить часть рамы справа от сечения 3—3 или просто закрыть ее листом бумаги (фиг. 8. 36), станет совершенно ясно, что для участков DC и CB позади лежащая сплошная нагрузка проектируется полностью на вертикальное направление и в сечениях 3—3 и 4—4 равна постоянной поперечной силе, которая стремится повернуть элемент против часовой стрелки, $Q_3 = Q_4 = -qa = -24$ кг. По этим значениям построена эпюра Q .



Фиг. 8. 36. Пример построения эпюр Q , N и M в раме с одним заделанным концом.

Продольная сила от вертикальной нагрузки на горизонтальных участках AE и DB не возникает. На участке CD в произвольном сечении 2—2 на ось бруса проектируется вся позади лежащая равномерная нагрузка. Она равна продольной силе, вызывающей растяжение, $N_2 = qa = 24$ кг. Откладываем положительные ординаты эпюры N влево от оси ED (фиг. 8. 36).

Изгибающий момент в сечении 1—1 от позади лежащей нагрузки направлен по часовой стрелке и равен

$$M_1 = qx_1 \frac{x_1}{2} = \frac{qx_1^2}{2}. \text{ Он изменяется по квадратной параболе}$$

от $M_A = 0$ до $M_E = \frac{qa^2}{2} = \frac{120 \cdot 0,2^2}{2} = 2,4$ кгм. Отложим ординаты эпюры M на сжатых волокнах. Позади сечения 2—2 располо-

жена вся сплошная нагрузка, равнодействующая которой проходит по середине участка AE и равна qa . Ее плечо для всех сечений участка ED равно $\frac{a}{2}$. Изгибающий момент на этом участке постоянен: $M_2 = \frac{qa^2}{2} = 2,4 \text{ кгм}$. Он вызывает сжатие левых волокон.

Переходим к сечению 3—3. Нагрузка позади него сводится к равнодействующей qa . Момент в сечении 3—3, расположенном слева от равнодействующей, направлен по часовой стрелке и равен $M_3 = qa \left(\frac{a}{2} - x_3 \right)$. На участке DC он изменяется по наклонной прямой от $M_D = \frac{qa^2}{2} = 2,4 \text{ кгм}$ при $x_3 = 0$

до $M_C = qa \left(\frac{a}{2} - a \right) = -\frac{qa^2}{2} = -2,4 \text{ кгм}$ при $x_3 = a$. В левой половине участка DC сжимаются верхние волокна, а в правой — нижние. Для сечения 4—4 к нагрузке левой части добавляется сосредоточенный момент M_C : $M_4 = qa \left(\frac{a}{2} - x_4 \right) + M_C$.

При $x_4 = a$, $M_4 = -\frac{qa^2}{2} + M_C = -2,4 + 5 = 2,6 \text{ кгм}$; при $x_4 = 2a$, $M_4 = qa \left(\frac{a}{2} - 2a \right) + M_C = -2,2 \text{ кгм}$. Под сосредоточенным моментом эпюра M имеет скачок на величину этого момента. Прямые, ограничивающие эпюру M на участках DC и CD , параллельны между собой (фиг. 8.36).

Пример 3. Рама, имеющая форму буквы П, закреплена на концах при помощи неподвижной и подвижной цилиндрических опор. Она несет равномерно распределенную по левой стойке горизонтальную нагрузку $q = 200 \text{ кг/м}$ (фиг. 8.37). Построение эпюр возможно только после определения опорных реакций. В неподвижной опоре могут возникнуть две реакции: вертикальная A и горизонтальная H ; в подвижной — только вертикальная B . Отбросим опоры, заменив их действие реакциями (фиг. 8.37), и составим уравнения равновесия всех сил:

$$\sum X = 0; \quad \sum M_A = 0 \text{ и } \sum M_B = 0.$$

Отсюда найдем $H = qh = 600 \text{ кг}$; $B = 450 \text{ кг}$; $A = 450 \text{ кг}$. Теперь построение эпюр можно начать от любого конца.

Поперечная сила в сечении 1—1 при подсчете слева равна $Q_1 = H - qy$. Она изменяется по наклонной прямой от $Q_A = 600 \text{ кг}$ до нуля в точке C . На участке CD получаем $Q_2 = -A = -450 \text{ кг}$, потому что слева от сечения 2—2 на вертикаль проек-

тируется только реакция A . На участке DB сумма проекций позади лежащих сил на горизонтальное направление равна нулю, $Q_3=0$.

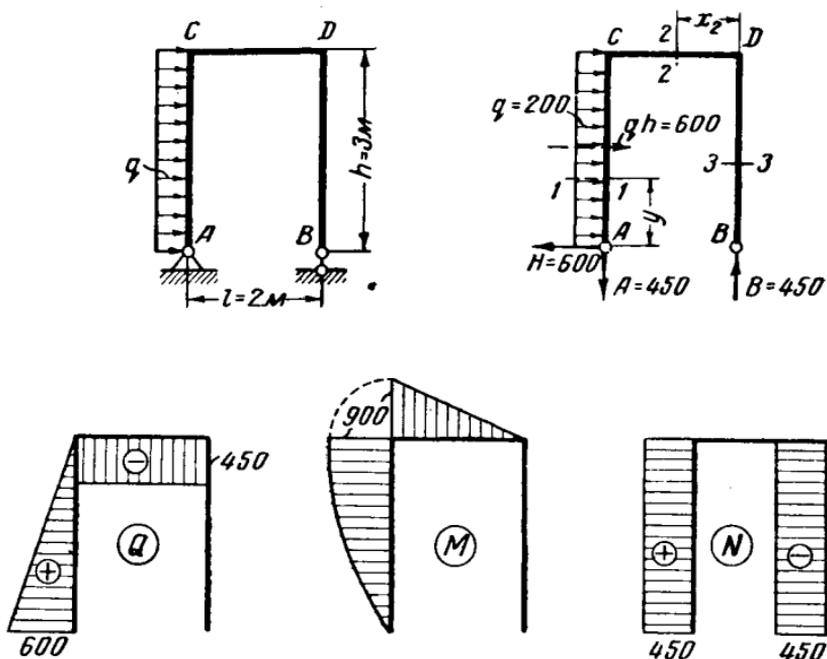
Изгибающий момент в сечении $1-1$ от нижних сил равен

$$M_1 = Hy - qy \frac{y}{2} = qhy - \frac{qy^2}{2}.$$

Сила A проходит через центр сечения $1-1$ и момента не создает. Эюра M на участке AC изменяется по квадратной параболе от $M_A=0$ до

$$M_C = qh^2 - \frac{qh^2}{2} = \frac{qh^2}{2} = \frac{200 \cdot 9}{2} = 900 \text{ кгм.}$$

Момент силы H вызывает сжатие левого волокна. Сплошная нагрузка только уменьшает этот момент, но не превосходит его.



Фиг. 8.37. Эюры поперечной и продольной сил и изгибающего момента в раме на двух опорах от равномерной нагрузки.

Откладываем ординаты эюры M влево. Ординаты эюры M для других участков удобнее вычислять, обходя раму от правой опоры к левой. На участке BD позади лежащая реакция B момента не создает. На участке DC момент в сечении $2-2$ равен (фиг. 8.37) $M_2 = Bx_2$. Он изменяется по прямой от нуля в точке D до $M_C = 900 \text{ кгм}$ и вызывает сжатие верхних волокон.

Продольная сила вызывает растяжение левой стойки и сжатие правой. В горизонтальном элементе рамы продольная сила отсутствует. Эюры усилий изображены на фиг. 8.37.

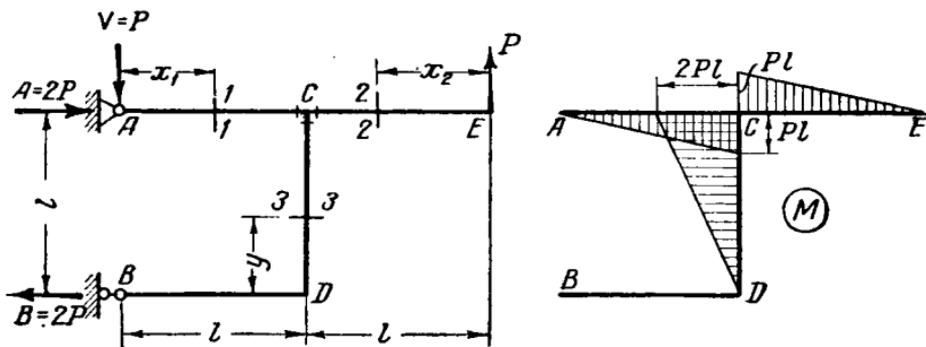
Пример 4. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы, изображенной на фиг. 8.38, находящейся под действием сосредоточенной силы P . Вычисляем опорные реакции:

$$\Sigma Y = V - P = 0; \quad V = P.$$

$$\Sigma M_B = Al - P2l = 0; \quad A = 2P.$$

$$\Sigma M_A = Bl - P2l = 0; \quad B = 2P.$$

Мысленно освобождаемся от опор и прикладываем вычисленные реакции. В сечении 1—1 слева только сила $V=P$ дает изги-

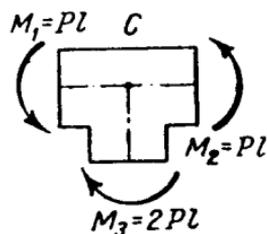


Фиг. 8.38. Эпюра изгибающих моментов от сосредоточенной силы P .

бающий момент $M_1 = Px_1$. Он изменяется по наклонной прямой от нуля до Pl для сечения чуть левее точки C и действует против часовой стрелки, вызывая сжатие нижних волокон. Как только мы перейдем за точку C в участок CE , то к левым силам сразу добавится реакция B . Поэтому удобнее пойти справа, где находится одна сила P . Она вызывает в сечении 2—2 момент $M_2 = Px_2$, который действует справа против часовой стрелки и сжимает верхние волокна. Эпюра M от E к C изменяется от нуля до Pl в сечении чуть правее точки C .

Если, перейдя точку C , пойти вниз на участок CD , то сверху сразу добавятся силы, приложенные к опоре A , а снизу будет действовать единственная сила B . Снова следует изменить порядок обхода и для упрощения подсчета пойти от нижней опоры. На участке BD реакция B не дает момента. В сечении 3—3 снизу момент равен $M_3 = By = 2Py$. От D до C он изменяется по треугольнику с наибольшей ординатой $2Pl$ чуть ниже точки C . Сжимаются левые волокна.

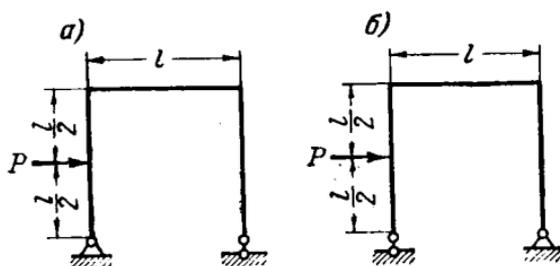
Чтобы убедиться в правильности построения эпюры M , рассмотрим равновесие узла C . Вырежем его из рамы и приложим



Фиг. 8.39. Схема равновесия вырезанного узла рамы.

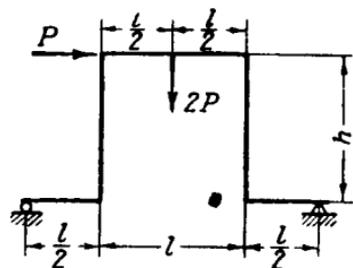
моменты, действующие на него со стороны всех стержней (фиг. 8.39). О направлении моментов судим по расположению сжатого волокна. Если узел находится в равновесии, то сумма всех моментов, действующих относительно оси, перпендикулярной плоскости рамы в точке C , должна равняться нулю, что нетрудно видеть по фиг. 8.39. По сути дела это условие совпадает с условием равенства нулю моментов всех сил рамы относительно точки C .

Задачи. 1. Построить эпюры Q , M и N для П-образной рамы на двух опорах, нагруженной сосредоточенной силой P , прило-



Фиг. 8.40. Построить эпюры усилий.

a — левая опора шарнирно неподвижная;
 b — левая опора шарнирно подвижная.



Фиг. 8.41. Построить эпюры усилий от каждой силы в отдельности.

женной по середине левой стойки (фиг. 8.40, a), и показать, как они изменятся, если опоры поменять местами (фиг. 8.40, b).

2. Коленчатый вал нагружен в его плоскости симметричной силой $2P$ по середине и несимметричной силой P в углу (фиг. 8.41). Построить эпюры изгибающих моментов от каждой нагрузки в отдельности.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит явление изгиба?
2. Перечислите типы опорных устройств и укажите, какие реакции в них возникают.
3. Изложите порядок определения реакций.
4. Дайте определения поперечной силы, изгибающего момента и продольной силы.
5. Какое правило знаков принято для M , Q и N ?
6. Перечислите основные свойства эпюр M и Q .
7. Чему равна поперечная сила там, где изгибающий момент наибольший?
8. Что называется рамой?
9. Как проверить эпюру M по равновесию узла?

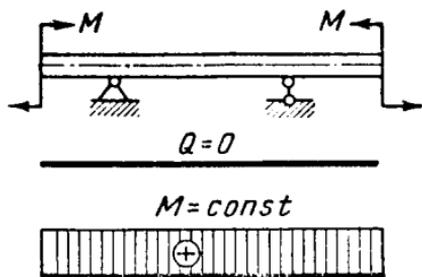
Глава IX

НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

§ 1. Основные допущения

В предыдущей главе, § 1 и 3, было установлено, что при изгибе в поперечном сечении балки возникают нормальные напряжения σ , создающие изгибающий момент M , и касательные τ , создающие поперечную силу Q . Сначала займемся определением нормальных напряжений. Рассмотрим случай изгиба, при котором касательные напряжения в поперечном сечении балки не возникают, т. е. случай, когда поперечная сила равна нулю. Так, например, при нагружении балки двумя одинаковыми моментами взаимно противоположного направления (фиг. 9.1) опорные реакции не возникают, и по всей длине поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент имеет постоянное значение. Такой случай изгиба, когда изгибающий момент постоянен, а поперечная сила равна нулю, называется *чистым изгибом*. Это явление наблюдается и при других нагрузках. В условиях чистого изгиба находится, например, консоль при нагружении сосредоточенными моментами (фиг. 8.16 и 8.17), средняя часть балки на двух опорах (фиг. 8.22) от действия двух симметричных сил и т. д. Вначале будем рассматривать балки постоянного сечения, имеющие хотя бы одну плоскость симметрии, совпадающую с плоскостью нагрузки (фиг. 8.5). На фиг. 9.2 изображен в увеличенном масштабе участок балки прямоугольного сечения и показана ее плоскость симметрии, которая одновременно является плоскостью нагрузки. Рассмотрим деформацию такой балки при чистом изгибе ее парами сил, лежащими в плоскости симметрии. До нагружения балки на ее боковой грани (фиг. 9.3,а) проведем близко друг к другу две линии $1-1$ и $2-2$ перпендикулярно к оси балки. Эти линии являются следами двух смежных поперечных сечений, отстоящих друг от друга на очень малом расстоянии Δx . Между этими сечениями на той же боковой грани проведем прямые ab и cd , параллельные оси балки, одну вблизи нижнего, и другую вблизи верхнего края. До деформации все волокна, заключенные между параллельными сечениями, как вну-

трение, так и на боковых гранях, равны между собой: $ab = cd = \Delta x$. При изгибе балки ось ее искривляется, и одни волокна испытывают сжатие, а другие растяжение (фиг. 8.2). В рассматриваемом нами случае чистого изгиба после деформации (фиг. 9.3,б) мы увидим, что

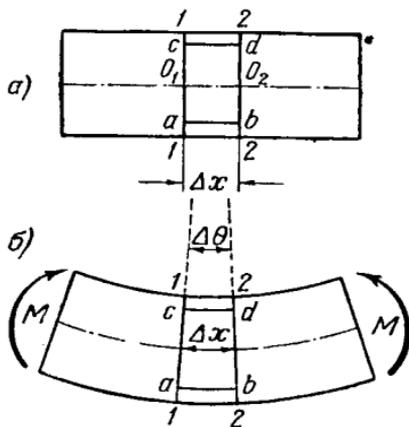


Фиг. 9.1. Балка в условиях чистого изгиба.



Фиг. 9.2. Плоскость симметрии нейтральный слой балки.

- 1) линии 1—1 и 2—2 остаются прямыми и перпендикулярными оси балки, но наклоняются друг к другу и образуют малый угол $\Delta\theta$; 2) отрезок cd укорачивается, а отрезок ab удлиняется.



Фиг. 9.3. Деформация балки при изгибе.

a — до деформации на боковой грани нанесены параллельные риски; b — после деформации поперечные риски наклоняются друг к другу; продольные волокна с одной стороны сокращаются, а с другой — увеличиваются.

Вследствие симметрии балки относительно плоскости нагрузки обе ее половины деформируются симметрично относительно этой плоскости, но как происходит деформация волокон, расположенных внутри балки между сечениями 1—1 и 2—2, непосредственно из опыта установить нельзя. Поэтому естественно сделать вполне возможное допущение, что все волокна, внутренние и боковые, расположенные на одном уровне, т. е. в одном слое, перпендикулярном плоскости симметрии, изменяют свою длину одинаково. Другими словами, не только следы сечений на боковых гранях остаются прямыми, но и сами плоские сечения после деформации остаются плоскими, наклоняясь друг к другу. Это допущение называется гипотезой плоских сечений.

Деформация волокон меняется от слоя к слою непрерывно. Сверху встречаются только сжатые волокна, а снизу только растянутые (фиг. 9.3,б). Следовательно, на каком-то уровне по

высоте балки обязательно встретится слой волокон, не изменяющих своей длины. Этот слой называется *нейтральным слоем*. Он отделяет сжатую часть балки от растянутой и пересекает плоскость каждого поперечного сечения балки по прямой, которая называется *нейтральной линией*. Так как по гипотезе плоских сечений все волокна каждого слоя, перпендикулярного к плоскости симметрии, деформируются одинаково, то и нейтральный слой, а вместе с ним и нейтральная линия перпендикулярны к плоскости симметрии (фиг. 9.2). Но положение нейтральной линии по высоте сечения балки остается пока еще неопределенным.

В опытах на изгиб с помощью специальных приборов, позволяющих измерить очень малые деформации, удается, кроме того, заметить, что сжатые в продольном направлении волокна получают увеличение поперечных размеров, а растянутые — сокращение поперечных размеров. Ширина балки в сжатой зоне увеличивается, а в растянутой уменьшается. Например, прямоугольное поперечное сечение деформируется, как показано на фиг. 9.4. Эта деформация очень мала, она получается заметной только в бруске с очень большими упругими деформациями, например, изготовленном из резины. Изменение поперечных размеров наблюдается и при простом растяжении или сжатии бруска центральной продольной силой (фиг. 3.5). Следовательно, волокна изгибаемой балки находятся в условиях простого растяжения и сжатия. Они свободно деформируются в поперечном направлении, не нажимая при этом друг на друга. Таким образом результаты опытов на изгиб дают возможность принять следующие предпосылки:

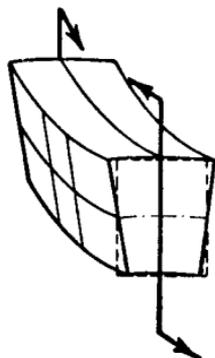
- 1) поперечные сечения остаются после деформации плоскими и лишь поворачиваются около нейтральной оси (гипотеза плоских сечений);
- 2) продольные волокна испытывают простое (одноосное) растяжение и сжатие.

Эти предпосылки позволяют установить закон, по которому распределяются нормальные напряжения по поперечному сечению балки.

§ 2. Распределение нормальных напряжений

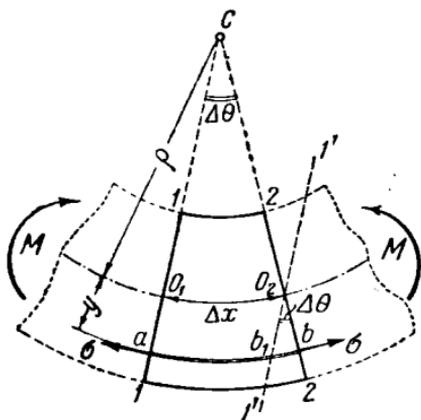
При одноосном растяжении или сжатии между нормальным напряжением и относительным удлинением существует зависимость, выражаемая законом пропорциональности [гл. III, § 2, формула (6)]:

$$\sigma = E\varepsilon.$$



Фиг. 9.4. Деформация в поперечном сечении балки при изгибе.

Чтобы выяснить изменение нормальных напряжений по сечению балки, необходимо установить изменение удлинений волокон при изгибе. Для этого рассмотрим малый элемент длиной Δx , выделенный двумя очень близкими сечениями 1—1 и 2—2 (фиг. 9.3). После деформации балки оба торцевых сечения элемента, оставаясь плоскими, повернутся около нейтральных осей, проходящих через точки O_1 и O_2 , и образуют угол $\Delta\theta$, как показано на фиг. 9.5, где изображен в увеличенном масштабе выделенный элемент после деформации балки.



Фиг. 9.5. Изменение по высоте сечения балки удлинений волокон выделенного элемента после деформации изгиба.

Волокно O_1O_2 , принадлежащее нейтральному слою, сохраняет свою первоначальную длину Δx , потому что не испытывает ни растяжения, ни сжатия. Ниже нейтрального слоя все волокна, в том числе и волокно ab , расположенное на расстоянии y от нейтрального слоя, растянуты.

Абсолютное удлинение волокна ab найдем, если из его длины, полученной им после деформации, вычтем первоначальную длину. Для этого проведем через точку O_2 плоскость $1'-1'$ параллельно сечению 1—1. Она отсечет отрезок ab_1 , равный первоначальной длине волокна, $ab_1 = O_1O_2 = \Delta x$. Оставшийся отрезок b_1b представляет собой абсолютное удлинение

волокна ab . Если его разделить на первоначальную длину, то получится относительное удлинение $\varepsilon = \frac{b_1b}{ab_1} = \frac{b_1b}{O_1O_2}$. Удлинение

будет тем больше, чем дальше от нейтрального слоя расположено волокно и чем сильнее изгибается балка, т. е. чем больше ее кривизна. Выразим относительное удлинение в зависимости от расстояния y и от кривизны. Направления 1—1 и 2—2 пересекаются в точке C , которая является *центром кривизны* нейтрального слоя (фиг. 9.5). Расстояние от центра кривизны до нейтрального слоя равно *радиусу кривизны* $\rho = CO_1$. Умножая его на угол $\Delta\theta$, получим длину дуги O_1O_2 , равную первоначальной длине выделенного элемента $\Delta x = \rho \Delta\theta$.

Так как прямая $1'-1'$ проведена параллельно O_1C , то угол b_1O_2b , как соответственный при параллельных прямых, равен углу O_1CO_2 , образованному вследствие поворота крайних сечений элемента, $\angle b_1O_2b = \angle O_1CO_2 = \Delta\theta$. Подставляя его в выражение относительного удлинения, получаем

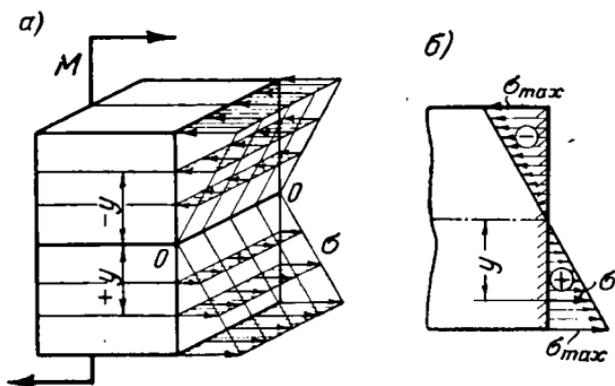
$$\varepsilon = \frac{b_1b}{O_1O_2} = \frac{y\Delta\theta}{\rho\Delta\theta} = \frac{y}{\rho}.$$

Радиус кривизны ρ зависит от того, насколько сильно изгибает-

ся балка. Чем больше ее кривизна, тем больше наклоняются сечения и тем меньше радиус кривизны. Но для каждого отдельного сечения радиус кривизны остается постоянным при вычислении удлинения любого волокна. Удлинение волокон по высоте сечения изменяется пропорционально только расстоянию y от нейтрального слоя, и все волокна одного слоя, параллельного нейтральному, удлиняются одинаково. Умножая ϵ на модуль упругости E , получаем нормальное напряжение при изгибе балки:

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{y}{\rho}. \quad (1)$$

Из уравнения (1) следует, что нормальное напряжение σ изменяется по высоте сечения также пропорционально y (т. е.



Фиг. 9.6. Нормальные напряжения при изгибе.

a — распределение нормальных напряжений по поперечному сечению; b — эпюра нормальных напряжений.

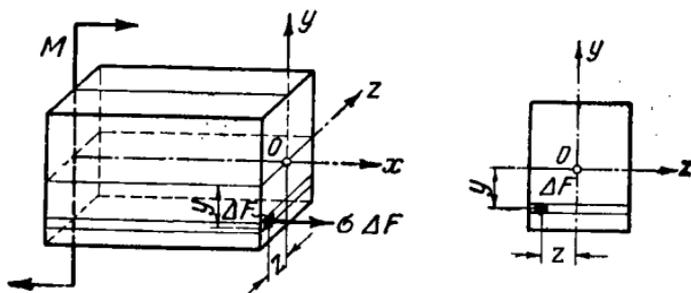
по линейному закону). Волокна, одинаково удаленные от нейтрального слоя, испытывают одинаковые напряжения (фиг. 9.6, a). В нижней части сечения, на выпуклой стороне балки, напряжения растягивающие; при переходе в верхнюю, вогнутую часть расстояние y меняет знак на обратный, а напряжения становятся сжимающими. В нейтральном слое (при $y=0$) нормальные напряжения равны нулю. Закон изменения σ по высоте сечения балки изображается при помощи *эпюры нормальных напряжений* (фиг. 9.6, b), ординаты которой отложены в плоскости симметрии перпендикулярно сечению и равны величинам σ для соответствующих слоев.

§ 3. Вычисление нормальных напряжений

Установленная в предыдущем параграфе зависимость (1) не дает еще возможности определить величину нормальных напряжений. Необходимо, во-первых, найти положение нейтраль-

ного слоя, от которого измеряется расстояние y ; во-вторых, определить радиус кривизны оси балки. Это возможно сделать, воспользовавшись условиями равновесия отсеченной части балки, к которой с одной стороны приложена нагрузка в виде момента M , а с другой — нормальные напряжения σ , вызванные этой нагрузкой (фиг. 9.6) и представляющие собой внутренние силы взаимодействия между оставшейся и отброшенной частью.

Нейтральная линия. Изобразим левую остающуюся часть балки (фиг. 9.7). По условию, принятому в главе VIII (фиг. 8.5), направим вдоль оси балки ось x , вверх — ось y , а по нейтральной линии — ось z . На фиг. 9.7 изображена балка пря-



Фиг. 9.7. Отсеченная часть балки прямоугольного сечения. Составление условий равновесия для определения положения нейтральной линии и кривизны балки.

моугольного сечения. Вообще говоря, сечение может быть любым, имеющим ось симметрии в плоскости изгиба.

В произвольном слое, взятом на расстоянии y параллельно нейтральному, возникают одинаковые нормальные напряжения $\sigma = \frac{E}{\rho} y$. На очень малую площадку сечения, которую обозначим ΔF , приходится малая продольная сила $\sigma \Delta F$. Напишем уравнение проекций на ось x всех сил, действующих на рассматриваемую часть балки. Момент M дает проекцию, равную нулю, а силы $\sigma \Delta F$ проектируются на ось x в натуральную величину. Чтобы получить сумму этих проекций, нужно сложить все силы, приходящиеся на элементарные площадки всего данного сечения $\sum X = \sum \sigma \Delta F = 0$. Отсюда следует, что сумма сжимающих сил должна равняться сумме растягивающих сил. Подставляя в уравнение равновесия вместо нормальных напряжений σ их значения по формуле (1), получаем

$$\sum \frac{E}{\rho} y \Delta F = \frac{E}{\rho} \sum y \Delta F = 0.$$

Здесь $\frac{E}{\rho}$ вынесено за знак суммы как общий множитель. Так как множитель $\frac{E}{\rho}$ для изогнутой балки не равен нулю, то должна равняться нулю сумма произведений элементарных площадок

всего сечения на их расстояния до нейтральной линии, $\sum y \Delta F = 0$. Полученная сумма представляет собой *статический момент* площади сечения относительно нейтральной линии. Известно, что статический момент площади равняется нулю только относительно той оси, которая проходит через центр тяжести [см. формулу (96), гл. I, § 5]. Следовательно, *нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения*. Только в этом случае равнодействующая сжимающих напряжений λ расположенных выше нейтрального слоя, будет равна равнодействующей растягивающих напряжений. Нейтральный слой делит балку на две равновесные части и совпадает с осью балки. Таким образом положение нейтральной линии найдено. Она проходит через центр тяжести сечения перпендикулярно к плоскости симметрии балки. Расстояние y нужно измерять от центра тяжести сечения (фиг. 9.7). Нейтральную линию, проходящую через центр тяжести сечения, называют *нейтральной осью*.

К р и в и з н а б а л к и. Величина напряжения зависит также и от радиуса кривизны. Чтобы его определить, напишем еще одно уравнение равновесия для рассматриваемой части балки, а именно, уравнение моментов относительно нейтральной оси Oz . Малая сила $\sigma \Delta F$ относительно этой оси дает момент $y \sigma \Delta F$ (фиг. 9.7). Чтобы получить момент всех внутренних сил, сложим моменты сил $\sigma \Delta F$, распределенных по всему сечению $\sum y \sigma \Delta F$ (фиг. 9.6,а). Момент сил, заменяющих действие отброшенной части на остающуюся, взятый относительно центральной оси, является изгибающим моментом в данном сечении; он здесь действует против часовой стрелки. Внешний момент M действует по часовой стрелке. Условие равновесия требует, чтобы алгебраическая сумма моментов внешних и внутренних сил, приложенных к любой части балки, равнялась нулю, т. е.

$$\sum M_z = M - \sum y \sigma \Delta F = 0,$$

откуда, подставляя σ по формуле (1) и вынося постоянный множитель $\frac{E}{\rho}$ за знак суммы, находим

$$M = \sum y \frac{E}{\rho} y \Delta F = \frac{E}{\rho} \sum y^2 \Delta F.$$

Сумма произведений элементарных площадок ΔF на квадраты их расстояний до какой-либо оси z , взятая для всего сечения, называется осевым моментом инерции площади относительно этой оси:

$$J_z = \sum y^2 \Delta F. \quad (2)$$

Принимая во внимание это обозначение, можно написать, что

$$M = \frac{E J_z}{\rho} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E J_z}. \quad (3)$$

Выше, в § 2, мы выразили через радиус кривизны первоначальную длину Δx выделенного элемента после его дефор-

мации (фиг. 9.5): $\Delta x = \rho \Delta \theta$. Учитывая формулу (3), отсюда получаем угол поворота двух смежных сечений балки друг относительно друга вследствие изгиба

$$\Delta \theta = \frac{\Delta x}{\rho} = \frac{M}{EJ_z} \Delta x. \quad (3')$$

Величина $\frac{1}{\rho}$, обратная радиусу кривизны, называется *кривизной* балки. Она пропорциональна изгибающему моменту M и обратно пропорциональна произведению модуля упругости E на момент инерции J_z . В балке с большим значением EJ_z кривизна получается маленькой, а радиус кривизны большой: поперечные сечения наклоняются друг к другу на малый угол θ . Изогнуть такую балку трудно: она является жесткой. Наоборот, в балке с малым значением EJ_z кривизна получается большой; балка легко гнется. Произведение EJ_z называется *жесткостью на изгиб*. Чем оно больше, тем жестче балка. Осевой момент инерции, как видно из обозначения (2), измеряется в единицах длины в четвертой степени: длина в квадрате умножается на площадь. Он зависит от размеров и от формы сечения. Величина момента инерции характеризует способность балки сопротивляться искривлению в зависимости от размеров и формы поперечного сечения. Модуль упругости E характеризует ту же способность в зависимости только от материала.

Нормальные напряжения. Выяснив зависимость кривизны балки от изгибающего момента и от ее жесткости, мы теперь можем вернуться к нормальным напряжениям и написать окончательную формулу для их вычисления. Из выражения (3) следует, что $\frac{E}{\rho} = \frac{M}{J_z}$. Подставляя это значение в найденную ранее зависимость (1), получаем окончательную формулу нормальных напряжений

$$\sigma = \frac{M}{J_z} y. \quad (4)$$

Нормальное напряжение в точке сечения на расстоянии y от нейтральной линии равно *изгибающему моменту, умноженному на y и деленному на момент инерции сечения* относительно нейтральной оси. Наибольшие нормальные напряжения в данном сечении возникают в точках, которые наиболее удалены от нейтрального слоя (фиг. 9.6, а и б):

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J_z} y_{\max} = \frac{M}{\frac{J_z}{y_{\max}}}.$$

Отношение осевого момента инерции к расстоянию до крайних точек называется *моментом сопротивления сечения изгибу* и обозначается

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}. \quad (5)$$

Окончательно максимальные нормальные напряжения, возникающие в крайних точках сечения, равны

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}. \quad (6)$$

Момент сопротивления W_z характеризует способность балки сопротивляться изгибу. Чем он больше, тем меньше напряжения при данной нагрузке и тем большую нагрузку выдерживает балка. Момент сопротивления имеет размерность $см^3$ и зависит от размеров и формы сечения.

Воспользовавшись двумя уравнениями равновесия $\Sigma X=0$ и $\Sigma M_z=0$, мы нашли положение нейтральной линии и получили формулу нормальных напряжений при чистом изгибе балки силами, действующими в плоскости симметрии. Так как нормальные напряжения возникают только в связи с возникновением изгибающего момента и не зависят от поперечной силы, то формулу (4) можно применять и к тем случаям, когда в балке, помимо изгибающего момента, имеется еще и поперечная сила Q (вызывающая только касательные напряжения). Кроме того, требование, чтобы нагрузка была расположена в плоскости симметрии, тоже не является обязательным. Формулу (4) можно применять и к таким балкам, которые вообще не имеют ни одной оси симметрии сечения, если при этом соблюдаются некоторые определенные условия расположения нагрузки. Рассмотрим эти условия.

Главные оси сечения. Составим условие равновесия отсеченной части балки (фиг. 9.7) в виде суммы моментов относительно вертикальной оси y всех сил, приложенных к этой части. Внешняя нагрузка, расположенная в плоскости симметрии xOy , никаких моментов относительно оси y не создает. Но каждая внутренняя сила $\sigma \Delta F$ дает момент, равный $z \sigma \Delta F$. Складываем их для всего сечения и составляем относительно оси y уравнение моментов всех сил: $\Sigma M_y = \Sigma z \sigma \Delta F = 0$. Отсюда получается, что нормальные напряжения, распределенные по левой половине сечения, в сумме должны давать такой же по величине момент, как и напряжения правой половины, но направление этих моментов должно быть взаимно противоположным. Подставим в уравнение моментов величину σ по формуле (1):

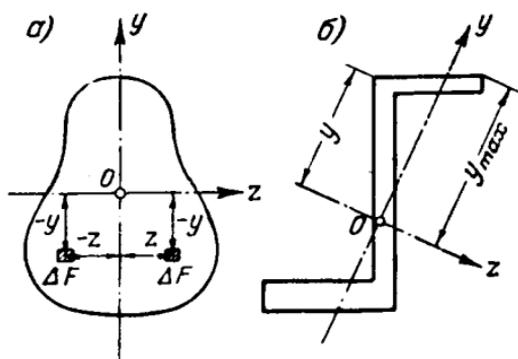
$$\sum z \frac{E}{\rho} y \Delta F = \frac{E}{\rho} \sum zy \Delta F = 0.$$

Как и ранее, $\frac{E}{\rho}$ не равно нулю, следовательно, $\Sigma zy \Delta F = 0$.

Полученная таким путем сумма произведений элементарных площадок ΔF на их расстояния до осей y и z , взятая для всего сечения, называется *центробежным моментом инерции площади сечения* относительно осей y и z :

$$J_{yz} = \Sigma zy \Delta F. \quad (7)$$

Для равновесия балки необходимо, чтобы равнялся нулю центробежный момент инерции относительно осей y и z , из которых одна совпадает с плоскостью нагрузки. В симметричной балке, нагруженной в плоскости симметрии, это условие соблюдается всегда, потому что для каждой площадки ΔF , расположенной слева от оси симметрии y (фиг. 9.8,а), обязательно имеется симметрично расположенная площадка той же величины справа от оси y . Расстояния y от оси z для этих площадок одинаковы по величине и по знаку, но расстояния z от оси симметрии одинаковы только по величине и всегда обратны по знаку. В выражение $\sum zy \Delta F$ войдут произведения с одинаковыми знаками, положительные и такое же количество соответственно равных произведений с разными знаками, отрицательных. Вся сумма будет состоять из двух частей, равных по величине и противоположных по знаку, т. е. она обратится в нуль. Таким образом если хотя бы одна из взаимно перпендикулярных осей является осью симметрии сечения (фиг. 9.8,а), то центробежный момент инерции относительно этих осей равняется нулю. Оказывается,



Фиг. 9.8. Главные оси сечения.

а — сечение симметрично относительно оси y ; центробежный момент инерции J_{yz} равен нулю; б — главные оси несимметричного сечения.

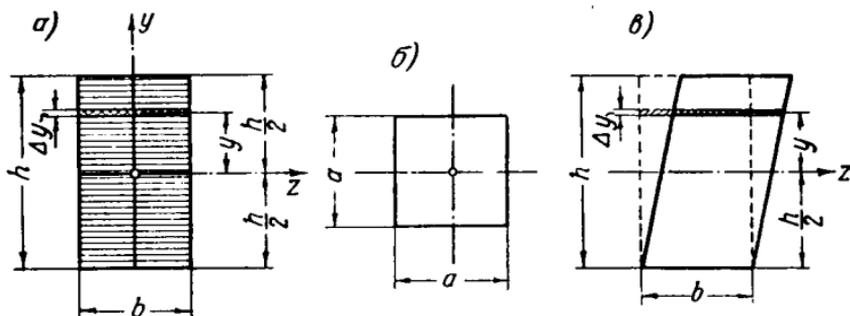
что центробежный момент инерции может равняться нулю не только для симметричных сечений. Вообще для всякого поперечного сечения можно найти такие оси y и z , относительно которых J_{yz} обратится в нуль, например, оси y и z для сечения, изображенного на фиг. 9.8,б.

Взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции сечения*. Если плоскость нагрузки совпадает с одной из главных осей, например, с осью y (фиг. 9.8,б), то вторая главная ось, перпендикулярная первой и проходящая через центр тяжести, совпадает с нейтральной осью сечения. В этом случае соблюдаются все три условия равновесия, и к балке такого сечения можно применять формулу нормальных напряжений (4), измеряя расстояния y перпендикулярно нейтральной линии (фиг. 9.8,б). Взаимно перпендикулярные плоскости, в которых лежат главные оси инерции всех сечений, называются *главными плоскостями балки*. Требование относительно симметричности расположения нагрузки можно теперь заменить требованием, чтобы нагрузка была приложена в одной из главных плоскостей. Всякая плоскость симметрии является главной пло-

скостью, и каждая ось симметрии сечения является главной осью. В заключение отмечаем, что для определения нормальных напряжений в какой-либо точке сечения балки необходимо, во-первых, знать изгибающий момент, величину которого можно найти в опасном сечении при помощи построения эпюры M ; во-вторых, нужно определить центр тяжести сечения и вычислить момент инерции относительно его главной центральной оси, перпендикулярной плоскости нагрузки.

§ 4. Осевые моменты инерции и моменты сопротивления простых фигур

Для всякого сечения, имеющего произвольную форму, момент инерции относительно какой-либо оси $J_z = \sum y^2 \Delta F$ можно вычислить путем непосредственного подсчета суммы. Для этого



Фиг. 9.9. К выводу формул для осевых моментов инерции сечений.

a — прямоугольник; b — квадрат; $в$ — параллелограмм.

нужно все сечение разбить на ряд площадок, например, как показано на фиг. 9.9, a , умножить каждую площадку на квадрат ее расстояния до оси и сложить полученные произведения. К сожалению, такое вычисление не всегда может быть точным. Точность будет достаточной лишь тогда, когда сечение разбивается на большое число малых площадок. Но в этом случае сам процесс вычисления становится громоздким и длительным. Этот общий способ применяется, если сечение или состоит из небольшого числа сравнительно мелких площадок, достаточно удаленных от оси z , или имеет столь сложное очертание, что не позволяет произвести подсчет другим способом. Для некоторых форм сечения удастся вывести формулы, позволяющие сразу определить момент инерции в зависимости от размеров сечения. Покажем это на примерах.

Прямоугольник. Возьмем прямоугольное сечение, наиболее часто встречающееся в практике, с высотой h и шириной b и разобьем его на тонкие полоски, параллельные центральной оси z , относительно которой вычисляется момент инерции (фиг. 9.9, a). Толщину полоски примем равной при-

ращению Δu . Все площадки одной полоски имеют одинаковые расстояния u до оси z , и момент инерции каждой такой полоски длиной b и площадью $\Delta F = b\Delta u$ равен $y^2\Delta F = y^2b\Delta u$. Складывая их для всего сечения, находим момент инерции в виде $J_z = \sum_F y^2b\Delta u = b \sum_F y^2\Delta u$. В прямоугольнике каждая полоска имеет постоянную длину b , которая поэтому выходит за знак суммы. Ордината u изменяется от 0 до $+\frac{h}{2}$ вверх

и от 0 до $-\frac{h}{2}$ вниз, но, будучи возведена в квадрат, она всегда положительна, и поэтому осевой момент инерции — всегда положительная величина. Так как верхняя и нижняя половины сечения одинаковы, то достаточно вычислить сумму для какой-нибудь одной половины и удвоить. Учитывая это

обстоятельство, получаем $J_z = 2b \sum_0^{\frac{h}{2}} y^2\Delta u$. Применим теперь формулу (12) главы VI к вычислению суммы в пределах от нуля до $\frac{h}{2}$ и окончательно найдем момент инерции прямоугольника относительно его центра тяжести

$$J_z = 2b \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} = \frac{bh^3}{12}. \quad (8)$$

В частном случае, когда высота и ширина прямоугольника одинаковы, $h = b = a$, имеем квадратное сечение (фиг. 9.9б), момент инерции которого относительно центральной оси равен

$$J_z = \frac{a^4}{12}. \quad (8')$$

В прямоугольнике расстояния от центральной оси до верхних и нижних крайних точек сечения одинаковы и равны $u_{\max} = \frac{h}{2}$. Момент сопротивления согласно обозначению (5) для прямоугольника и соответственно для квадрата будет

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \text{ и } W_z = \frac{a^3}{6}. \quad (9)$$

Если нужно вычислить момент инерции прямоугольника относительно центральной оси y , то сечение делится на вертикальные полоски и суммирование производится по ширине b . Очевидно, в этом случае получим

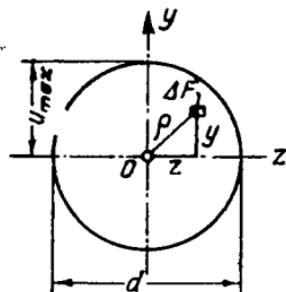
$$J_y = \sum_F z^2\Delta F = \frac{b^3h}{12}. \quad (10)$$

Аналогично вычисляется момент инерции параллелограмма высотой h и шириной b (фиг. 9.9, в). Относительно центральной оси z он равен $J_z = \frac{bh^3}{12}$, потому что сумма произведений

$y^2 \Delta F$ не изменяется. Все полоски площадью $\Delta F = b \Delta y$ в параллелограмме получаются лишь сдвинутыми по отношению к равновеликому прямоугольнику с той же высотой h и шириной b , но они остаются на прежнем уровне.

К р у г. Помимо общего приема, иногда можно вычислить осевой момент инерции, пользуясь уже известными величинами. Так, например, осевой момент инерции площади круга удобно вычислить исходя из полярного момента инерции $J_p = \sum \rho^2 \Delta F$. Расстояние ρ от элементарной площадки ΔF до полюса O (фиг. 9.10) можно выразить по теореме Пифагора через расстояния y и z до центральных осей: $\rho^2 = y^2 + z^2$. Подставляя его в выражение полярного момента инерции и принимая во внимание обозначения сумм по уравнениям (2) и (10), находим

$$J_p = \sum (y^2 + z^2) \Delta F = \sum y^2 \Delta F + \sum z^2 \Delta F = J_z + J_y.$$



Фиг. 9.10. К выводу формулы для осевого момента инерции круга.

Сумма двух осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции, взятому относительно точки пересечения осей. В круглом сечении диаметром d моменты инерции относительно центральных осей y и z одинаковы вследствие симметрии, следовательно, каждый из них равен половине полярного момента инерции. Выражая J_p по формуле (4) главы VI, находим осевые моменты инерции круга

$$J_z = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (11)$$

Так как расстояние до крайних точек $y_{\max} = \frac{d}{2}$, момент сопротивления изгибу круглого сечения, согласно формуле (5), получается тоже в два раза меньше момента сопротивления кручению, а именно

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \text{ или приближенно } W_z \approx 0,1d^3. \quad (12)$$

Для сечения круглой трубы с отношением внутреннего диаметра к наружному равным $\alpha = \frac{d}{D}$, подобно формулам (5)

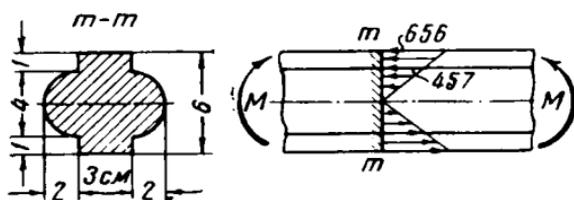
и (9') главы VI, получаем осевой момент инерции и момент сопротивления изгибу в виде

$$J_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4); \quad W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D^3 (1 - \alpha^4). \quad (12')$$

Вычисленные по этим формулам величины J_z и W_z относительно центральных осей сечения круглой трубы для некоторых употребляемых в самолетостроении размеров приведены в табл. 7.

Приведенные результаты позволяют вычислять моменты инерции сечений, образованных из прямоугольников и кругов, исходя из того, что всякую сумму, распространенную на все сечения, можно составить из отдельных сумм, распространенных на составные части сечения. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Прямоугольный брус высотой $h=6$ см и шириной $b=3$ см имеет посередине высоты два продольных утолщения,



Фиг. 9.11. Пример вычисления нормальных напряжений при изгибе бруса прямоугольного сечения с полукруглыми утолщениями.

очерченные по дуге полуокружности диаметром $d=4$ см, и изгибается в вертикальной плоскости моментом $M=150$ кгм (фиг. 9.11). Определить нормальные напряжения в крайних точках полукруга и прямоугольника.

Подсчитаем момент инерции сечения относительно нейтральной оси. Разбиваем все сечение на прямоугольник и два полукруга. Их центры тяжести лежат на горизонтальной оси по середине высоты. Эта ось является нейтральной. Момент инерции относительно нее состоит из момента инерции площади

прямоугольника $J_1 = \frac{bh^3}{12}$ и момента инерции площади

двух половин круга $J_2 = 2 \frac{1}{2} \frac{\pi d^4}{64}$. Сумма их дает момент

инерции всего сечения $J = \frac{bh^3}{12} + \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} + \frac{3 \cdot 14 \cdot 4^4}{64} = 68,6$ см⁴.

Расстояние от нейтральной оси до края прямоугольника $y_1 = 3$ см, а до края полукруга $y_2 = 2$ см. Нормальные напря-

Круглые трубы



Обозначения: F —площадь сечения;
 J —момент инерции;
 W —момент сопротивления.

$D \times d$ мм	t мм	F см ²	J см ⁴	W см ³	$D \times d$ мм	t мм	F см ²	J см ⁴	W см ³
10×8	1	0,2827	0,0290	0,0580	70×66	2	4,273	24,72	7,06
12×10	1	0,3456	0,0527	0,0879	75×65	5	10,996	67,69	18,05
14×12	1	0,4084	0,0868	0,1240	75×71	2	4,587	30,76	8,15
16×14	1	0,4712	0,1331	0,1664	80×70	5	11,781	83,20	20,80
18×16	1	0,5341	0,1936	0,2151	80×76	2	4,901	37,30	9,32
20×18	1	0,5969	0,2701	0,2701	85×77	4	10,179	83,68	19,69
25×21	2	1,4451	0,9628	0,770	85×81	2	5,215	44,93	10,57
30×26	2	1,7593	1,7330	1,156	90×82	4	10,807	100,13	22,25
35×31	2	2,074	2,8330	1,619	90×86	2	5,529	53,55	11,90
40×36	2	2,388	4,327	2,164	95×85	5	14,137	143,58	30,23
45×41	2	2,702	6,258	2,780	95×91	2	5,843	63,20	13,31
50×44	3	4,430	12,281	4,912	100×90	5	14,992	168,81	33,80
50×46	2	3,016	8,701	3,480	100×96	2	6,158	73,95	14,79
55×49	3	4,901	16,620	6,050	110×100	5	16,493	227,82	41,42
55×51	2	3,330	11,794	4,285	110×106	2	6,786	98,97	17,99
60×54	3	5,372	21,88	7,300	120×108	6	21,488	350,05	58,36
60×56	2	3,644	15,34	5,110	120×116	2	7,414	129,08	21,51
65×55	5	9,425	42,71	13,13	130×118	6	23,373	450,29	69,28
65×61	2	3,958	19,66	6,05	130×124	3	11,969	241,45	37,11
70×60	5	10,210	54,24	15,50	140×128	6	25,258	568,05	81,15

$D \times d$ мм	t мм	F см ²	J см ⁴	W см ³	$D \times d$ мм	t мм	F см ²	J см ⁴	W см ³
140×134	3	12,912	303,08	43,30	180×174	3	16,682	653,45	72,61
145×135	5	21,991	539,37	74,40	190×178	6	34,683	1469,22	154,65
150×136	7	31,448	805,76	107,35	200×184	8	48,255	2227,38	222,74
150×144	3	13,855	374,38	49,92	200×192	4	24,630	1183,33	118,33
160×146	7	33,647	986,61	123,33	210×196	7	44,642	2302,5	219,29
160×154	3	14,797	455,88	56,98	220×206	7	46,841	2661,0	241,91
170×156	7	35,846	1193,0	140,35	230×215	7,5	52,426	3259,0	283,39
170×164	3	15,739	549,17	64,61	240×224	8	58,308	3927,4	327,28
180×166	7	38,045	1425,58	158,40	250×234	8	60,821	4457,0	356,56

жения в этих точках для верхней половины балки сжимающие и по формуле (4) они соответственно равны

$$\sigma_1 = \frac{M}{J} y = \frac{15\,000}{68,6} 3 = 656 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_2 = \frac{15\,000}{68,6} 2 = 437 \text{ кг/см}^2.$$

В нижней половине будут такие же по величине растягивающие напряжения (фиг. 9.11).

Пример 2. Вычислить моменты инерции сечения нервюры относительно центральных осей z и y и определить наибольшие нормальные напряжения от изгибающего момента $M = 120 \text{ кгм}$ в двух случаях изгиба: 1) в плоскости, проходящей через ось y (фиг. 9.12, а), и 2) в плоскости, проходящей через ось z (фиг. 9.12, б). Нервюра состоит из двух брусков размером $4 \times 6 \text{ см}$, соединенных двумя стенками толщиной $0,5 \text{ см}$ и высотой 20 см .

1) Относительно оси z , проходящей через центр тяжести, момент инерции прямоугольника $ABCD$ вычисляется по формуле (8):

$$J_1 = \frac{bh^3}{12}. \text{ Он состоит из суммы произведений } y^2 \Delta F,$$

распространенной на площадь сечения нервюры и на площадь внутреннего прямоугольника $abcd$. Момент инерции последнего относительно оси z вычисляется по той же формуле, по-

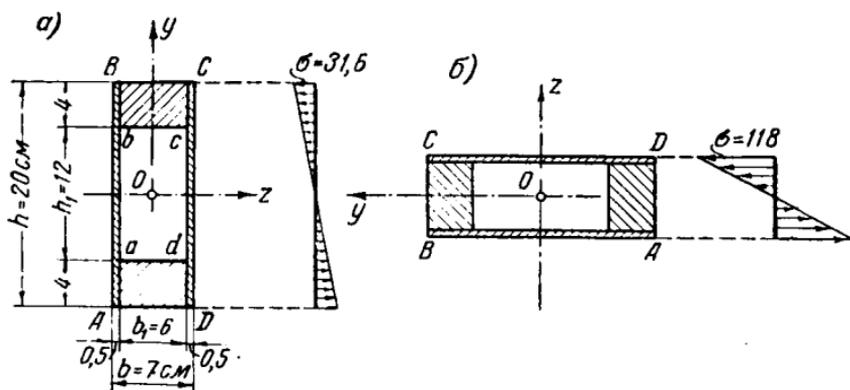
тому что и его центр тяжести лежит на этой оси, $J_2 = \frac{b_1 h_1^3}{12}$.

Разность между J_1 и J_2 равна моменту инерции сечения относительно нейтральной оси:

$$J_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12} = \frac{7 \cdot 20^3}{12} - \frac{6 \cdot 12^3}{12} = 3810 \text{ см}^4.$$

По формуле (5) находим момент сопротивления

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{3810}{10} = 381 \text{ см}^3.$$



Фиг. 9.12. Сравнение нормальных напряжений нервюры.

a — изгиб в плоскости, проходящей через ось y ; b — в плоскости, проходящей через ось z .

Наибольшие напряжения возникают в крайних точках (фигура 9.12, a)

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{12000}{381} = 31,6 \text{ кг/см}^2.$$

Для остальных точек по высоте сечения они изменяются по прямой, проходящей через центр тяжести.

2) Точно так же находим относительно оси y момент инерции

$$J_y = \frac{b^3h}{12} - \frac{b_1^3h_1}{12} = \frac{7^3 \cdot 20}{12} - \frac{6^3 \cdot 12}{12} = 356 \text{ см}^4$$

и момент сопротивления

$$W_y = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{356}{3,5} = 102 \text{ см}^3.$$

Напряжения крайних точек при изгибе в плоскости, проходящей через ось z (фиг. 9.12, b), равны

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_y} = \frac{12000}{102} = 118 \text{ кг/см}^2.$$

Хотя во втором случае крайние точки лежат ближе к нейтральной линии, чем в первом, однако, напряжения сильно увеличились за счет того, что момент инерции J_y по сравнению с J_z уменьшился в значительно большей степени, чем расстояние z_{\max} по сравнению с y_{\max} , что и привело к уменьшению момента сопротивления W_y сравнительно с W_z .

Задачи. 1. Дано прямоугольное сечение высотой h и шириной b (фиг. 9.9,а). Определить, во сколько раз увеличатся момент инерции и момент сопротивления относительно центральной оси z , 1) если увеличить вдвое высоту h и 2) если увеличить вдвое ширину b .

Ответ: 1) Увеличатся J в восемь раз и W в четыре раза; 2) J и W — в два раза.

2. Труба с наружным диаметром $D=8$ см и внутренним $d=6$ см изгибается моментом $M=350$ кгм. Определить наибольшие нормальные напряжения в точках у наружной и у внутренней поверхности трубы. **Ответ:** $\sigma_{\text{нар}}=1018$ кг/см²; $\sigma_{\text{вн}}=763$ кг/см².

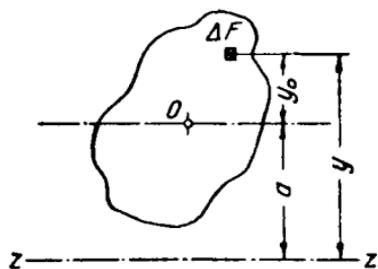
3. Прямоугольное сечение $b \times h=12 \times 15$ см ослаблено в центре круглым отверстием диаметром $d=10$ см. Вычислить моменты инерции и моменты сопротивления относительно горизонтальной и вертикальной центральных осей. **Ответ:** $J_z=2884$ см⁴; $W_z=395$ см³; $J_y=1669$ см⁴; $W_y=278$ см³.

§ 5. Моменты инерции сложных фигур

Формула перехода к параллельным осям. Часто приходится вычислять момент инерции относительно оси, не совпадающей с центром тяжести сечения. В этом случае пользуются так называемой формулой

перехода к параллельным осям. Для ее вывода рассмотрим какое-нибудь сечение, для которого заранее известен момент инерции J_0 относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения O (фиг. 9.13). Проведем новую ось z параллельно центральной оси на расстоянии a . Все сечение разобьем на малые площадки ΔF . Расстояние каждой из них до центральной оси обозначим y_0 , а до оси z обозначим y . Согласно формуле (2) моменты инерции относительно этих осей будут соответственно $J_0 = \sum y_0^2 \Delta F$ и $J_z = \sum y^2 \Delta F$. По фиг. 9.13 имеем $y = y_0 + a$. Подставим это значение y в выражение момента инерции J_z и произведем следующие преобразования:

$$J_z = \sum (y_0 + a)^2 \Delta F = \sum (y_0^2 + 2y_0 a + a^2) \Delta F.$$



Фиг. 9.13. К выводу формулы перехода к параллельным осям произвольного сечения.

По фиг. 9.13 имеем $y = y_0 + a$. Подставим это значение y в выражение момента инерции J_z и произведем следующие преобразования:

Последнее выражение представим в виде отдельных сумм и вынесем постоянные множители:

$$J_z = \sum y_0^2 \Delta F + 2a \sum y_0 \Delta F + a^2 \sum \Delta F.$$

Первая сумма оказывается равна моменту инерции J_0 относительно центральной оси. Вторая сумма, $\sum y_0 \Delta F = S = 0$, представляет собой статический момент площади сечения относительно той же оси; он равен нулю, потому что эта ось проходит через центр тяжести сечения [гл. I, § 5 формула (96)]. Наконец, третья сумма равна площади сечения $\sum \Delta F = F$. Принимая во внимание полученные значения сумм, можно написать, что

$$J_z = J_0 + a^2 F. \quad (13)$$

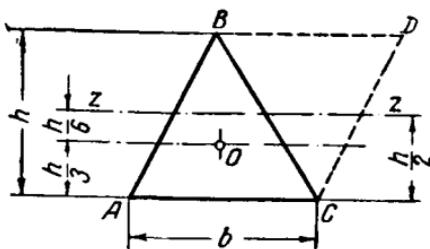
Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно параллельной центральной оси плюс площадь сечения, умноженная на квадрат расстояния между осями. В случае перехода от произвольной оси к центральной из формулы (13) имеем

$$J_0 = J_z - a^2 F. \quad (14)$$

Отсюда следует, что момент инерции относительно центральной оси имеет наименьшее значение. Формулы перехода к параллельным осям применяются очень часто. При их помощи вычисляются моменты инерции сложных сечений, составленных из отдельных фигур. Нужно только помнить, что они справедливы при переходе от центральной оси к любой, ей параллельной, и обратно, но ни в коем случае нельзя применять эти формулы при переходе от одной не центральной оси к другой, тоже не центральной оси, хотя и параллельной первой.

Треугольник. Воспользуемся формулой перехода для вычисления момента инерции сечения в виде треугольника относительно центральной оси, параллельной одной из его сторон, например, основанию AC (фиг. 9.14).

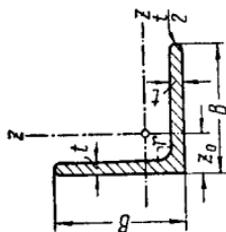
Дополним $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABDC$ с основанием b и высотой h , добавив такой же $\triangle BDC$. Момент инерции параллелограмма относительно его центральной оси z , как выше было найдено (фиг. 9.9, в), равен $J'_z = \frac{bh^3}{12}$. Диагональ BC делит параллелограмм на два равных треугольника. Момент инерции каждого из них относительно той же оси равен половине J'_z . Следовательно, момент инерции $\triangle ABC$



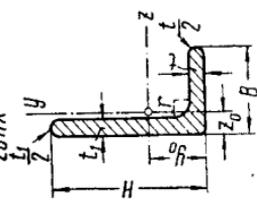
Фиг. 9.14. К вычислению осевых моментов инерции треугольника.

Профили из дуралюмина

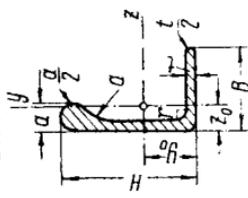
Угольник
равносторонний
22НХ



Угольник
разносторонний
23НХ



Будельугольник
24НХ



№ про- филя	Размеры, мм					Площадь $F, \text{см}^2$	Моменты инерции, см^4		Моменты сопро- тивления, см^3		Расстояния центра тяжести мм		Вес 1 пог.м, кг
	H	B	t	t ₁	a		J _z	J _y	W _z	W _y	z ₀	y ₀	
1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Угольник равносторонний 22 НХ

1	15	1	1,5	0,291	0,062	0,056	4,00	0,083
2	18	2	2	0,671	0,193	0,149	5,07	0,191
3	20	1,5	2	0,576	0,215	0,147	5,40	0,164
4	20	2	2	0,751	0,271	0,187	5,57	0,214
5	25	2	2	0,951	0,551	0,303	6,82	0,271
6	30	2	2	1,151	0,979	0,446	8,08	0,328
7	40	3	3	2,291	3,419	1,173	10,86	0,653
8	50	4	4	3,806	8,813	2,424	13,65	1,085
9	60	5	5	5,691	18,905	4,339	16,43	1,623

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

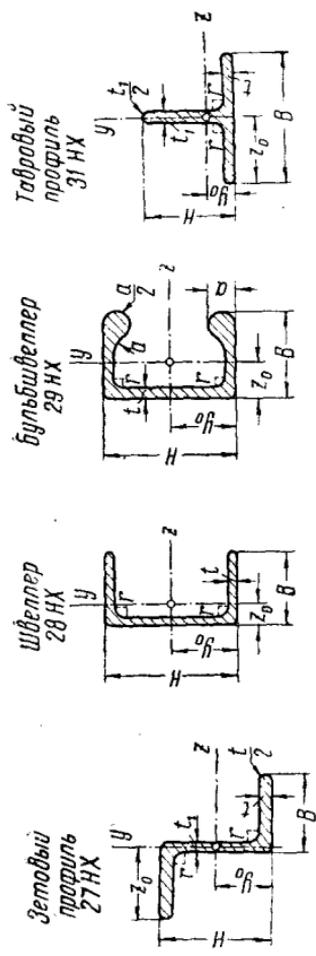
Угольник разносторонний 23 НХ

1	25	15	1	1,5	2	0,508	0,329	0,074	0,207	0,160	2,68	9,12	0,145
2	25	18	2	2,5	2,5	0,926	0,568	0,217	0,342	0,158	4,11	8,40	0,264
3	25	18	2,5	3	3	1,111	0,662	0,254	0,400	0,186	4,34	8,42	0,317
4	30	18	1,3	2	2	0,835	0,771	0,182	0,400	0,125	3,49	10,68	0,238
5	30	18	2,5	3	3	1,261	1,113	0,266	0,674	0,190	4,00	10,61	0,359
6	40	25	2	2,5	2,5	1,441	2,373	0,646	0,906	0,323	5,01	13,81	0,411
7	40	25	3	4	4	2,210	3,498	0,886	1,360	0,451	5,36	14,28	0,630
8	65	40	4	5	5	4,615	19,725	5,069	4,666	1,598	8,29	22,73	1,315

Бульбужольник 24 НХ

1	20	15	1,5	2	2	4,5	0,64	0,333	0,097	0,278	0,083	3,38	8,01	0,182
2	25	18	1,5	2	2	4,5	0,76	0,628	0,174	0,412	0,123	3,88	9,74	0,217
3	25	20	2	2	2	6	1,10	0,896	0,303	0,595	0,197	4,61	9,93	0,314
4	30	20	1,5	2	2	4,5	0,87	1,037	0,248	0,562	0,156	4,10	11,55	0,248
5	30	20	2	2	2	6	1,20	1,426	0,315	0,802	0,201	4,31	12,22	0,342
6	35	20	2	2	2	6	1,30	2,106	0,325	1,029	0,204	4,06	14,55	0,371
7	40	25	2,5	2,5	2,5	6	1,76	3,506	0,765	1,429	0,391	5,35	15,46	0,502
8	50	30	4	4	4	8	3,32	9,760	1,978	3,200	0,850	6,75	19,50	0,946
9	65	40	5	5	5	10	5,44	27,124	5,932	6,774	1,905	8,96	24,97	1,550

Профиль из дуралюмина



№ профиля	Размеры, мм				Площадь F, см ²	Моменты инерции, см ⁴		Моменты сопротивления, см ³		Расстояния центра тяжести, мм		Вес 1 пог. м, кг	
	H	B	t	t ₁		r	a	J _z	J _y	W _z	W _y		z ₀
1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15

Зетовый профиль 27 НХ

1	25	18	2	1,5	2	1,035	1,107	0,635	0,856	0,368	17,25	12,5	0,295
2	25	18	2,5	2	2,5	1,30	1,277	0,747	1,022	0,439	17,00	12,5	0,370
3	40	25	2	1,5	2	1,54	4,197	1,802	2,099	0,743	24,25	20	0,439
4	40	25	3	2	3	2,18	5,800	2,553	2,900	1,063	24,00	20	0,621
5	50	35	6	5	6	6,10	22,745	12,197	9,098	3,753	32,50	25	1,739

Швеллер 28 НХ

1	25	15	1,5	2	2	0,78	0,755	0,161	0,604	0,154	4,50	12,5	0,222
2	25	18	2,5	2,5	2,5	1,40	1,310	0,404	1,048	0,335	5,94	12,5	0,399
3	30	15	1,5	2	2	0,855	1,161	0,171	0,774	0,158	4,17	15,0	0,244

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	40	18	3	3	3		2,100	4,687	0,534	2,344	0,414	5,09	20,0	0,599
5	50	20	4	4	4		3,280	10,955	0,945	4,382	0,656	5,58	25,0	0,935
6	60	25	4	4	4		4,080	20,391	1,980	6,798	1,088	6,81	30,0	1,163
7	70	30	5	5	5		6,000	40,750	4,167	11,643	1,922	8,32	35,0	1,710
8	80	35	4	4	4		5,680	52,910	5,882	13,228	2,286	9,27	40,0	1,619
Б у л ь б ш в е л е р 29 НХ														
1	25	20	1,5	2	2	4,5	1,20	1,188	0,623	0,952	0,541	8,49	12,5	0,342
2	25	20	2	2	2	6	1,68	1,533	0,829	1,226	0,752	8,97	12,5	0,479
3	30	20	2	2	2	6	1,78	2,388	0,882	1,592	0,768	8,52	15,0	0,507
4	40	25	2	2	2	6	2,18	5,484	1,772	2,742	1,183	10,02	20,0	0,621
5	50	30	3	3	3	6	3,45	13,617	3,635	5,447	1,887	10,74	25,0	0,983
6	60	35	4	4	4	8	5,47	30,430	7,588	10,143	3,424	12,84	30,0	1,559
Т а в р о в ы й п р о ф и л ь 31 НХ														
1	20	30	1,5	2	2		0,823	0,300	0,317	0,203	0,211	15,0	5,168	0,235
2	25	35	2	2,5	2,5		1,278	0,723	0,664	0,392	0,379	17,5	6,530	0,364
3	30	40	2	3	3		1,652	1,432	1,006	0,669	0,503	20,0	8,500	0,471
4	35	40	2,5	4	4		2,324	2,790	1,249	1,158	0,625	20,0	10,850	0,662

относительно оси, проходящей параллельно основанию по середине высоты, равен $J_z = \frac{J'_z}{2} = \frac{bh^3}{24}$. Для треугольника ось z не является центральной. Напишем формулу перехода от оси z к центральной оси треугольника: $J_0 = J_z - a^2 F$. Так как центр тяжести треугольника лежит на одной трети высоты, то расстояние между осями будет $a = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}$. Подставляя его и площадь сечения в формулу перехода, находим момент инерции треугольника относительно центральной оси

$$J_0 = \frac{bh^3}{24} - \left(\frac{h}{6}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}. \quad (15)$$

Относительно оси, совпадающей с основанием AC , момент инерции треугольника вычисляем по формуле (13):

$$J_{AC} = J_0 + \left(\frac{h}{3}\right)^2 F = \frac{bh^3}{36} + \frac{h^2}{9} \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12}.$$

Точно так же находим момент инерции относительно оси BD , проходящей через вершину параллельно основанию (фиг. 9.14): $J_{BD} = \frac{bh^3}{4}$.

Прямоугольник и круг представляют собой сечения, симметричные относительно центральной оси, поэтому моменты сопротивления для верхних и нижних крайних точек у них одинаковы. В треугольнике расстояние от центральной оси до основания равно $\frac{h}{3}$, а до вершины — $\frac{2h}{3}$, поэтому здесь мы получим два момента сопротивления: один для верхней точки B : $W_1 = \frac{J_0 \cdot 3}{2h} = \frac{bh^3 \cdot 3}{36 \cdot 2h} = \frac{bh^2}{24}$, а другой — для нижних: $W_2 = \frac{bh^3 \cdot 3}{36 \cdot h} = \frac{bh^2}{12}$.

Составные сечения. В большинстве конструкций сечение балки не является сплошным, особенно для балок, изготовленных из металла. Такие балки составляются часто путем склепки или сварки отдельных листов и брусьев, имеющих сечение в виде труб, угольников, швеллеров и т. д. Эти брусья изготавливаются на специальных заводах, имеют определенные стандартные размеры и называются профилями. Площади поперечных сечений, положение центра тяжести, моменты инерции и моменты сопротивления профилей различных размеров вычисляются заранее и помещаются в таблицы. Эти таблицы можно найти в специальных справочниках; примеры таких таблиц для некоторых употребительных профилей мы приводим здесь (табл. 8 и 9).

Вычисление моментов инерции сечений составных балок производится при помощи таблиц профилей с применением формулы перехода к параллельным осям. Покажем на конкретных примерах, как это делается.

Пример 1. Вычислить момент инерции относительно оси $z-z$ сечения лонжерона, состоящего из двух цельнотянутых труб сечением $D \times d = 60 \times 56$ мм, соединенных двумя листами $t \times h = 2 \times 220$ мм. Расстояние между центрами труб равно 200 мм (фиг. 9. 15). В листах сделаны симметричные вырезы высотой $h_1 = 120$ мм.

Момент инерции вычисляем в см. Он состоит из момента инерции листов

$$J_{л} = 2 \left(\frac{th^3}{12} - \frac{th_1^3}{12} \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{0,2 \cdot 22^3}{12} - \frac{0,2 \cdot 12^3}{12} \right) = 297 \text{ см}^4$$

и момента инерции труб. Каждая труба имеет площадь $F = 3,64 \text{ см}^2$ и относительно собственной центральной оси $1-1$ момент инерции $J_1 = 15,3 \text{ см}^4$ (табл. 7 предыдущего параграфа). По формуле перехода

$$J_{тр} = 2(J_1 + a^2F) = 2(15,3 + 10^2 \cdot 3,64) = 759 \text{ см}^4.$$

Момент инерции сечения лонжерона будет

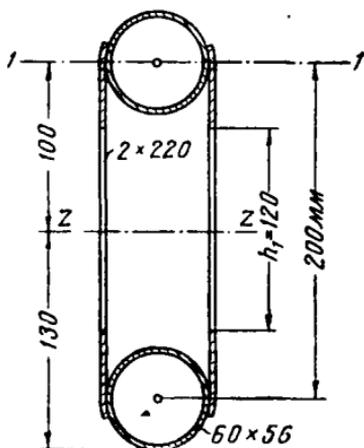
$$J = 297 + 759 = 1056 \text{ см}^4.$$

Расстояния до крайних точек равны 13 см. Момент сопротивления сечения

$$W = \frac{J}{y_{\max}} = \frac{1056}{13} = 81,1 \text{ см}^3.$$

Пример 2. Вычислить момент инерции сечения двутавровой балки, составленной из вертикальной стенки, четырех равнобоких угольников и двух горизонтальных листов, соединенных между собой заклепками диаметром $d = 8$ мм. Размеры сечения указаны на фиг. 9. 16 в мм.

По табл. 9 находим для одного равнобокого угольника $10 \times 40 \times 4$ мм площадь $F_{уг} = 3,08 \text{ см}^2$; расстояние центра тяжести $y_0 = 1,13 \text{ см}$ и момент инерции $J_1 = 4,6 \text{ см}^4$ относительно собственной центральной оси $1-1$, которая расположена от центра тяжести сечения на расстоянии $a_1 = \frac{24}{2} - y_0 = 12 - 1,13 = 10,87 \text{ см}$.



Фиг. 9. 15. Сечение лонжерона.

Моменты инерции относительно центральной оси сечения:

а) вертикальной стенки $J_{ст} = \frac{0,3 \cdot 24^3}{12} = 345 \text{ см}^4$;

б) четырех равнобоких угольников

$$J_{уг} = 4(J_1 + a_1^2 F_{уг}) = 4(4,6 + 10,87^2 \cdot 3,08) = 4(4,6 + 364) = 1475 \text{ см}^4$$

в) двух горизонтальных листов

$$J_{л} = 2(J_2 + a_2^2 F_{л}) = 2\left(\frac{10 \cdot 0,6^3}{12} + 12,3^2 \cdot 0,6 \cdot 10\right) = 2(0,18 + 908) = 1816 \text{ см}^4.$$

Всего сечения $J = J_{ст} + J_{уг} + J_{л} = 3636 \text{ см}^4$.



Фиг. 9. 16. Размеры сечения клепаной двутавровой балки.

Приведенные вычисления показывают, что моменты инерции относительно собственного центра тяжести (J_1 и J_2) элементов, удаленных от нейтральной оси, очень малы по сравнению с величиной $a^2 F$, и их можно не принимать во внимание, вычисляя момент инерции таких элементов достаточно точно по формуле $J \approx a^2 F$. Для постановки заклепок в балке просверливаются отверстия, которые ослабляют сечение. Заклепки обычно располагаются в шахматном порядке: в одном сечении только вертикальные, соединяющие лист с угольниками, а в другом — только горизонтальные, соединяющие угольники со стенкой. Первые больше ослабляют сечение, чем вторые. Учтем это ослабление. Расстояние центра тяжести вертикальных заклепочных отверстий (на фиг. 9. 16 заштрихованы) $a_3 = 12,6 - \frac{0,4 + 0,6}{2} = 12,1 \text{ см}$. Мо-

мент инерции ослабления четырьмя отверстиями по приближенной формуле будет

$$J_{осл} = 4a_3^2 F_{отв} = 4 \cdot 12,1^2 (0,4 + 0,6) 0,8 = 468 \text{ см}^4.$$

Если из момента инерции всего сечения без учета ослабления (как говорят, сечения брутто) вычесть $J_{осл}$, то получим так называемый момент инерции нетто

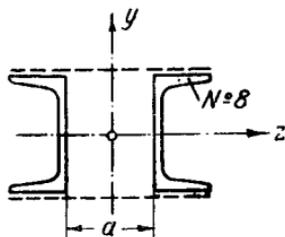
$$J_{нетто} = J_{брутто} - J_{осл} = 3636 - 468 = 3168 \text{ см}^4.$$

Задачи. 1. Вычислить момент инерции и момент сопротивления двутавровой балки (фиг. 9. 16) относительно центральной

вертикальной оси с учетом ослабления, если заклепки расположены по середине полки угольника.

Ответ: $J=128,1 \text{ см}^4$; $W=25,6 \text{ см}^3$.

2. Сечение составлено из двух швеллеров № 8 (фиг. 9.17). Определить расстояние a между швеллерами, чтобы моменты



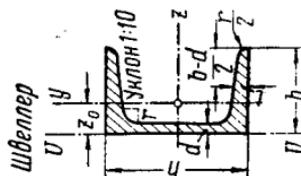
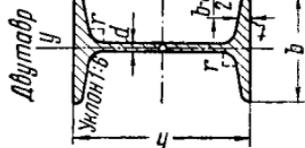
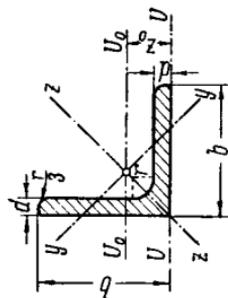
Фиг. 9.17. Выбрать расстояние a , чтобы $J_z = J_y$.

инерции всего сечения относительно осей y и z были одинаковыми, и сравнить моменты сопротивления относительно этих осей.

Ответ: $a=3,02 \text{ см}$; $W_z=50,6 \text{ см}^3$; $W_y=34,9 \text{ см}^3$.

§ 6. Рациональные формы сечений балок

Валы, работающие на кручение, делают полыми, удаляя часть материала, расположенную вблизи центра тяжести, где возникают сравнительно малые напряжения (фиг. 6.7 и 6.9). Вследствие этого при одинаковой затрате материала полые валы более выгодны: они легче, экономичнее, а в то же время более прочны и жестки, чем сплошные. Аналогичная картина наблюдается и при изгибе балок. Формула (4) для нормальных напряжений $\sigma = \frac{M}{J} y$ показывает, что вблизи нейтрального слоя напряжения малы и материал здесь используется слабо. С удалением к краям напряжения возрастают, материал используется полнее (фиг. 9.6). Чтобы получить более выгодную балку, нужно материал сосредоточить в тех местах сечения, где возникают наибольшие напряжения, т. е. распределить основную его массу дальше от нейтральной оси. С этой точки зрения, например, круглое сечение является менее выгодным, чем, положим, прямоугольное. В круглой балке основная масса материала сосредоточена вблизи нейтрального слоя и не используется полностью, а на краях, где материал напряжен больше, его меньше. В прямоугольной балке материал распределен равномерно по высоте (фиг. 9.9). Но это тоже не рационально: нет необходимости сосредоточивать одинаковое количество материала в напряженной и в ненапряженной части. Целесообразно удалить материал у нейтральной оси, оставив только связь между верхней и нижней частями балки. При этом часть материала «эко-

Угельник
равнобокий

Профили из прокатной стали

Таблица 9

№ про- филя	Размеры, мм				Площадь			Моменты инерции, см ⁴				Моменты сопро- тивления, см ³		Расстоя- ние центра тяжести z_0 , см	Вес 1 пог. м кг
	h	b	d	t	r	J_z	J_y	J_u	J_{u_0}	W_z	W_y				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
2	20	3	3,5			1,13	0,63	0,17	0,81	0,40			0,60	0,89	
3	30	4	4,5			2,27	2,90	0,75	3,62	1,82			0,89	1,78	
4	40	4	5,0			3,08	7,26	1,93	8,53	4,60			1,13	2,42	
4,5	45	4	5,0			3,48	10,5	2,68	12,1	6,60			1,26	2,73	
5	50	5	5,5			4,80	17,8	4,61	20,9	11,2			1,42	3,77	
6	60	6	6,5			6,91	36,8	9,76	43,3	23,3			1,70	5,42	

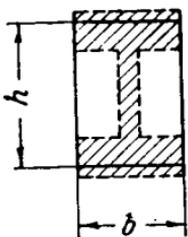
У г о л ь н и к р а в н о б о к и й

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7,5		75	6		9,0	8,78	73,3	20,1	83,9	46,7			2,06	6,89
			10			14,1	114	30,3	142	72,2			2,22	11,1
9		90	8		11	14,0	168	43,6	194	106			2,51	11,0
			12			20,4	237	61,7	294	149			2,67	16,0
10		100	8			15,6	233	61,0	265	147			2,75	12,3
			12		12	22,8	331	87,6	402	209			2,91	17,9
12		120	10		13	23,3	503	130	575	316			3,33	18,3
			14			31,9	671	174	811	423			3,49	25,1

Д В У Т а в П

10	100	68	4,5	7,6	6,5	14,3	245	33,0			49	9,72		11,2
12	120	74	5,0	8,4	7,0	17,8	436	46,9			72,7	12,7		14,0
14	140	80	5,5	9,1	7,5	21,5	712	64,4			102	16,1		16,9
16	160	88	6,0	9,9	8,0	26,1	1130	93,1			141	21,2		20,5
18	180	94	6,5	10,7	8,5	30,6	1660	122			185	26,0		24,1
^a 20	100	100	7,0	11,4	9,0	35,5	2370	158			237	31,5		27,9
^b 20	200	102	9,0			39,5	2500	169			250	33,1		31,1

номится», а часть перейдет в верхнюю и нижнюю зоны балки, где он будет работать более интенсивно. От этого немного увеличится расстояние y до крайних точек, но напряжение в них уменьшится потому, что момент инерции J увеличивается при таком изменении сечения в большей степени, чем y . Так из прямоугольного сечения получается сечение в виде двутавра, обладающее такой же или даже большей прочностью и значительно меньшим весом (фиг. 9.18).

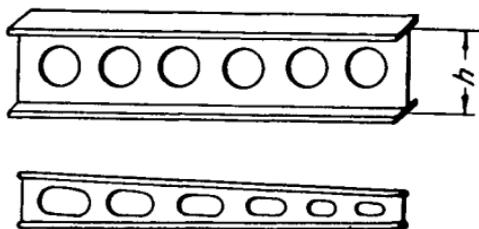


Фиг. 9.18. Двутавровое сечение более рационально, чем прямоугольное.

Стенка двутавра связывает балку в одно целое и служит для того, чтобы воспринимать, как мы увидим ниже, касательные напряжения, которые возникают в балке одновременно с нормальными при наличии поперечной силы. Поэтому совсем удалить стенку нельзя, но облегчить ее можно, сделав в ней вырезы (фиг. 9.19). Требование размещения материала дальше от нейтрального слоя для получения более экономичной балки по сути дела сводится к тому, чтобы при одной и той же площади F придать такую форму сечению, при которой момент инерции J , равный сумме произведений $y^2 \Delta F$, а следовательно, и момент сопротивления W получались бы наибольшими. Рациональное размещение материала, удовлетворяющее указанному условию, имеют балки, сечения которых составлены по типу двутавра. К их числу относятся сечения, изображенные на фиг. 9.12, 9.15, 9.16 и т. п. Применение таких балок целесообразно, если они изготавливаются из материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, как, например, большинство металлов. Если сопротивление материала растяжению резко отличается от сопротивления сжатию, то выгодно применять сечения, у которых в крайних волокнах возникают напряжения, различные по величине,

и у которых центр тяжести находится не по середине высоты. Например, для балки, изготовленной из чугуна, который хорошо сопротивляется сжатию и плохо растяжению, рациональное сечение имеет форму треугольника или тавра (фиг. 9.20). В сжатой зоне, выдерживающей большие напряжения, размещается меньше материала, чем в слабо сопротивляющейся растянутой зоне, и этим уравнивается использование материала. Иногда применение сечений типа тавра вызывается специальными конструктивными особенностями в ущерб выгодности распределения материала. В заключение приведем примеры сравнения экономичности некоторых видов сечений.

Фиг. 9.19. Вырезы в стенках балок для уменьшения их веса.



Фиг. 9.19. Вырезы в стенках балок для уменьшения их веса.

№ про- филя	Размеры, мм				Площадь		Моменты инерции, см ⁴				Моменты сопро- тивления, см ³		Расстоя- ние центра тяжести z_0 , см	Вес 1 пог. м кг
	h	b	d	t	r	F, см ²	J_z	J_y	J_u	J_{u_0}	W_z	W_y		

Д в у т а в р

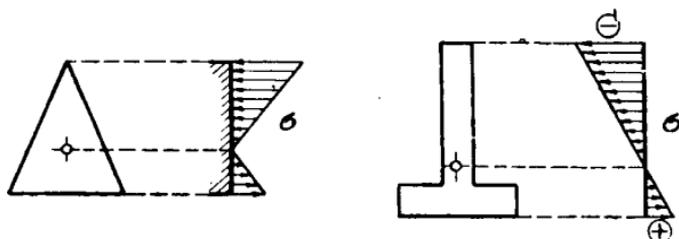
a	220	110	7,5	12,3	9,5	42,0	3400	225			309	40,9		33,0
b		112	9,5			46,4	3570	239			325	42,7		36,4
a	240	116	8,0	13,0	10,0	47,7	4570	280			381	48,4		37,4
b		118	10,0			52,6	4800	297			400	50,4		41,2
a	270	122	8,5	13,7	10,5	54,6	6550	345			485	56,6		42,8
b		124	10,5			60,0	6870	366			509	58,9		47,1
a		126	9			61,2	8950	400			597	63,5		48,0
b	300	128	11	14,4	11,0	67,2	9400	422			627	65,9		52,7
c		130	13			73,4	9850	445			657	68,5		57,4

Ш в е л л е р

5	50	37	4,5	7,0	7,0	6,93	26,0	8,3	20,9		10,4	3,55	1,35	5,44
6,5	65	40	4,8	7,5	7,5	8,54	55,2	12,0	28,3		17,0	4,59	1,38	6,70
8	80	43	5,0	8,0	8,0	10,24	101,3	16,6	37,4		25,3	5,79	1,43	8,04

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	100	48	5,3	8,5	8,5	12,74	198,3	25,6	54,9		39,7	7,80	1,52	10,00
12	120	53	5,5	9,0	9,0	15,36	346,3	37,4	77,7		57,7	10,17	1,62	12,06
<i>a</i>	140	58	6,0	9,5	9,5	18,51	563,7	53,2	107,1		80,5	13,01	1,71	14,53
<i>b</i>		60	8,0			21,31	609,4	61,1	120,6		87,1	14,12	1,67	16,73
<i>a</i>	160	63	6,5	10,0	10,0	21,95	866,2	73,3	144,1		108,3	16,30	1,80	17,23
<i>b</i>		65	8,5			25,15	934,5	83,4	160,8		116,8	17,55	1,75	19,74
<i>a</i>	180	68	7,0	10,5	10,5	25,69	1272,7	98,6	189,7		141,4	20,03	1,88	20,17
<i>b</i>		70	9,0			29,29	1369,9	111,0	210,1		152,2	21,52	1,84	22,99
<i>a</i>	200	73	7,5	11,0	11,0	29,72	1804,0	129,6	245,2		180,4	24,31	1,97	23,33
<i>b</i>		75	9,5			33,72	1937,3	144,8	269,8		193,7	25,99	1,93	26,47
<i>a</i>	220	77	8,0	11,5	11,5	33,81	2457,9	161,5	300,9		223,4	28,49	2,03	26,54
<i>b</i>		79	10,0			38,21	2635,4	179,2	329,7		239,6	30,32	1,99	29,99
<i>a</i>	240	78	6,5	12,0	12,0	33,13	3069,4	170,8	316,8		250,8	29,90	2,10	26,02
<i>b</i>		80	8,5			37,93	3240,4	192,3	353,1		270,0	32,38	2,06	27,78
<i>c</i>		82	10,5			42,73	3170,8	212,3	385,9		289,2	34,35	2,02	33,54

Пример 1. Сравним две балки по количеству материала, затрачиваемого на них при условии одинаковой прочности. Сечение одной балки квадратное со стороной $a=8$ см, а второй прямоугольное с высотой $h=2b$ (фиг. 9.9).



Фиг. 9.20. Рациональные формы сечений для балок из чугуна.

Балки будут равнопрочными, если при одном и том же изгибающем моменте наибольшие напряжения в обеих балках будут одинаковы: $\sigma_{\max} = \frac{M}{W_1} = \frac{M}{W_2}$. Следовательно, моменты сопротивления должны быть равны: $W_1 = W_2$. Квадратное сечение имеет площадь $F_1 = 8^2 = 64$ см² и момент сопротивления

$$W_1 = \frac{a^3}{6} = \frac{8^3}{6} = 85,3 \text{ см}^3.$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения,

$$W_2 = \frac{bh^2}{6} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)h^2}{6} = \frac{h^3}{12} = W_1,$$

приравниваем моменту сопротивления квадратного сечения.

Следовательно, $\frac{h^3}{12} = 85,3$ см³. Отсюда находим

$$h = \sqrt[3]{12 \cdot 85,3} = 10,1 \text{ см}; \quad b = 5,05 \text{ см}$$

и площадь прямоугольника $F_2 = 5,05 \cdot 10,1 = 51$ см².

Количество материала в балках одинаковой длины пропорционально площади их сечений: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{64}{51} = 1,25$, следовательно, в квадратной балке затрачивается материала на 25% больше, чем в равнопрочной ей прямоугольной с отношением сторон $\frac{h}{b} = 2$.

Пример 2. Сравним наибольшие напряжения стальной балки двутаврового сечения № 14 (табл. 9) с напряжениями трубы

той же площади сечения, если они изгибаются в вертикальной плоскости одинаковым моментом $M = 1000 \text{ кгм}$.

По табл. 9 находим для двутавра $F = 21,5 \text{ см}^2$ и $W = 102 \text{ см}^3$. Нормальные напряжения будут $\sigma_1 = \frac{100\,000}{102} = 980 \text{ кг/см}^2$.

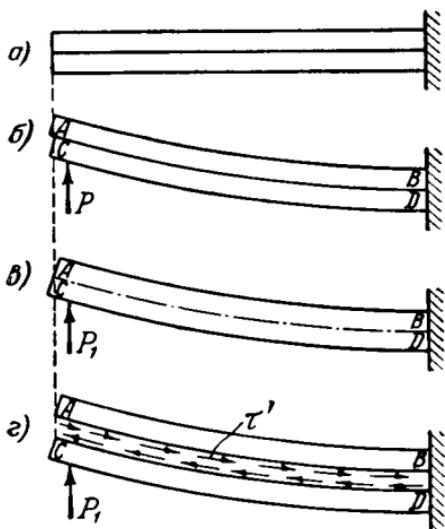
В табл. 7 для круглых труб подбираем сечение примерно такой же площади, как и двутавр. Остановливаемся на трубе с диаметрами $120 \times 108 \text{ мм}$. Площадь ее сечения $F = 21,488 \text{ см}^2$ и момент сопротивления $W_z = 58,36 \text{ см}^3$. Наибольшие напряжения трубы $\sigma_2 = \frac{100\,000}{58,36} = 1710 \text{ кг/см}^2$. Они превосходят напряжения двутавра в $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1710}{980} = 1,75$ раза. Труба имеет менее рациональное сечение, чем двутавр.

§ 7. Касательные напряжения при изгибе

Сначала рассмотрим балку сплошного прямоугольного сечения. В § 1 предыдущей главы (фиг. 8.4) установлено, что в поперечных сечениях балки, помимо нормальных напряжений, возникают также и касательные напряжения τ . В § 3 той же главы было отмечено, что касательные напряжения при изгибе зависят от поперечной силы Q . Как они изменяются по сечению, еще неизвестно, но предварительно можно принять два предположения: 1) касательные напряжения направлены параллельно поперечной силе Q , от которой они зависят в данном сечении; 2) по ширине сечения касательные напряжения распределены равномерно.

Касательные напряжения в продольных сечениях. При наличии напряжений τ в поперечных сечениях балки в ее продольных сечениях, параллельных нейтральному слою, согласно закону парности, также появляются касательные напряжения. Наличие напряжений в продольных сечениях наглядно показывает следующий простой опыт. Возьмем балку, составленную из двух брусьев прямоугольного сечения, положенных друг на друга и заделанных одним концом (фиг. 9.21,а). Если изогнуть ее вертикальной силой P , то каждый брус изогнется отдельно и крайние нижние волокна AB верхнего бруса удлинятся, а соприкасающиеся с ними верхние волокна CD нижнего бруса сократятся. По плоскости раздела произойдет продольное смещение точек одного бруса относительно соответствующих точек другого бруса, и в результате крайнее сечение верхнего бруса выдвинется относительно крайнего сечения нижнего бруса (фиг. 9.21,б). Произойдет продольное смещение, аналогичное смещению листов тетради или книги, если, удерживая за корешок, изогнуть их подобно изгибу консоли. Такое же смещение по-

лучается вследствие того, что в плоскости соприкосновения между брусками отсутствуют силы взаимодействия, а силы трения малы и легко преодолеваются. Если взять балку такого же сечения, но не составленную из двух брусков, а целую, положим, склеив между собой оба бруса, то, во-первых, изогнуть ее будет значительно труднее, а во-вторых, ее средние волокна AB и CD совпадут с нейтральным слоем и не будут ни удлиняться, ни сокращаться,



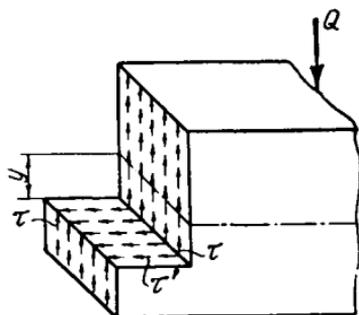
Фиг. 9.21. Касательные напряжения в продольных сечениях балки.

a — балка составлена из двух брусков; $б$ — при изгибе происходит смещение точек верхнего бруса относительно нижнего по поверхностям AB и CD ; $в$ — при изгибе балки того же сечения, но из одного бруса среднее волокно AB (или CD) не изменяет своей длины; $г$ — касательные напряжения в продольном сечении, уничтожающие удлинение волокна AB и сжатие волокна CD .

разрезая балки на две части продольным сечением AB , к каждой половине мы должны приложить обнаруженные силы взаимодействия, создаваемые касательными напряжениями τ' (фиг. 9.21,г). По ширине балки они распределяются равномерно, потому что верхняя и нижняя части смещаются друг относительно друга на одинаковую величину по ширине. Это ясно видно в крайнем сечении. Таким образом наше второе предположение о равномерности касательных напряжений по ширине не противоречит характеру деформации балки при изгибе.

Если сделать поперечное сечение с уступом, как показано на фиг. 9.22, то одновременно с напряжениями τ , возникающими

и крайнее сечение на всю высоту будет лежать в одной плоскости (фиг. 9.21,в). В этом случае продольному смещению точек слоя AB верхней половины относи-



Фиг. 9.22. Закон парности между касательными напряжениями в продольных и поперечных сечениях балки.

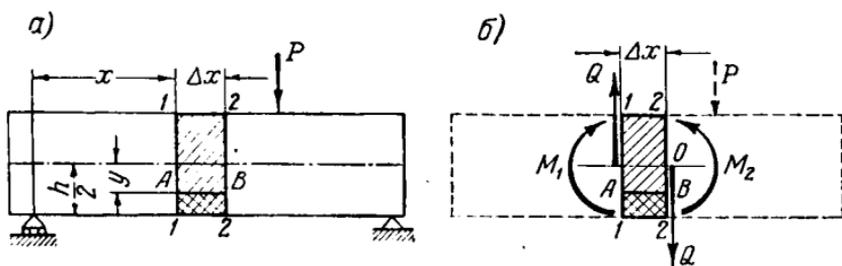
тельно смежных точек слоя CD нижней половины мешают силы взаимодействия между частицами материала обеих половин балки. Эти силы и будут уничтожать удлинение волокон AB и сжатие волокон CD . Раз-

в вертикальных гранях, обнаруживаются по закону парности такие же по величине и противоположные по направлению касательные напряжения τ' в продольных гранях. Их величина в продольном сечении, проведенном на расстоянии y от нейтрального слоя (фиг. 9.22), равна величине напряжений τ в точках поперечного сечения на том же уровне y . На верхней и нижней наружных поверхностях касательные напряжения τ' отсутствуют, потому что на поверхности балки отсутствуют касательные силы. Следовательно, и напряжения τ в поперечных сечениях у верхнего и нижнего края, на расстоянии $y = \frac{h}{2}$ от нейтрального слоя, должны быть равны нулю. Это указывает на неравномерность распределения касательных напряжений по высоте балки.

§ 8. Определение касательных напряжений

Прежде чем приступить к выяснению закона изменения касательных напряжений по сечению, докажем предварительно одну теорему, необходимую для определения величины τ .

Зависимость между поперечной силой и изгибающим моментом. Выделим двумя поперечными се-



Фиг. 9.23. Зависимость между поперечной силой и изгибающим моментом.

a — малый участок длиной Δx , выделенный из балки близкими поперечными сечениями 1—1 и 2—2; *б* — схема равновесия сил, действующих на выделенный участок Δx балки.

чениями 1—1 и 2—2 малый участок балки длиной Δx (фиг. 9.23,а). Для удобства вывода выбираем этот участок так, чтобы и поперечная сила и изгибающий момент были положительными. При отрицательных значениях Q и M направления соответствующих им напряжений изменяются на обратные. В сечении 1—1 внешние силы, действующие на левую отбрасываемую часть балки, заменяются поперечной силой Q , направленной вверх, и изгибающим моментом M_1 . В смежном ему сечении 2—2 силы правой части заменяются такой же силой Q , направленной вниз, и изгибающим моментом M_2 . Величина Q при отсутствии нагрузки в пределах участка Δx остается постоянной, а M увеличивается вследствие увеличения расстояния x .

Разность между M_1 и M_2 равна приращению изгибающего момента ΔM при переходе к смежному сечению на расстояние Δx . Это приращение можно найти из условия равновесия, которое представим в виде суммы моментов всех сил, приложенных к выделенному участку Δx , относительно центральной оси правого сечения, проходящей через точку O (фиг. 9. 23,б):

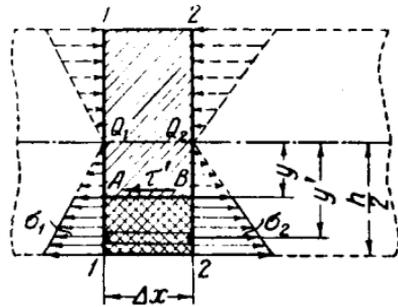
$$\Sigma M = Q\Delta x + M_1 - M_2 = 0,$$

откуда

$$Q = \frac{M_2 - M_1}{\Delta x} = \frac{\Delta M}{\Delta x}. \quad (16)$$

Приращение изгибающего момента, отнесенное к приращению длины, равно поперечной силе в данном сечении балки. Эта зависимость справедлива и в тех случаях, когда Q — переменная величина.

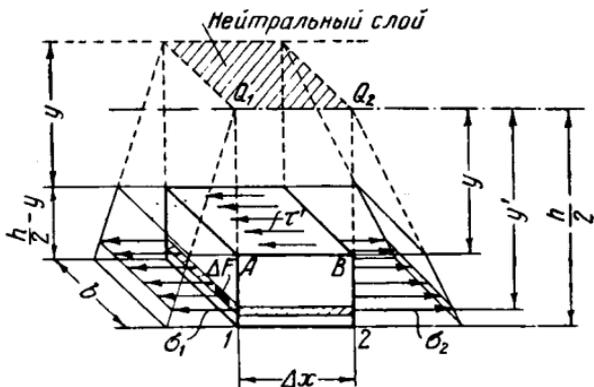
Вывод формулы касательных напряжений. Чтобы установить закон изменения напряжений τ по поперечному сечению и найти их величину, проще всего определить равные им напряжения τ' в каком-нибудь слое на расстоянии y от нейтрального. Для этого проведем продольное сечение AB и отсечем на участке Δx (фиг. 9. 23) элемент с прямоугольными гранями размером: $\left(\frac{h}{2} - y\right)$ по высоте, Δx



Фиг. 9. 24. Элемент, выделенный на малом участке балки тремя взаимно перпендикулярными сечениями.

по длине и b по ширине в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа. Полученный элемент вырезан только тремя сечениями: $1-A$, $A-B$ и $B-2$; его четвертая грань $1-2$ является наружной поверхностью балки и свободна от напряжений. Условия равновесия элемента требуют, чтобы сумма проекций всех приложенных к нему сил на ось балки равнялась нулю. На эту ось проектируются нормальные напряжения σ_1 и σ_2 , возникающие в вертикальных гранях (фиг. 9. 24), а также касательные напряжения τ' в продольной грани AB . Напряжения τ , возникающие в вертикальных гранях, не дают проекции на ось балки и на чертеже не показаны. Для наглядности вырезанный элемент изображен на фиг. 9. 25 в перспективе. Чтобы составить уравнение проекций, вычислим усилия, действующие на грани элемента. Касательные напряжения τ' в горизонтальной грани распределены равномерно по площади $b\Delta x$ и дают касательную силу $T = \tau'b\Delta x$. Необходимо отметить, что ширину b нужно брать на уровне слоя, в котором вычисляется величина τ' . Это важно для сечений, у которых ширина b изменяется по высоте.

Нормальные напряжения распределяются неравномерно по высоте сечения. На каждую малую площадку ΔF , взятую на расстоянии y' от нейтрального слоя на левой грани, приходится малая сила $\sigma_1 \Delta F$. Эти силы распределены по всей площади боковой грани элемента, составляющей только часть поперечного сечения. Суммируя их по этой части сечения, т. е. давая расстоянию y' все значения от y до $\frac{h}{2}$, находим продольную силу $N_1 = \sum \sigma_1 \Delta F$. Напряжения σ_1 на уровне y'



Фиг. 9.25. Общий вид выделенного из балки элемента с напряжениями, которые проектируются на горизонтальную ось.

зависят от изгибающего момента M_1 в сечении $1-1$ (фигура 9.23, б) по формуле (4): $\sigma_1 = \frac{M_1}{J} y'$. Подставим их в выражение равнодействующей и вынесем за знак суммы $\frac{M_1}{J}$ как величину, постоянную для всего сечения. Тогда получим

$$N_1 = \frac{M_1}{J} \sum y' \Delta F.$$

Сумма распространяется только на боковую грань элемента и представляет собой *статический момент относительно нейтральной оси площади части сечения*, расположенной от уровня y до края балки. Обозначим его $S = \sum_y^{\frac{h}{2}} y' \Delta F$ и будем

помнить, что S меняется в зависимости от расстояния y от нейтральной оси до слоя, в котором вычисляются напряжения σ' . Продольная сила левой грани элемента равна $N_1 = \frac{M_1}{J} S$. В правой грани нормальные напряжения будут несколько больше, потому что $M_2 > M_1$ (фиг. 9.23, б).

Аналогично получаем продольную силу правой грани $N_2 = \frac{M_2}{J} S$.

Статический момент S имеет ту же величину, что и для N_1 . Теперь напишем уравнение проекций на горизонтальную ось $T + N_1 - N_2 = 0$. Подставляя найденные выше значения, имеем

$$\tau' b \Delta x + \frac{M_1}{J} S - \frac{M_2}{J} S = 0.$$

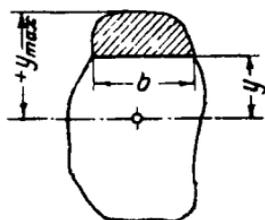
Отсюда находим

$$\tau' = \frac{M_2 - M_1}{\Delta x} \frac{S}{Jb}.$$

Но по формуле (16) $\frac{M_1 - M_2}{\Delta x} = Q$. Произведем эту замену и окончательно получим

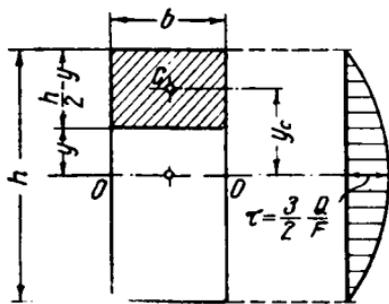
$$\tau' = \tau = \frac{QS}{Jb}. \quad (17)$$

Формула касательных напряжений применительно к балке прямоугольного сечения впервые была выведена русским инженером Д. И. Журавским в 1855 г. По ней вычисляют касательные напряжения как в продольных, так и в поперечных сечениях и применяют не только для прямоугольного сечения, но и вообще ко всем балкам со *сплошным сечением* любой формы (фиг. 9. 26). Необходимо обратить внимание, что при вычислении по этой формуле нужно брать статический момент относительно нейтральной оси площади только *части сечения*, расположенной между уровнем y и верхним или нижним краем (на фиг. 9. 26 верхняя часть заштрихована), и подставлять ширину b , взятую на уровне y . По высоте сечения произвольной формы касательные напряжения изменяются в зависимости от статического момента S и от ширины b , а эти величины зависят от y . Для наиболее удаленных, крайних точек сечения при $y = y_{\max}$, выше которых нет заштрихованной площади (фиг. 9. 26), статический момент S обращается в нуль, а следовательно, и напряжения τ в этих точках также равны нулю. То же самое было установлено нами ранее на основании закона парности касательных напряжений. С уменьшением расстояния y вышележащая заштрихованная площадь увеличивается, и статический момент S возрастает. Наибольшей величины он достигает при $y = 0$ для точек, расположенных на уровне нейтрального слоя; при переходе в другую половину сечения в сумму $S = \sum y' \Delta F$ будут добавляться произведения $y' \Delta F$ противоположного знака, и статический момент начнет уменьшаться. Он станет равен нулю для крайних нижних точек, по-



Фиг. 9. 26. Сплошное сечение произвольной формы.

тому что выше этого уровня будет лежать вся площадь сечения, статический момент которой относительно ее центра тяжести всегда равен нулю. Таким образом при изгибе балки в крайних точках поперечного сечения касательные напряжения равны нулю, а нормальные имеют наибольшую величину; в точках, близких к нейтральному слою, наоборот, касательные напряжения наибольшие, а нормальные малы и в нейтральном слое равны нулю. Распределение напряжений τ по высоте, зависящие от изменения и статического момента S и ширины сечения b , различно в различных по очертанию сечениях. Общую эпюру распределения τ для всех сечений, как это было сделано для σ , построить нельзя. Эпюра τ устанавливается для каждого вида сечения отдельно.



Фиг. 9. 27. Эпюра касательных напряжений для прямоугольного сечения.

Касательные напряжения в прямоугольном сечении. Возьмем сечение балки в виде прямоугольника высотой h и шириной b (фиг. 9. 27). Чтобы определить касательные напряжения в какой-нибудь точке на высоте y от нейтрального слоя, прежде

всего вычислим статический момент S заштрихованной площади, равной $b \left(\frac{h}{2} - y \right)$. Для этого умножим ее на расстояние

$$y_c = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) + y = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

от ее центра тяжести C до нейтральной оси OO' ;

$$S = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Вынесем $\frac{h^2}{4}$ за скобки и подставим $S = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$ в формулу (17), принимая во внимание, что для прямоугольника момент инерции $J = \frac{bh^3}{12}$. Тогда касательные напряжения в зависимости от расстояния y будут выражаться так:

$$\tau = \frac{Q}{Jb} S = \frac{12Q}{bh^3b} \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

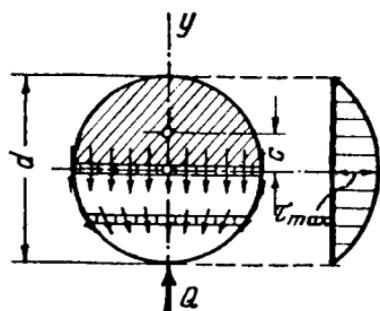
Полученное уравнение показывает, что τ зависит от квадрата расстояния y , следовательно, величина касательного напряжения по высоте прямоугольного сечения меняется по закону квадратной параболы (фиг. 9. 27). У верхнего и ниж-

него краев сечения при $y = \pm \frac{h}{2}$ касательное напряжение получается равным нулю. Наибольшей величины оно достигает в точках на нейтральной оси при $y=0$:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}. \quad (18)$$

Наибольшее касательное напряжение в прямоугольном сечении в полтора раза больше его среднего значения, вычисленного в предположении равномерного распределения τ по сечению по формуле $\tau_{\text{ср}} = \frac{Q}{F}$.

Круглое сечение. По оси y , совпадающей с плоскостью нагрузки (фиг. 9.28), касательные напряжения круглого сечения изменяются в зависимости не только от статического момента S , но и от изменения ширины b . Если выразить S и b через расстояние y до нейтрального слоя и составить уравнение для определения τ , то получится, что вдоль оси в плоскости нагрузки касательные напряжения круга изменяются по квадратной параболе (фиг. 9.28), как и в прямоугольнике. Наибольшие τ возникают в точках сечения, лежащих на нейтральной оси. Чтобы их найти, достаточно подсчитать статический момент площади половины сечения.



Фиг. 9.28. Эпюра касательных напряжений и их направление в круглом сечении.

Для этого нужно половину площади круга (фиг. 9.28), $\frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4}$, умножить на расстояние $c = \frac{2d}{3\pi}$ от центра сечения до центра тяжести половины круга. Тогда

$$S = \frac{\pi d^2}{8} \frac{2d}{3\pi} = \frac{d^3}{12}. \quad (19)$$

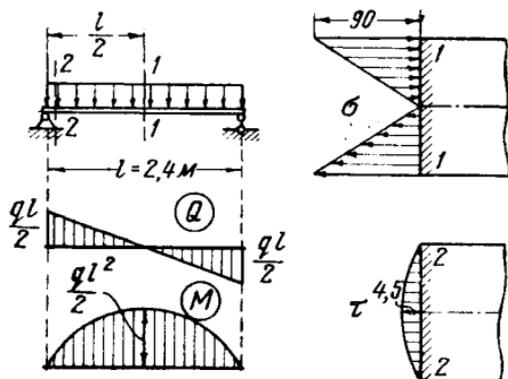
Подставляя в формулу (17) полученное значение S , момент инерции круга $J = \frac{\pi d^4}{64}$ и ширину сечения $b = d$, находим

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Jb} = \frac{16}{3} \frac{Q}{\pi d^2}.$$

Обозначая площадь круга $\frac{\pi d^2}{4}$ через F , окончательно получаем напряжения на уровне нейтрального слоя в виде

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3F}. \quad (20)$$

Во всех точках круглого сечения, исключая точки, лежащие на нейтральной оси, помимо касательных напряжений, параллельных плоскости нагрузки, возникают также касательные напряжения, перпендикулярные к ней. Это очевидно из того, что полные касательные напряжения в точках, лежащих на наружном контуре сечения, должны быть направлены по касательной к линии контура (см. фиг. 6. 10). Таким образом полные напряжения будут действовать, как показано на фиг. 9. 28. Это положение имеет место для всех сечений, отличных от прямоугольного или составленного из прямоугольников, расположенных



Фиг. 9. 29. Эпюры усилий и напряжений для простой балки от равномерной нагрузки.

расположенных так, чтобы одна сторона каждого из них была параллельна плоскости нагрузки.

В практических расчетах сплошных сечений или сечений с толстыми стенками обычно учитывают только те составляющие касательного напряжения, которые параллельны плоскости изгиба.

Пример 1. Найти наибольшие нормальные и касательные напряжения в простой балке прямоугольного сечения, $b \times h = 4 \times 12$ см, нагруженной равномерной нагрузкой $q = 120$ кг/м, распределенной по всему пролету $l = 2,4$ м (фиг. 9. 29).

Построив эпюры Q и M , найдем, что наибольшая поперечная сила возникает в опорных сечениях

$$Q = \frac{ql}{2} = \frac{120 \cdot 2,4}{2} = 144 \text{ кг},$$

а изгибающий момент — по середине балки

$$M = \frac{ql^2}{8} = \frac{120 \cdot 2,4^2}{8} = 86,4 \text{ кгм}.$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения равен

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{4 \cdot 12^2}{6} = 96 \text{ см}^3.$$

Наибольшие нормальные напряжения возникают по середине пролета в крайних точках сечения 1—1:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{8640}{96} = 90 \text{ кг/см}^2.$$

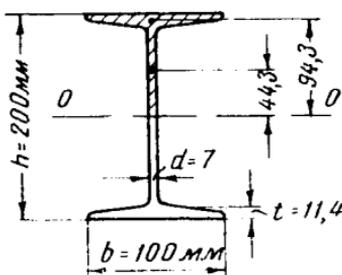
В этом сечении касательные напряжения отсутствуют, так как

$Q=0$. Наибольшие касательные напряжения будут вблизи опор в сечениях 2—2 на уровне нейтрального слоя:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} = \frac{3 \cdot 144}{2 \cdot 4 \cdot 12} = 4,5 \text{ кг/см}^2.$$

В этих сечениях нормальные напряжения равны нулю, потому что $M=0$. На фиг. 9.29 изображены эпюры τ и σ в соответствующих сечениях. Во всех остальных сечениях балки они будут меньше. Этот пример показывает, что в прямоугольной балке касательные напряжения получаются малыми по сравнению с нормальными. При изгибе балок сплошных и толстостенных сечений расчет производится главным образом по нормальным напряжениям.

Пример 2. Определить нормальные и касательные напряжения в опасном сечении двутавровой балки № 20а длиной $l=1,5$ м, если она заделана одним концом в стену и нагружена силой $P=2000$ кг на свободном конце в плоскости стенки двутавра.



Фиг. 9.30. Размеры двутавра № 20а.

Опасное сечение балки будет у заделки, где $Q=P=2000$ кг и изгибающий момент $M=Pl=2000 \times 1,5=3000$ кгм. По табл. 9 § 5 настоящей главы находим размеры сечения (фиг. 9.30), его площадь $F=35,5$ см², момент сопротивления $W=237$ см³ и момент инерции $J=2370$ см⁴. Нормальные напряжения в крайних точках опасного сечения равны

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{300000}{237} = 1266 \text{ кг/см}^2.$$

Чтобы найти наибольшие касательные напряжения, возникающие в точках нейтральной оси OO , вычислим статический момент площади полусечения относительно OO . Эту площадь разбиваем на площадь полки, приблизительно равную прямоугольнику $(b-d)t=(10-0,7) \cdot 1,14=10,6$ см² и площадь половины стенки $\frac{h}{2} d = 10 \cdot 0,7 = 7,0$ см². Расстояния их центров тяжести до нейтральной оси будут $\frac{h}{2} - \frac{t}{2} = 10 - 0,57 = 9,43$ см и $\frac{1}{2} \frac{h}{2} = 5$ см. Статический момент полусечения

$$S = \sum y' \Delta F = 10,6 \cdot 9,43 + 7 \cdot 5 = 135 \text{ см}^3.$$

Ширина сечения по нейтральной оси равна толщине стенки $d=0,7$ см. Подставляя найденные значения в формулу (17), получаем касательные напряжения в точках по нейтральной оси опасного сечения

$$\tau = \frac{QS}{Jb} = \frac{2000 \cdot 135}{2370 \cdot 0,7} = 163 \text{ кг/см}^2.$$

Даже в двутавровых балках напряжения τ получаются сравнительно малыми и незначительно влияют на прочность. Только для очень коротких балок, когда изгибающий момент получается небольшим, а поперечная сила велика, касательные напряжения имеют значительную величину по сравнению с нормальными.

Задачи. 1. Консоль круглого сечения диаметром d изгибается силой P , приложенной на свободном конце. Во сколько раз длина консоли l должна быть больше диаметра d , чтобы наибольшие касательные напряжения составили 10% от наибольших нормальных напряжений опорного сечения? *Ответ:* $l=5d$.

2. Построить эпюру касательных напряжений по высоте балки прямоугольного сечения $b \times h = 6 \times 24$ см от поперечной силы $Q = 2000$ кг. Ординаты эпюры вычислить в точках на расстоянии $y = 12; 8; 4$ и 0 см от нейтрального слоя.

Ответ: $\tau_{y=12} = 0$; $\tau_{y=8} = 11,6$; $\tau_{y=4} = 18,5$ и $\tau_{y=0} = 20,8$ кг/см².

§ 9. Расчет на прочность при изгибе

Брусья, находящиеся в условиях изгиба, считаются достаточно прочными, если от заданной нагрузки ни в одной точке самого опасного сечения не возникают напряжения, превосходящие допускаемые. Так как нормальные напряжения при поперечном изгибе почти всегда значительно превосходят по величине касательные напряжения, то прочность балки зависит главным образом от первых. В расчете на прочность при изгибе необходимо исходить из нормальных напряжений, которые имеют наибольшую величину в самых удаленных от нейтральной оси точках (фиг. 9.6 и 9.20). В случае балки постоянного сечения опасным сечением будет то, в котором изгибающий момент имеет наибольшее значение. Вычислив в этом сечении напряжения, нужно убедиться, что они не превосходят допускаемого напряжения. *Условие прочности* имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma]. \quad (21)$$

Наибольшие нормальные напряжения не должны быть больше допускаемого. В применении условия прочности различается несколько случаев. Чаще всего встречается случай, когда материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию; допускаемые напряжения для обоих видов деформации волокон равны между собой $[\sigma_{\text{раст}}] = [\sigma_{\text{сж}}] = [\sigma]$. В случае сечения, симметричного относительно нейтральной оси, безразлично, на каком краю, растянутом или сжатом, проверяется прочность материала, потому что напряжения получаются одинаковые для обоих краев сечения. При несимметричном сечении в условие прочности нужно подставлять меньший из моментов сопротивления W_1 и W_2 , который относится к более удаленному волокну, потому

что там напряжение будет больше. Наконец, в том случае, когда материал различно сопротивляется растяжению и сжатию, вместо одного условия прочности применяются два условия — одно для растянутых, а второе — для сжатых волокон:

$$\sigma_{\text{раст}} = \frac{M}{W_1} \leq [\sigma_{\text{раст}}]; \quad \sigma_{\text{сж}} = \frac{M}{W_2} \leq [\sigma_{\text{сж}}].$$

В симметричном сечении расчет производится по меньшему допускаемому напряжению, а в несимметричном нужно прочность проверять по обоим условиям одновременно. Для проверки прочности необходимо предварительно знать величину допускаемых напряжений данного материала. Так как при изгибе продольные волокна подвергаются простому растяжению и сжатию, то и допускаемые напряжения принимаются одинаковыми с допускаемыми напряжениями на растяжение и сжатие. Например, по расчетным строительным нормам для обыкновенной стали $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$, для сосны $[\sigma] = 100 \text{ кг/см}^2$ и т. д.

По поводу касательных напряжений следует отметить, что хотя они редко достигают величины, непосредственно угрожающей прочности конструкции, проверять их все же необходимо, особенно в коротких балках и в конструкциях с тонкими стенками, имеющих сравнительно небольшую ширину сечения на уровне нейтрального слоя. Кроме того, касательные напряжения необходимо знать для расчета соединительных элементов составных балок, о чем будет сказано ниже. Допускаемое касательное напряжение принимается как некоторая доля нормального. Чаще всего берут $[\tau] = 0,6 [\sigma]$ или $[\tau] = 0,8 [\sigma]$. В расчете на прочность встречаются три вида задач, в зависимости от того, какие величины являются заданными.

Проверка прочности. Даны нагрузка, размеры балки, ее поперечное сечение и материал. Вычисляют наибольший изгибающий момент M и момент сопротивления сечения W ; затем находят действительные напряжения σ и сравнивают их с допускаемыми.

Подбор сечения. Известны нагрузка или наибольший изгибающий момент M и допускаемое напряжение. Находят момент сопротивления W , требуемый по условию прочности; выбирают форму сечения и определяют его размеры в зависимости от найденной величины W .

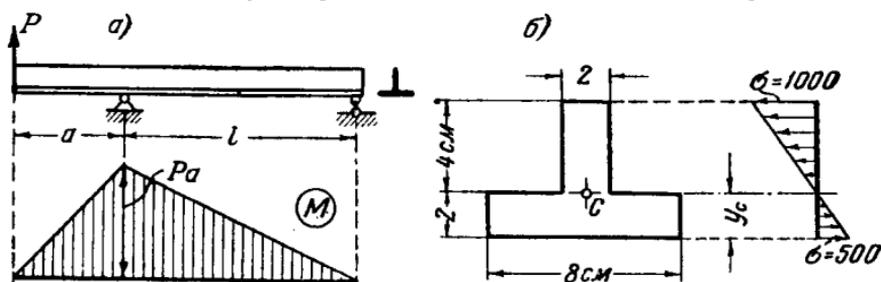
Грузоподъемность. Известны материал, поперечное сечение, размеры балки и характер нагрузки. Устанавливают допускаемое напряжение и вычисляют момент сопротивления. По условию прочности находят наибольший изгибающий момент и наибольшую нагрузку, которую может выдержать балка. Ниже дано несколько примеров расчета на прочность.

Пример 1. Балка на двух опорах с консолью изготовлена из чугунной отливки таврового сечения, расположенного полкой

вниз (фиг. 9.31). Проверить прочность балки, если она нагружена силой $P=800$ кг, направленной вверх, на конце консоли длиной $a=20$ см. Допускаемое напряжение чугуна на сжатие 1200 кг/см² и на растяжение 350 кг/см².

Наибольший изгибающий момент возникает на левой опоре (фиг. 9.31, а): $M=Pa=800 \cdot 0,2=160$ кгм.

Для определения центра тяжести сечения разбиваем его на два прямоугольника; вычисляем статический момент площади сечения, например, относительно нижнего края сечения



Фиг. 9.31. Пример расчета чугунной балки.

а — эпюра изгибающих моментов; б — размеры поперечного сечения и эпюра напряжений.

$S=4 \cdot 2 \cdot 4 + 8 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ см³,
и делим его на всю площадь

$$y_c = \frac{S}{F} = \frac{48}{4 \cdot 2 + 8 \cdot 2} = 2 \text{ см.}$$

Нейтральная ось проходит в данном случае как раз по верхнему краю полки тавра (фиг. 9.31, б). Вычисляем момент инерции сечения относительно этой оси:

$$J = \frac{2 \cdot 4^3}{12} + 2 \cdot 4 \cdot 2^2 + \frac{8 \cdot 2^3}{12} + 8 \cdot 2 \cdot 1^2 = 64 \text{ см}^4.$$

Момент сопротивления для крайних верхних точек (фигура 9.31, б) будет $W_1 = \frac{64}{4} = 16$ см³, для нижних $W_2 = \frac{64}{2} = 32$ см³.

Напряжения сжатия возникают в верхнем краю; они равны

$$\sigma_{\text{сж}} = \frac{16000}{16} = 1000 \leq 1200 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжения растяжения на нижнем краю

$$\sigma_{\text{раст}} = \frac{16000}{32} = 500 > 350 \text{ кг/см}^2.$$

Растягивающие напряжения превосходят допускаемое на $\frac{500 - 350}{350} 100 = 42,8\%$.

Сечение необходимо увеличить, чтобы обеспечить назначенный запас прочности балки; сжимающие напряжения значительно меньше допускаемых.

Пример 2. Деревянная балка на двух опорах нагружена двумя силами $P=500$ кг, приложенными симметрично на расстоянии $a=0,7$ м от опор, как показано на фиг. 8. 22. Подобрать прямоугольное поперечное сечение балки с отношением высоты к ширине $\frac{h}{b}=3$.

Дерево различно сопротивляется растяжению и сжатию, при этом поведение сжатых волокон в балке несколько иное, чем в сжатом бруске. Последнее обстоятельство привело к созданию ряда теорий расчета деревянных балок. В качестве первого приближения можно производить расчет в предположении, что и сжатые и растянутые волокна одинаково хорошо сопротивляются, и принимать допускаемое напряжение на изгиб равным среднему значению допускаемых напряжений растяжения и сжатия. С учетом этого замечания при расчете заданной балки допускаемое напряжение на изгиб принято равным 100 кг/см^2 . Наибольший изгибающий момент будет в средней части балки: $M=Pa=500 \cdot 0,7=35000 \text{ кгсм}$. Необходимый по условию прочности момент сопротивления должен быть

$$W = \frac{M}{[\sigma]} = \frac{35000}{100} = 350 \text{ см}^3.$$

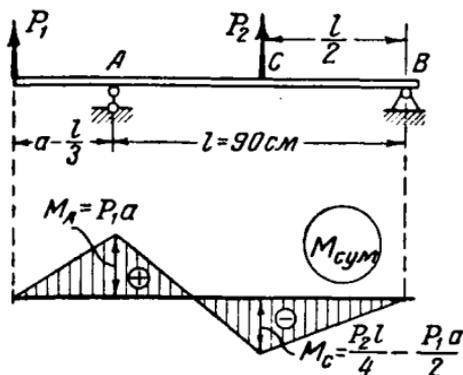
Для прямоугольника по формуле (9) он равен $W = \frac{bh^2}{6}$. Подставляя сюда заданное соотношение $b = \frac{h}{3}$ и требуемую величину W , имеем

$$350 \leq \frac{h^3}{3 \cdot 6}.$$

Окончательно находим

$$h \geq \sqrt[3]{3 \cdot 6 \cdot 350} \approx 18,5 \text{ см}$$

Ширина сечения должна быть $b \geq \frac{18,5}{3} = 6,2 \text{ см}$.



Фиг. 9. 32. К определению допускаемой нагрузки при условии равнопрочности сечений A и C.

Пример 3. Определить наибольшую величину сил P_1 и P_2 , которыми безопасно можно нагрузить балку, составленную из

двух бульбшвеллеров № 6 (фиг. 9.32), при условии чтобы ее прочность в сечении на опоре A и под силой P_2 была одинаковой. Допускаемое напряжение дуралюмина задано 800 кг/см^2 .

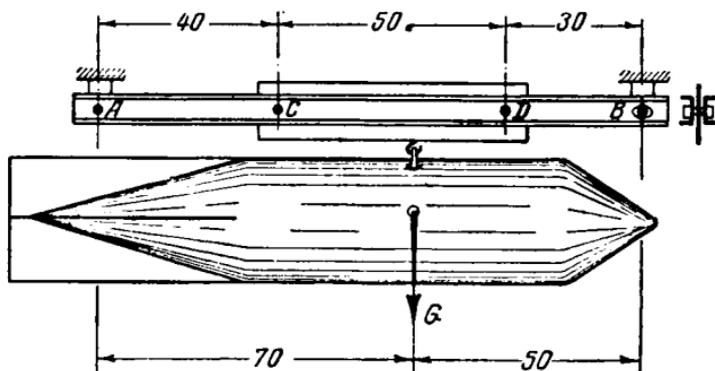
Наибольший изгибающий момент, который может безопасно выдержать балка, равен $M = [\sigma]W$. Находим момент сопротивления двух бульбшвеллеров по табл. 8 настоящей главы и вычисляем $M = 800 \cdot 2 \cdot 10,14 = 16\,200 \text{ кгсм}$. Требование равнопрочности в сечениях A и C равносильно условию равенства изгибающих моментов в этих сечениях. Чтобы найти силы P_1 и P_2 , строим эпюру $M_{\text{сум}}$ (фиг. 9.32) и подставляем значение изгибающих моментов в условие равнопрочности:

$$P_1 a = \frac{P_2 l}{4} - \frac{P_1 a}{2},$$

откуда $\frac{3}{2} P_1 a = \frac{P_2 l}{4}$. Принимая во внимание, что $a = \frac{l}{3} = 30 \text{ см}$, находим соотношение между силами $P_1 = P_2 \frac{l}{6a} = \frac{P_2}{2}$.

Их величину определяем из условия прочности сечения A $P_1 = \frac{M}{a} = \frac{16\,200}{30} = 540 \text{ кг}$, тогда $P_2 = 2P_1 = 1080 \text{ кг}$.

Пример 4. Бомбодержатель прикреплен к балке пролетом $l = 120 \text{ см}$ в точках C и D и несет бомбу весом $G = 1000 \text{ кг}$ (фиг. 9.33). Подобрать сечение балки бомбодержателя из двух



Фиг. 9.33. Схема расположения бомбы и бомбодержателя на балке AB .

стальных швеллеров, если принять, что в криволинейном полете нагрузка увеличивается в четыре раза и допускаемое напряжение стали $[\sigma] = 2000 \text{ кг/см}^2$.

Для решения поставленной задачи умножим вес бомбы на коэффициент перегрузки n и от силы nG определим опорные реакции балки бомбодержателя:

$$A = \frac{4G \cdot 0,5}{1,2} = \frac{4 \cdot 1000 \cdot 0,5}{1,2} = 1666 \text{ кг}; \quad B = \frac{4000 \cdot 0,7}{1,2} = 2334 \text{ кг}.$$

Наибольший изгибающий момент получается в сечении D $M_D = B \cdot 0,3 = 2334 \cdot 0,3 = 700 \text{ кгм}$.

По условию прочности необходимый момент сопротивления двух швеллеров должен быть

$$W \geq \frac{M_D}{[\sigma]} = \frac{70\,000}{2000} = 35 \text{ см}^3.$$

По табл. 9 подбираем подходящее сечение. Останавливаемся на швеллере № 6,5, имеющем $W_z = 17,0 \text{ см}^3$. Для сечения балки из двух швеллеров $W = 2 \cdot 17,0 = 34 \text{ см}^3$. В этом случае имеем $\sigma = \frac{M_D}{W} = \frac{70\,000}{34} = 2059 > 2000 \text{ кг/см}^2$ на $\frac{2059 - 2000}{2000} 100 = 2,93\%$. Перенапряжение получается меньше 5%, что разрешается нормами.

Задачи. 1. Подобрать размер стороны квадратного сечения деревянной балки, нагруженной силой $P = 500 \text{ кг}$, как на фиг. 9. 31, если длина $a = 0,5 \text{ м}$ и $[\sigma] = 100 \text{ кг/см}^2$. *Ответ:* 11,5 см.

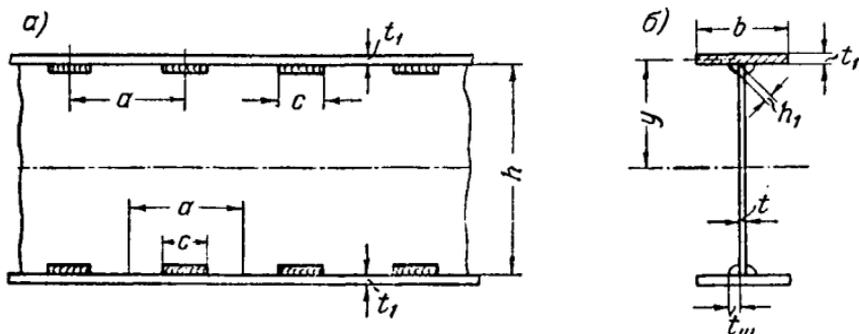
2. Балка, свободно лежащая на двух опорах, нагружена по середине силой $P = 2000 \text{ кг}$. Определить наибольший пролет l , который безопасно можно перекрыть 1) деревянной балкой прямоугольного сечения $b \times h = 12 \times 20 \text{ см}$ и 2) стальной двутавровой балкой № 16. Допускаемые напряжения дерева — 100 кг/см^2 , стали — 1400 кг/см^2 . *Ответ:* деревянной балкой — $l = 1,6 \text{ м}$; стальной — $l = 3,95 \text{ м}$.

§ 10. Расчет составных балок

Часто случается, что по конструктивным и другим соображениям нельзя применить сплошное сечение, представляющее собой одно целое, и приходится составлять балку из отдельных частей: из отдельных брусков, листов, труб, угольников, швеллеров и т. д. Примером могут служить балки, сечения которых изображены на фиг. 9. 12, 9. 15 и 9. 16. В таких балках все составляющие части скрепляются между собой в одно целое. В металлических балках скрепление осуществляется при помощи заклепок, болтов и сварных швов, а в деревянных — при помощи болтов, гвоздей, клея и т. п., называемых соединяющими элементами. При надлежащем выборе соединяющих элементов, их размеров и расположения, балки, составленные из отдельных частей, изгибаются как одно целое и их сечения можно рассматривать как сплошные. Это определяет собой порядок расчета составных балок. Он состоит, во-первых, из расчета составной балки как одного целого, по тем же правилам, которые применяются к балкам сплошного сечения; во-вторых, из расчета соединяющих элементов, обеспечивающих совместную работу всех составляющих частей балки и ее общую прочность. Так как первая часть расчета ничем не отличается от рассмотренного уже расчета балок сплошного сечения, то нам остается только ознакомиться с расчетом соединяющих элементов. На

примерах конкретных конструкций покажем, как производится этот расчет.

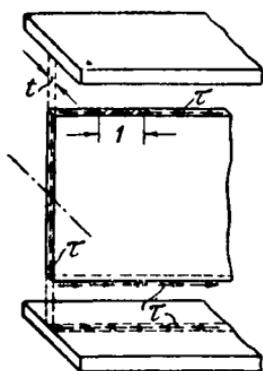
Сварная балка. Рассмотрим балку, которая состоит из вертикального и горизонтальных листов, соединенных сварными швами (фиг. 9.34). Прочность такого соединения вполне может



Фиг. 9.34. Сварная балка.

a — боковой вид; *б* — поперечное сечение.

быть обеспечена даже в том случае, когда швы будут не сплошные, на всю длину балки, а прерывистые, в виде отдельных участков длиной *c*, которые называются *шпонками*; расстояние между серединами шпонок называется их *шагом*. Если вертикальную стенку непосредственно присоединить к горизонтальным полкам без помощи швов, то по соприкасающимся граням возникнут при изгибе балки касательные напряжения, как силы взаимодействия между полкой и стенкой (фиг. 9.35). Эти силы и должны воспринять на себя шпонки для передачи их со стенки на полку и обратно. Величину касательных напряжений на уровне верхнего (или нижнего) края стенки найдем по формуле (17):



Фиг. 9.35. Касательные напряжения, возникающие между полками и стенкой балки.

На единицу длины балки на уровне шва приходится погонное касательное усилие.

$$q = \tau t = \frac{Q}{J} S. \quad (22)$$

Оно представляет собой усилие, сдвигающее одну составляющую часть балки относительно другой и является основным уси-

лием, по которому производится расчет всех видов соединяющих элементов. Это усилие и должны воспринимать на себя шпонки для передачи его с полки на стенку. На каждую пару шпонок, расположенных симметрично по обе стороны стенки, будет передаваться сдвигающая сила, представляющая собой равнодействующую погонных касательных усилий, распределенных по длине шага a :

$$qa = \frac{Q}{J} Sa.$$

Сила qa стремится срезать шпонки вдоль их длины s . Так как разрушение шва от сдвигающей силы происходит по сечению $1-1$ (фиг. 9.36) под углом 45° к сваренным листам (гл. 5, § 5, фиг. 5.11) и величина наvara не принимается во внимание, то площадь среза шпонки равна $F_{ср} = h_1 c$, где $h_1 = 0,7 t_{ш.ва}$. В обеих шпонках сдвигающая сила вызовет касательные напряжения $\tau_{ш}$, которые по условию прочности на срез не должны превосходить допускаемое напряжение для наплавленного металла $[\tau]$:

$$\tau_{ш} = \frac{qa}{2F_{ср}} = \frac{qa}{2h_1 c} \ll [\tau],$$

откуда находим отношение длины шпонки к шагу

$$\frac{c}{a} \geq \frac{q}{2h_1 [\tau]}.$$

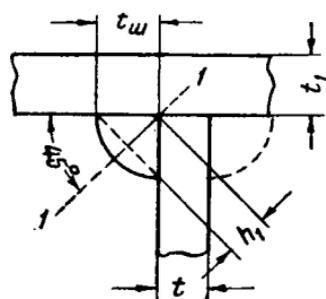
Последняя формула дает возможность установить прочные размеры сварных швов. При этом могут быть три случая:

1) $\frac{c}{a} < 1$, шов можно сделать прерывистым; выбрав по техническим условиям длину шпонки s , находим шаг a (фигура 9.34, a);

2) $\frac{c}{a} = 1$, шов должен быть сплошным, потому что длина шпонки получается равной шагу;

3) $\frac{c}{a} > 1$, осуществить шов при выбранной толщине $t_{ш}$ нельзя, потому что длина шпонки получается больше шага и каждая шпонка должна перекрывать соседние; необходимо увеличить размер h_1 , а следовательно, и высоту $t_{ш}$, чтобы удовлетворить условию прочности. В соответствии с полученным случаем выбирают размеры сварных швов.

Пример 1. Подобрать сечение и рассчитать швы сварной двутавровой балки на двух опорах, нагруженной тремя силами



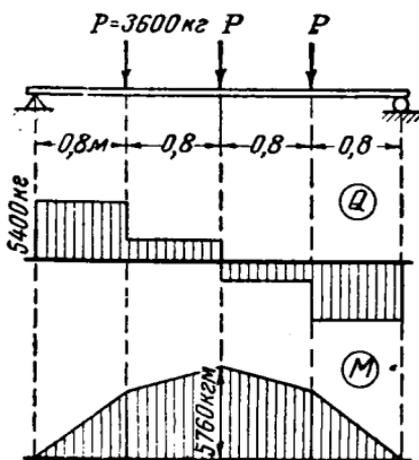
Фиг. 9.36. Поперечное сечение сварного шва, соединяющего стенку с полкой.

$P=3600$ кг в четвертях пролета $l=3,2$ м. Допускаемые напряжения материала балки $[\sigma]=1400$ кг/см² и $[\tau]=1120$ кг/см²; материала электросварки $[\tau_s]=720$ кг/см².

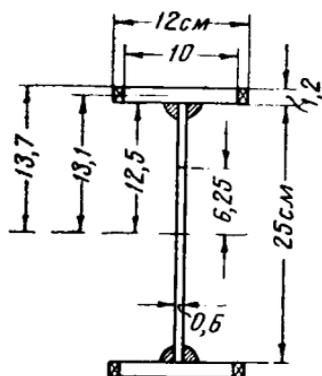
Строим эпюры Q и M (фиг. 9.37). По наибольшему изгибающему моменту находим необходимый момент сопротивления

$$W = \frac{M}{[\sigma]} = \frac{576\,000}{1400} = 411 \text{ см}^3.$$

Нужно подобрать такие размеры сечения двутавра, чтобы момент сопротивления был не меньше требуемого условием прочности. Это производится путем попыток. Сначала задают ориентировочные размеры и вычисляют W ; сравнивая его с



Фиг. 9.37. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.



Фиг. 9.38. Выбранные размеры сечения сварной балки.

требуемым, соответственно изменяют размеры сечения и снова вычисляют W , повторяя расчет до тех пор, пока не будут достигнуты желательные результаты. При подборе можно исходить из следующих примерных соотношений, выработанных расчетной практикой. В зависимости от пролета назначают высоту стенки в пределах $\frac{l}{6} \geq h \geq \frac{l}{20}$; затем в зависимости от высоты h выбирают ширину полки $\frac{h}{2} \geq b \geq \frac{h}{8}$; толщину стенки $\frac{h}{20} \geq t \geq \frac{h}{100}$ и, наконец, толщину полки $4t \geq t_1 \geq t$. В данном случае принимаем $h=25$ см; $t=0,6$ см; $b=10$ см; $t_1=1,2$ см. Исходя из этих размеров находим момент инерции двух полок и стенки (фиг. 9.38):

$$J = 2 \cdot 10 \cdot 1,2 \cdot 13,1^2 + \frac{0,6 \cdot 25^3}{12} = 4900 \text{ см}^4.$$

Момент сопротивления

$$W = \frac{J}{y_{\max}} = \frac{4900}{13,7} = 358 < 411 \text{ см}^3.$$

Разница получилась сравнительно небольшая. Для увеличения W доведем ширину полок до 12 см (фиг. 9.38). От этого момент инерции возрастает до $J = 4900 + 2 \cdot 2 \cdot 1,2 \cdot 13,1^2 = 5725 \text{ см}^4$, и момент сопротивления $W = \frac{5725}{13,7} = 418 \text{ см}^3$ почти в точности совпадает с требуемым. Если получается большая разница в величинах W , то вместо изменения размеров полки следует изменить высоту сечения, при условии что это позволяют габариты конструкции. После подбора проверяем действительные нормальные напряжения опасного сечения

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{576000}{418} = 1378 < 1400 \text{ кг/см}^2.$$

Для проверки касательных напряжений вычисляем статический момент полусечения

$$S = 12 \cdot 1,2 \cdot 13,1 + 12,5 \cdot 0,6 \cdot 6,25 = 231 \text{ см}^3.$$

По наибольшей поперечной силе $Q = 5400 \text{ кг}$ при помощи формулы (17) находим τ на уровне нейтрального слоя в сечениях вблизи опор:

$$\tau = \frac{QS}{J_b} = \frac{5400 \cdot 231}{5725 \cdot 0,6} = 362 < 1120 \text{ кг/см}^2.$$

Для расчета сварных швов вычисляем статический момент площади одной полки

$$S = 12 \cdot 1,2 \cdot 13,1 = 189 \text{ см}^3$$

и находим погонное касательное усилие на уровне шва:

$$q = \frac{QS}{J} = \frac{5400 \cdot 189}{5725} = 178 \text{ кг/см}.$$

Принимаем высоту шва $t_{\text{ш}} = 0,6 \text{ см}$. Расчетная высота равна $h_1 = 0,7t_{\text{ш}} = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42 \text{ см}$. Отношение длины шпонки к шагу

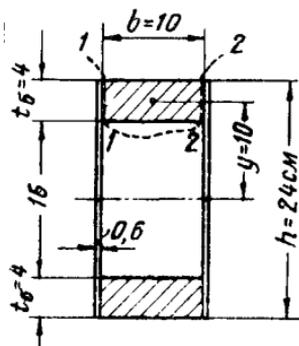
$$\frac{c}{a} \geq \frac{q}{2h_1[\tau_9]} = \frac{178}{2 \cdot 0,42 \cdot 720} = 0,3.$$

Назначаем $c = 5 \text{ см}$ и $a = 15 \text{ см}$, т. е. $\frac{c}{a} = \frac{5}{15} = 0,33$, что больше 0,3. Действительные напряжения среза шпонок равны

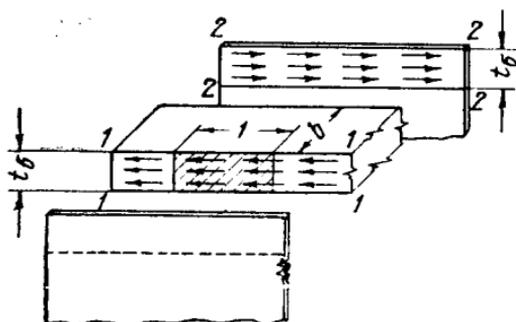
$$\tau = \frac{qa}{2F_{\text{ср}}} = \frac{178 \cdot 15}{2 \cdot 0,42 \cdot 5} = 636 < 720 \text{ кг/см}^2.$$

Составная деревянная балка. Для уменьшения собственного веса деревянные балки часто составляют из двух брусков, соединенных обычно фанерными стенками (фиг. 9.39). Прикрепление стенок к брускам осуществляется с помощью клея. При изгибе такой балки бруски стремятся сдвинуться относительно стенок в продольном направлении, подобно тому как это было показано на фиг. 9.21 для балки из двух брусков. По соприкасающимся плоскостям 1—1 и 2—2 вверху и внизу возникают касательные напряжения τ (фиг. 9.40). На участке, длиной равной единице, они создают погонное касательное усилие q , которое вычисляется по формуле (22):

$$q = \frac{Q}{J} S.$$



Фиг. 9.39. Сечение составной деревянной балки из двух брусков, соединенных фанерными стенками.



Фиг. 9.40. Касательные напряжения между брусками и фанерными стенками составной деревянной балки при изгибе.

Здесь входит статический момент площади той части сечения, которая отделяется соприкасающимися плоскостями, а в данном случае плоскостями 1—1 и 2—2, т. е. статический момент площади сечения бруска $b \times t_6$ относительно нейтральной оси, $S = b t_6 y$. Зная величину q , можно произвести расчет соединяющих элементов.

Пример 2. Деревянный лонжерон длиной $l = 3,5$ м, заделанный одним концом, составлен из двух брусков 4×10 см, склеенных с двумя фанерными стенками толщиной 0,6 см. Высота сечения $h = 24$ см (фиг. 9.39). Найти интенсивность воздушной нагрузки p кг/м, распределенной по длине l равномерно, которую может выдержать лонжерон при $[\sigma] = 100$ кг/см², и определить касательные напряжения в склейке, возникающие вблизи опорного сечения.

Вычисляем момент инерции и момент сопротивления сечения лонжерона:

$$J = \frac{11,2 \cdot 24^3}{12} - \frac{10 \cdot 16^3}{12} = 9490 \text{ см}^4; \quad W = \frac{9490}{12} = 791 \text{ см}^3.$$

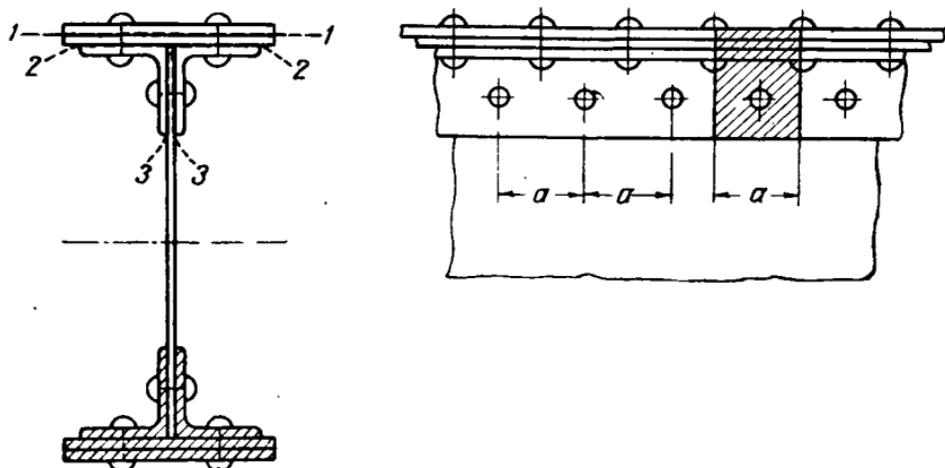
Изгибающий момент по условию прочности не должен быть больше $M = W[\sigma] = 791 \cdot 100 = 79\,100 \text{ кгсм} = 791 \text{ кгм}$. Лонжерон представляет собой консоль, нагруженную равномерно распределенным давлением p (как на фиг. 8.15). Наибольший момент будет в заделке $M = \frac{pl^2}{2}$. Приравнявая, получаем

$$p = \frac{2M}{l^2} = \frac{2 \cdot 791}{3,5^2} = 129 \text{ кг/м.}$$

Поперечная сила у опоры равна

$$Q = pl = 129 \cdot 3,5 = 452 \text{ кг.}$$

Касательные напряжения передаются от бруска на стенку по плоскостям склейки 1—1 и 2—2 (фиг. 9.40). На единицу длины



Фиг. 9.41. Поперечное сечение и боковой вид верхнего пояса клепаной балки.

лонжерона приходится погонное касательное усилие q , для определения которого нужно вычислить статический момент площади сечения только одного бруска, выделенного плоскостями 1—1 и 2—2, равный $S = 4 \cdot 10 \cdot 10 = 400 \text{ см}^3$. По формуле (22) получаем

$$q = \frac{QS}{J} = \frac{452 \cdot 400}{9490} = 19 \text{ кг/см.}$$

Считая (приближенно) напряжения в склейке распределенными равномерно по высоте бруска t , находим в двух плоскостях 1—1 и 2—2

$$\tau_{\text{скл}} = \frac{q}{2t_6} = \frac{19}{2 \cdot 4} = 2,4 \text{ кг/см}^2.$$

Клепаная балка состоит из вертикального листа, нескольких пар горизонтальных листов и угольников; листы и угольники соединяются заклепками (фиг. 9.41). При изгибе

происходит сдвиг в продольном направлении между составляющими частями: горизонтальные листы стремятся сдвинуться относительно друг друга по плоскости 1—1 и относительно угольников по плоскости 2—2. Весь набор верхнего (или нижнего) пояса стремится сдвинуться относительно вертикальной стенки по плоскостям 3—3, обнимающим стенку. Этому сдвигу препятствуют заклепки, соединяющие стенку с угольниками. В формулу (21) войдет статический момент той части сечения, которая отделяется плоскостями 3—3.

Наиболее нагруженными в клепаной балке являются горизонтальные заклепки, соединяющие угольники с вертикальной стенкой. Они воспринимают на себя усилие q , которое передается на стенку от всего пояса, составленного из двух угольников и двух горизонтальных листов (на фиг. 9.41 заштрихован нижний пояс). Для определения q нужно вычислить статический момент площади сечения пояса относительно нейтральной оси. Расчет заклепок производится на срез и на смятие силой qa , которая приходится на одну заклепку при шаге, равном a (фиг. 9.41). Заклепки пояса срезаются по двум сечениям, по которым проходят плоскости 3—3.

Могут быть и другие формы сечений клепаных балок, как, например, сечение по фиг. 9.15, но расчет заклепок остается для них одинаковым. Нужно только уметь выделить ту часть сечения, от которой передается сдвигающая сила на данные заклепки.

Пример 3. Определить наибольшую поперечную силу, которую может выдержать клепаная балка с сечением, изображенным на фиг. 9.16, если шаг заклепок $a=6$ см; допускаемые напряжения на срез $[\tau]=1120$ кг/см² и на смятие $[\sigma_{см}]=2800$ кг/см².

Расчет ведем по заклепкам, соединяющим угольники со стенкой. Сила qa , приходящаяся на одну заклепку диаметром $d=8$ мм, не должна превосходить следующих величин: по условию среза заклепки по двум сечениям

$$qa \leq 2 \frac{\pi d^2}{4} [\tau] = \frac{3,14 \cdot 0,8^2}{2} 1120 = 1127 \text{ кг};$$

по условию смятия листа стенки

$$qa \leq dt [\sigma_{см}] = 0,8 \cdot 0,3 \cdot 2800 = 672 \text{ кг}.$$

Смятие является более опасным. Отсюда

$$q = \frac{672}{6} = 112 \text{ кг/см}.$$

Статический момент площади пояса

$$S = 0,6 \cdot 10 \cdot 12,3 + 2 \cdot 3,08 \cdot 10,87 = 140 \text{ см}^3.$$

Момент инерции всего сечения (вычислен в § 5 данной главы, пример 2) $J = 3636 \text{ см}^4$. Пользуясь формулой (22), получаем

$$Q = q \frac{J}{S} = 112 \frac{3636}{140} = 2920 \text{ кг.}$$

Проверим касательные напряжения в нейтральном слое балки. Статический момент площади полусечения $S = 140 + 12 \cdot 0,3 \cdot 6 = 162 \text{ см}^3$. Касательные напряжения по нейтральному слою

$$\tau = \frac{QS}{Jb} = \frac{2920 \cdot 162}{3636 \cdot 0,3} = 432 < 1120 \text{ кг/см}^2.$$

Предельная поперечная сила, полученная из условия смятия листа, вызывает касательные напряжения, незначительные по сравнению с допускаемыми. Следовательно, толщина стенки об- условливается смятием от заклепок.

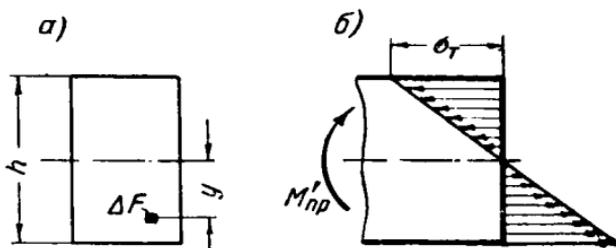
Задачи. 1. В лонжероне, изображенном на фиг. 9.15, листы стенок приклепаны к трубам при помощи заклепок диаметром $d = 4 \text{ мм}$ с шагом $a = 40 \text{ мм}$. Найти наибольшую поперечную силу, воспринимаемую лонжероном, если $[\tau] = 1120 \text{ кг/см}^2$ и $[\sigma_{\text{см}}] = 2800 \text{ кг/см}^2$.

2. Найти предельное значение поперечной силы в сечении нервюры, изображенном на фиг. 9.12,а, если стенки изготовлены из фанеры с допускаемым напряжением $[\tau] = 20 \text{ кг/см}^2$ и прикреплены к брускам при помощи клея с допускаемым напряжением $[\tau_{\text{кл}}] = 5 \text{ кг/см}^2$.

§ 11. Изгиб за пределом пропорциональности

Исследование изгиба за пределом пропорциональности основано на двух допущениях, которые были приняты в § 1 настоящей главы при изгибе в пределах пропорциональности: 1) поперечные сечения остаются плоскими и 2) продольные волокна испытывают одноосное растяжение или сжатие также и при пластических деформациях балки. При изгибе, как и при кручении, напряжения распределяются неравномерно по поперечному сечению; поэтому результаты расчета по разрушающим нагрузкам отличаются от результатов расчета по допускаемым напряжениям. Если при изгибе нормальные напряжения в крайних волокнах, наиболее удаленных от нейтрального слоя, и достигнут предела текучести σ_T (фиг. 9.42,б), то это еще не означает полного отказа балки от работы и не исчерпывает ее возможной грузоподъемности. Подобная картина напряжений рассматривалась и при кручении круглого бруса (гл. VI, § 10). Когда в крайних волокнах изгибаемой балки начнется текучесть, все остальные волокна будут находиться еще в зоне упругих деформаций и для их увеличения необходимо увеличить нагрузку. При возрастании нагрузки упругие удлинения внутренних волокон, как и пластические удлинения крайних волокон, происходят согласно первому допущению по закону плоских сечений. При этом напряжения внутренних волокон увеличиваются, а в крайних волокнах остаются без изменения и равны σ_T . Зависимость между напряжениями и удлинениями волокон больше уже не подчиняется закону пропорциональности; ее нужно брать по диаграмме растяжения данного материала (фиг. 3.9). Треугольная эпюра нормальных напряжений (фиг. 9.42,б) заменяется криволинейной (фиг. 9.43,а).

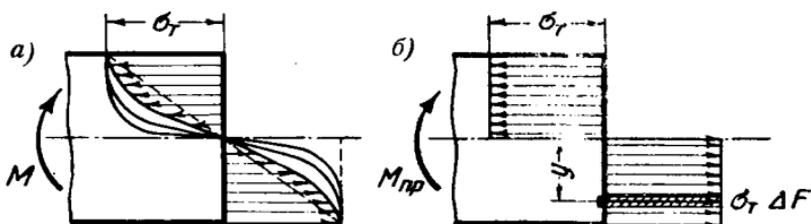
С увеличением нагрузки очертание эпюры приближается к состоящему из двух прямоугольников. Это происходит потому, что напряжения внутренних волокон, постепенно достигая предела текучести, перестают расти и останавливаются на величине σ_T . Если диаграмма зависимости между напряжениями и деформациями для данного материала одинакова при растяжении и сжатии, то и эпюра напряжений при изгибе за пределом пропорциональности имеет одинаковое очертание в растянутой и сжатой зонах сечения. Когда



Фиг. 9.42. Наибольшие напряжения при изгибе в пределах пропорциональности.

a — прямоугольное сечение балки; *б* — напряжения крайних волокон достигли предела текучести; эпюра напряжений состоит из двух треугольников.

напряжения по всему сечению достигнут предела текучести σ_T и эпюра напряжений примет вид двух прямоугольников в сжатой и растянутой половинах балки (фиг. 9.43,б), дальнейшее увеличение нагрузки станет невозможным. Это состояние балки является предельным и наибольший изгибаю-



Фиг. 9.43. Напряженные состояния при изгибе за пределом пропорциональности.

a — изменение напряжений при возрастании нагрузки за пределом пропорциональности; *б* — предельное напряженное состояние — по всему сечению напряжения достигли предела текучести.

щий момент M_{np} , соответствующий этому состоянию, выражает предельную грузоподъемность балки по разрушающим нагрузкам. Дальнейшая деформация балки будет происходить без увеличения нагрузки и в опасном сечении образуется так называемый *пластический шарнир*: смежные поперечные сечения будут поворачиваться друг относительно друга за счет текучести продольных волокон.

Для определения разрушающего изгибающего момента M_{np} рассмотрим предельное напряженное состояние, возникающее в опасном сечении (фиг. 9.43, б). На площадку ΔF , взятую на расстоянии u от нейтральной оси (фиг. 9.42, а), действует продольная сила $\sigma_T \Delta F$. Ее момент около нейтральной оси равен $\sigma_T \Delta F u$. Складывая моменты всех этих сил, приложен-

ных по всему сечению, получаем величину $M_{\text{пр}}$. Для симметричного относительно нейтральной оси сечения достаточно вычислить сумму моментов сил верхней или нижней половины сечения и удвоить результат:

$$M_{\text{пр}} = 2 \sum_0^{\frac{F}{2}} \sigma_T y \Delta F = 2\sigma_T \sum_0^{\frac{F}{2}} y \Delta F = 2\sigma_T S.$$

Напряжение σ_T постоянно для всех точек сечения и вынесено за знак суммы, которая теперь представляет собой статический момент площади

половины сечения около нейтральной оси, $S = \sum_0^{\frac{F}{2}} y \Delta F$. Оставляя коэффи-

циент запаса n одинаковым с установленным при расчете по допускаемым напряжениям и подставляя $\sigma_T = n [\sigma]$, получаем предельный изгибающий момент по разрушающим нагрузкам в виде

$$M_{\text{пр}} = 2n [\sigma] S.$$

Его отношение к предельному изгибающему моменту $M'_{\text{пр}} = nM = n [\sigma] W$, вычисленному по способу допускаемых напряжений из условия прочности [§ 9 настоящей главы, формула (21)], равно отношению удвоенного статического момента площади полусечения к моменту сопротивления:

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M'_{\text{пр}}} = \frac{2S}{W} = k,$$

откуда

$$M_{\text{пр}} = k M'_{\text{пр}}.$$

Если бы нейтральная линия не являлась осью симметрии сечения, то из условий равновесия можно было бы показать, что в предельном состоянии нейтральная линия разделит площадь сечения на две равные части и $M_{\text{пр}} = \sigma_T (S_1 + S_2)$, где S_1 и S_2 — статические моменты растянутой и сжатой площадей сечения, взятые относительно нейтральной линии.

Коэффициент увеличения грузоподъемности k при переходе к расчету по разрушающим нагрузкам зависит от площади и формы поперечного сечения балки и для каждого вида сечения получается различным. Например, для прямоугольного сечения статический момент полусечения

$$S = \frac{bh}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8};$$

подставляя его и момент сопротивления $W = \frac{bh^2}{6}$ в выражение для коэффициента k , находим

$$k = \frac{2bh^2}{8} \frac{6}{bh^2} = 1,5.$$

Грузоподъемность балки прямоугольного сечения при переходе к расчету по разрушающим нагрузкам увеличивается на 50%.

Для круглого сплошного сечения имеем статический момент полусечения [формула (19)]

$$S = \frac{d^3}{12},$$

а момент сопротивления (12)

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}.$$

В этом случае коэффициент

$$k = \frac{2S}{W} = \frac{2d^3}{12} \frac{32}{\pi^3} = 1,7.$$

При изгибе за пределом пропорциональности материал используется полностью как на краях сечения, так и вблизи нейтрального слоя (фиг. 9.43,б), тогда как в пределах пропорциональности используется материал только у краев сечения. Менее рациональные формы сечений, с большим количеством неиспользуемого материала, дают большее увеличение грузоподъемности при переходе к расчету по разрушающим нагрузкам. Вот почему для круглого сечения грузоподъемность увеличивается больше, чем для прямоугольного. Чем рациональнее форма, тем меньше разница между расчетами по допускаемым напряжениям и по разрушающим нагрузкам. Например, для двутавровой балки, изображенной на фиг. 9.30 (пример 2, § 8 настоящей главы), имеем $S = 135 \text{ см}^3$, $W = 237 \text{ см}^3$ и коэффициент

$$k = \frac{2S}{W} = \frac{2 \cdot 135}{237} = 1,14.$$

Увеличение грузоподъемности составляет 14%. В случае равномерного распределения напряжений по всей площади сечения, как, например, при растяжении или сжатии в статически определимых системах (гл. III, § 6), расчеты по допускаемым напряжениям и по разрушающим нагрузкам приводят к одним и тем же результатам. Переход к расчету по разрушающим нагрузкам требует более тщательного исследования запаса прочности против других возможных видов разрушения и возможен лишь в случаях неизменной по времени нагрузки.

Контрольные вопросы

1. Какая деформация называется чистым изгибом?
2. Какие деформации испытывают при изгибе продольные волокна балки? В чем состоит гипотеза плоских сечений?
3. Какие напряжения вызывает изгибающий момент и как они изменяются по высоте сечения балки?
4. Какой слой балки называется нейтральным? Где он проходит и на основании какого условия определяется его положение?
5. Что такое «кривизна» балки и чему она равна? Что называется жесткостью балки на изгиб?
6. Какие уравнения равновесия нужно составить, чтобы получить формулу нормальных напряжений при изгибе? В каких случаях изгиба ее можно применять и почему?
7. Какие свойства балки характеризуют момент инерции и момент сопротивления? В каких единицах они измеряются?
8. Какие оси являются главными? Для каких сечений любая центральная ось является главной?

9. Какая зависимость существует между осевыми и полярными моментами инерции? Могут ли они быть отрицательными и почему?

10. Напишите формулы перехода к параллельным осям для вычисления моментов инерции.

11. Напишите формулы моментов инерции относительно центральных осей для прямоугольника, треугольника и круга.

12. Почему применение двутаврового профиля является выгодным при изгибе?

13. Как определяются касательные напряжения в поперечных сечениях балки? Какие опыты указывают на существование касательных напряжений в продольных сечениях?

14. Равновесие какого элемента балки нужно рассматривать, чтобы получить формулу для касательных напряжений? Как вычисляется статический момент площади, входящий в эту формулу?

15. Как изменяются касательные напряжения по высоте прямоугольного сечения? Где они имеют наибольшую величину?

16. В чем состоит расчет балок на прочность? Какого рода задачи при этом приходится решать?

Глава X

ИЗГИБ ТОНКОСТЕННЫХ АВИАКОНСТРУКЦИЙ

§ 1. Тонкостенная балка

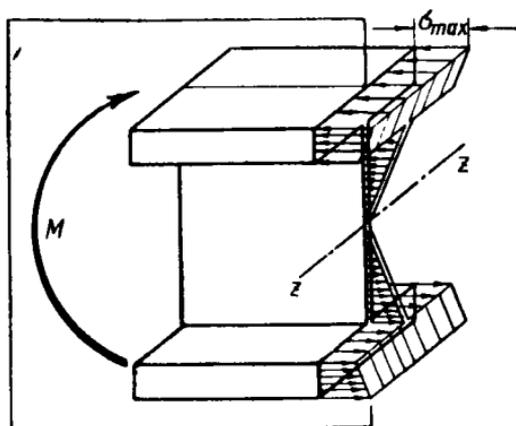
В различных конструкциях, особенно в авиационных, часто встречаются балки, составленные по типу двутавра, имеющие сравнительно тонкие вертикальные стенки и мощные пояса. К их числу относятся балки, у которых толщина t вертикальных стенок не превосходит нескольких миллиметров и составляет примерно сотую или даже меньшую долю высоты балки,

$$t \ll \frac{h}{100}.$$

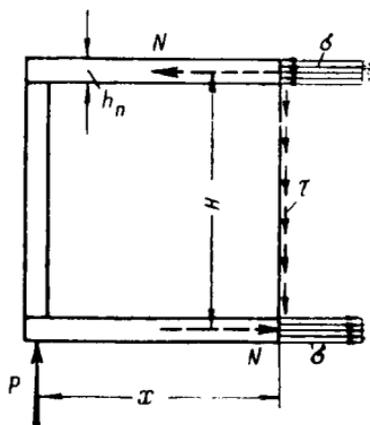
Тонкая вертикальная стенка воспринимает на себя незначительную долю внешнего изгибающего момента по сравнению с долей, воспринимаемой верхним и нижним поясами балки. Это объясняется тем, что наибольшие нормальные напряжения возникают в крайних волокнах, вблизи которых сосредоточена основная масса материала (пояса балки). Стенка же имеет небольшую площадь сечения, и нормальные напряжения в ней меньше, чем в поясах (фиг. 10.1). Доля изгибающего момента, воспринимаемая стенкой, тем меньше, чем тоньше стенка. Без большой погрешности можно считать, что весь изгибающий момент воспринимается нормальными напряжениями одних поясов. Если принять равномерное распределение нормальных напряжений по площади F_{Π} сечения пояса (фиг. 10.2), то их равнодействующие будут приложены в центре тяжести сечения каждого пояса и дадут одинаковые продольные силы N . Эти силы образуют пару с моментом, равным изгибающему моменту в данном сечении балки $NH = M = Px$. Здесь H — расстояние между центрами тяжести сечений поясов (фиг. 10.3). Величина продольной силы, сжимающей верхний пояс и растягивающей нижний, будет $N = \frac{M}{H}$. При этих предположениях нормальные напряжения в поясах вычисляются по приближенной формуле

$$\sigma = \frac{N}{F_{\Pi}} = \frac{M}{F_{\Pi}H}. \quad (1)$$

Чем меньше высота сечения пояса h_n , тем меньше будет разница между точным значением напряжений крайних волокон балки и напряжениями пояса, вычисленными по прибли-



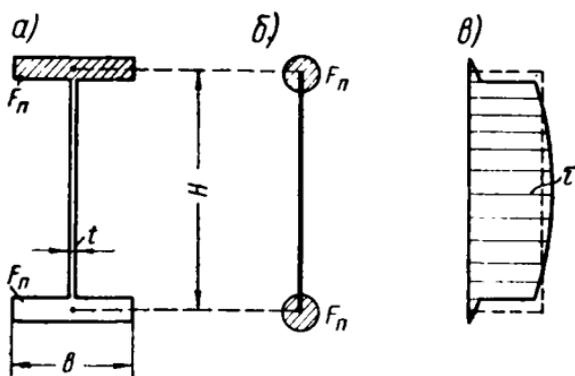
Фиг. 10.1. Распределение нормальных напряжений в балке двутаврового сечения при изгибе.



Фиг. 10.2. Напряжения в сечении тонкостенной балки.

женной формуле (1) без учета вертикальной стенки. Эта формула получается непосредственно из формулы (6) главы IX,

$\sigma = \frac{M}{W}$, если пренебречь влиянием вертикальной стенки. В этом



Фиг. 10.3. Распределение касательных напряжений в балке двутаврового сечения.

a — балка имеет мощные пояса и тонкую стенку; *б* — схема сечения двутаврового типа; *в* — эпюра касательных напряжений для двутавра.

случае сечение балки (фиг. 10.3, *a*) можно рассматривать состоящим только из двух поясов, у которых площадь сечения каждого пояса сосредоточена в его центре тяжести (фигура 10.3, *б*). Момент инерции такого сечения балки равен

$$J = 2F_n \left(\frac{H}{2} \right)^2 = \frac{F_n H^2}{2},$$

а момент сопротивления

$$W = \frac{J}{y_{\max}} = \frac{F_n H^2}{2} \frac{2}{H} = F_n H,$$

что и соответствует формуле (1).

Касательные напряжения в поперечном сечении балки, зависящие от поперечной силы, направлены вертикально и определяются по формуле (17) главы IX. В сечении поясов их величина незначительна вследствие большой ширины b , входящей в знаменатель формулы (17), и пояса воспринимают на себя небольшую долю поперечной силы. Так как на уровне соединения стенки с поясом ширина b резко уменьшается и становится равной толщине стенки, то касательные напряжения в стенке будут значительно больше. Они определяются по формуле

$$\tau = \frac{QS}{Jt}, \quad (2)$$

По высоте стенки τ меняется по квадратной параболе, как для прямоугольника. К нейтральному слою величина τ возрастает незначительно, потому что к площади сечения пояса добавляется лишь площадь сечения стенки, которая при тонкой стенке мало увеличит значение S . Эпюра τ по оси симметрии балки изображена на фиг. 10.3, в. Так как парабола получается очень пологой, параболический закон изменения τ можно заменить прямолинейным и считать τ распределенными равномерно по высоте стенки H , измеренной между центрами тяжести поясов. Умножая постоянное значение τ на площадь сечения стенки и принимая во внимание, что $\tau t = q$, получаем силу $\tau t H = qH$, которая равна поперечной силе в данном сечении, $qH = Q$. Отсюда находим погонное касательное усилие

$$q = \frac{Q}{H}, \quad (3)$$

и касательные напряжения в стенке

$$\tau = \frac{Q}{Ht}. \quad (3')$$

Этот результат получается также из формулы (22) главы IX:

$$q = \frac{Q}{J} S. \quad (4)$$

Здесь статический момент S явился результатом суммирования сил $\sigma \Delta F$, распределенных по части площади сечения, лежащей выше или ниже рассматриваемого уровня (гл. IX, § 8, фиг. 9.25 и 9.27). Если в тонкостенной балке нормальные напряжения стенки не принимаются во внимание (фиг. 10.2), то

статический момент для любого уровня и момент инерции сечения, входящие в формулу (4), нужно вычислять без учета площади стенки, т. е. как для сечения с сосредоточенными площадями поясов (фиг. 10.3,б), для которого $S = \frac{1}{2} H F_n$ и $J = \frac{1}{2} H^2 F_n$.

Учитывая эти значения, приходим к прежнему результату $q = \frac{Q}{H}$. Погонное касательное усилие имеет постоянную величину по высоте стенки. Формулы (1) и (3) более простые, чем соответствующие формулы, выведенные в главе IX. Они дают возможность быстро определить с достаточной точностью величины напряжений тонкостенной балки, в которой пояса работают главным образом на растяжение и сжатие от изгибающего момента, а стенка работает на сдвиг от поперечной силы.

Пример 1. Сравнить напряжения двутавровой сварной балки, изображенной на фиг. 9.38, вычисленные с учетом вертикальной стенки (пример 1, § 10 предыдущей главы), с напряжениями вычисленными по приближенным формулам.

По фиг. 9.38 находим площадь сечения пояса $F_n = 12 \cdot 1,2 = 14,4 \text{ см}^2$ и расстояние между их центрами тяжести $H = 25 + 1,2 = 26,2 \text{ см}$.

Нормальные напряжения в поясах по формуле (1)

$$\sigma = \frac{M}{F_n H} = \frac{576\,000}{14,4 \cdot 26,2} = 1526 \text{ кг/см}^2.$$

Касательные напряжения в стенке

$$\tau = \frac{Q}{Ht} = \frac{5400}{26,2 \cdot 0,6} = 344 \text{ кг/см}^2.$$

В примере 1, § 10 гл. IX, были найдены $\sigma = 1378 \text{ кг/см}^2$ и $\tau = 362 \text{ кг/см}^2$. Сравнительно большая разница между соответствующими напряжениями объясняется тем, что стенка не является достаточно тонкой по сравнению с высотой балки, а именно:

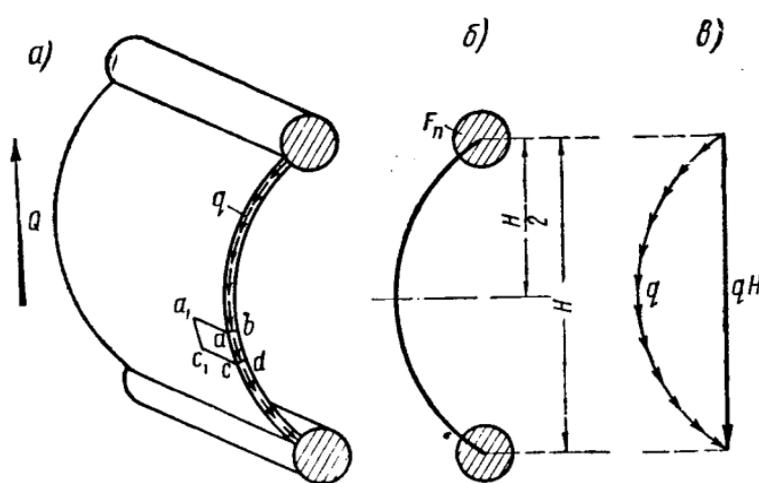
$$\frac{t}{H} = \frac{0,6}{26,2} = \frac{1}{44}.$$

Стенка тонкостенной балки при некотором значении нагрузки образует диагональные волны, и схема работы балки изменяется. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

§ 2. Балка с криволинейной стенкой

В авиационных конструкциях встречаются балки, составленные из поясов, соединенных криволинейной тонкой стенкой (фиг. 10.4). При действии на такую балку поперечной нагрузки в ее поперечных сечениях возникают нормальные напряжения σ от изгибающего момента, которые определяются по тем же формулам, что и в балке с прямолинейной стенкой, и касатель-

ные напряжения τ от поперечной силы. Направление последних всегда параллельно касательной к средней линии стенки в данном месте, независимо от того, как направлена поперечная сила. Это обусловлено законом парности касательных напряжений для площадок вблизи наружного края (фиг. 6.10) и малой толщиной стенки. Погонное касательное усилие $q = \tau t = \frac{Q}{J} S$, как и напряжения τ , направлено вдоль средней линии стенки (фиг. 10.4,а). Если, как и в балке с прямолинейной стенкой, пренебречь нормальными напряжениями стенки или считать, что



Фиг. 10.4. Балка с криволинейной тонкой стенкой.

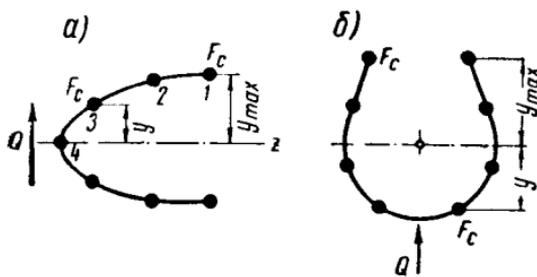
а — общий вид, буквой Q обозначена равнодействующая внешних сил, приложенных к отсеченной части балки*; б — схема сечения; в — цепочка касательных сил совпадает с очертанием стенки и создает равнодействующую qH .

вообще тонкая стенка не воспринимает нормальных напряжений, то величины J и S нужно вычислять без учета площади стенки и сечение рассматривать состоящим из сосредоточенных площадей поясов (фиг. 10.4,б). Примером стенки, не воспринимающей нормальных напряжений, или, как говорят, не работающей на нормальные напряжения, является гофр, у которого волны расположены перпендикулярно нейтральному слою. В таких случаях нормальные напряжения воспринимаются только поясами балки и определяются по формуле (1); касательные напряжения воспринимаются только стенкой, в которой они создают постоянное касательное усилие q , как было показано в предыдущем параграфе. По формуле (3) оно вычисляется также и в криволинейной стенке, $q = \frac{Q}{H}$, где H — попрежнему расстояние между центрами тяжести сечений поясов. Усилия q следуют очертанию стенки и образуют непрерывный поток. Откладывая их в масштабе, при котором q равняется единице длины средней линии стенки, по-

* Очевидно, что численно эта равнодействующая равна поперечной силе в рассматриваемом сечении. Подобное обозначение применяется иногда и в дальнейшем изложении.

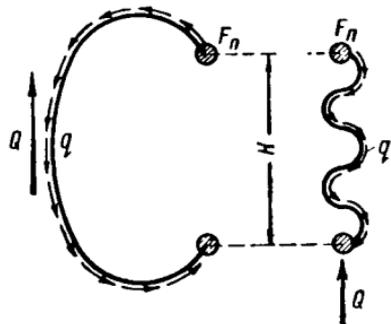
лучаем цепочку одинаковых сил, совпадающую с очертанием стенки (фиг. 10.4, б). В таком случае равнодействующая усилий q будет равна замыкающей прямой, проведенной от начала к концу цепочки и умноженной на величину q . Она даст поперечную силу $qH=Q$. Таким образом балка с криволинейной стенкой по величине напряжений эквивалентна балке с прямолинейной стенкой, имеющей такую же величину H . Усилие q и напряжение σ не зависят от очертания стенки. Их величина будет одинаковой для балки с любым очертанием стенки (фиг. 10.5), если центры тяжести сечений поясов расположены на одинаковом расстоянии H . Отсюда следует, что прямолинейная стенка является наиболее экономичной при работе на сдвиг от поперечной нагрузки.

Перейдем теперь к балке с тонкой стенкой, имеющей несколько поясов, площади поперечных сечений которых F_c сосредоточены в различных точках контура стенки (фиг. 10.6). К числу таких балок можно отнести, например, носок крыла самолета, обшивка которогокреплена стрингерами, часть фюзеляжа в месте выреза и т. д.



Фиг. 10.6. Схемы балок с несколькими поясами.

а — носок крыла; б — фюзеляж в месте выреза.



Фиг. 10.5. Криволинейные балки, эквивалентные по грузоподъемности.

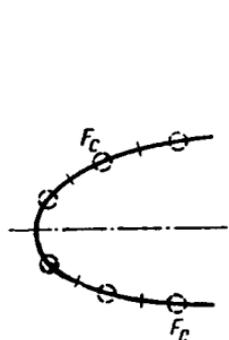
При изгибе такой балки напряжения и усилия в ней нельзя определять по приближенным формулам (1) и (3). В этом случае нужно применить общие формулы (6) и (22) главы IX. При этом момент инерции сечения относительно нейтральной оси вычисляется как сумма моментов инерции сосредоточенных площадей

$$J = \sum F_c y^2.$$

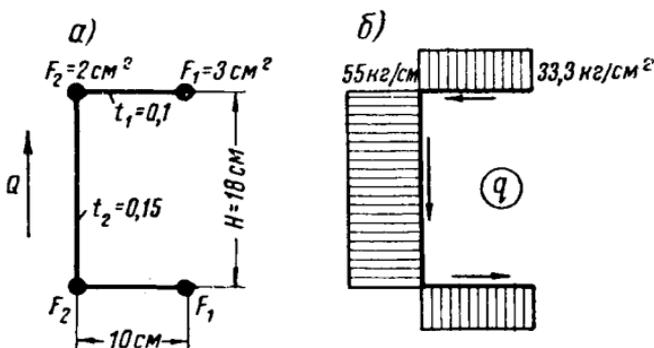
Для определения касательных усилий в каком-нибудь участке сечения нужно вычислить статический момент части сосредоточенных площадей, расположенных выше (или ниже) рассматриваемого участка. В пределах участка между сосредоточенными площадями усилия q имеют постоянное значение. Если балка не имеет поясов и состоит только из стенки (фиг. 10.7), то приближенно ее можно рассчитывать, разбив стенку в сечении на отдельные участки и сосредоточив их площади поперечных сечений по середине участков (пунктир на

фиг. 10.7). Результаты, получаемые по этому способу, тем точнее, чем мельче участки.

Пример 1. Определим нормальные и касательные напряжения в сечении тонкостенной балки, изображенном на фиг. 10.8, а, от изгибающего момента $M=1000 \text{ кгм}$ и поперечной силы $Q=1000 \text{ кг}$, действующих в вертикальной плоскости.



Фиг. 10.7. Криволинейная балка без поясов.



Фиг. 10.8. К вычислению напряжений в сечении тонкостенной балки.

а — размеры сечения; б — эпюра погонных касательных усилий.

Нейтральная ось проходит по середине высоты H . Пренебрегая площадью сечения стенки, находим момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси

$$J = 2(F_1 + F_2) \left(\frac{H}{2}\right)^2 = 2 \cdot 5 \cdot 9^2 = 810 \text{ см}^4.$$

Момент сопротивления $W = \frac{J}{y_{\max}} = \frac{810}{9} = 90 \text{ см}^3$. Нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{100000}{90} = 1111 \text{ кг/см}^2.$$

Касательные усилия в горизонтальных полках

$$q_1 = \frac{Q}{J} S_1 = \frac{1000}{810} \cdot 3 \cdot 9 = 33,3 \text{ кг/см},$$

в вертикальной стенке

$$q_2 = \frac{1000}{810} (3 \cdot 9 + 2 \cdot 9) = 55 \text{ кг/см}.$$

На фиг. 10.8, б изображена эпюра q . Соответствующие касательные напряжения равны

$$\tau_1 = \frac{q_1}{t_1} = \frac{33,3}{0,1} = 333 \text{ кг/см}^2; \quad \tau_2 = \frac{q_2}{t_2} = \frac{55}{0,15} = 370 \text{ кг/см}^2.$$

Задачи. 1. Подобрать площадь поперечного сечения поясов и толщину стенки балок, сечение которых изображено на фиг. 10.5, при допускаемых напряжениях $[\sigma]=1400 \text{ кг/см}^2$ и $[\tau]=700 \text{ кг/см}^2$, если наибольший изгибающий момент $M=3600 \text{ кгм}$ и поперечная сила $Q=5000 \text{ кг}$. Расстояние H принять равным 32 см . *Ответ:* $F_n=8,04 \text{ см}^2$; $t=0,22 \text{ см}$.

2. Носок крыла самолета имеет сечение, симметричное относительно горизонтальной оси z (фиг. 10.6,а). Площади сечений стрингеров одинаковы, $F_c=4 \text{ см}^2$, и расположены на расстояниях $y_1=14 \text{ см}$, $y_2=13 \text{ см}$, $y_3=8 \text{ см}$, $y_4=0$ от этой оси. Толщина обшивки $t=1,5 \text{ мм}$. Допускаемые напряжения материала $[\sigma]=1600 \text{ кг/см}^2$ и $[\tau]=800 \text{ кг/см}^2$. Определить наибольший изгибающий момент M и поперечную силу Q , которые может выдержать носок при изгибе в вертикальной плоскости, и построить эпюру q , пренебрегая влиянием стенки.

Ответ: $M=3920 \text{ кг/см}$; $Q=2940 \text{ кг}$.

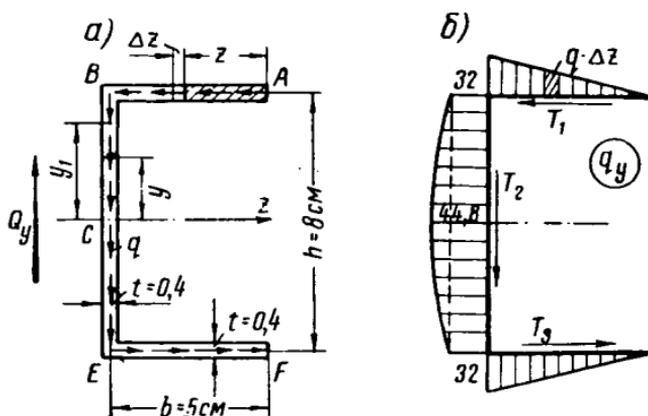
§ 3. Изгиб открытого профиля

Сечение тонкостенной балки с криволинейным или ломаным очертанием стенки при наличии и при отсутствии в ней поясов представляет собой так называемый открытый профиль (см. § 2 гл. VII, фиг. 7.4 и 7.5, а также фиг. 10.4—10.8). В предыдущем параграфе мы рассмотрели приближенный расчет на изгиб таких балок, пренебрегая работой стенки на нормальные напряжения. Если этим пренебречь нельзя, то нормальные напряжения при изгибе открытого профиля нужно определять по формулам (4) и (6) главы IX, вычисляя момент инерции сечения и его момент сопротивления с учетом площадей сечений стенок. В этом случае погонное касательное усилие q , как было установлено выше, направлено также вдоль средней линии стенки (фиг. 10.4,а), но оно на участках между сосредоточенными площадями будет переменным. Из формулы $q = \frac{Q}{J} S$ следует, что усилие q изменится по длине периметра контура по тому же закону, что и статический момент S , вычисленный относительно нейтральной оси. В свою очередь S зависит от площади части сечения, расположенной по одну сторону от точки, в которой определяется усилие q , до свободного края сечения. В эту площадь должна входить и площадь сечения стенки. При обходе по контуру позадилежащая площадь сечения стенки изменяется непрерывно, а следовательно, статический момент S и усилие q изменяются также непрерывно на участках между сосредоточенными площадями.

Эпюра погонных касательных усилий. Откладывая величины q в виде ординат перпендикулярно контуру сечения, получим эпюру погонных касательных усилий. При вычислении касательных усилий без учета стенки эпюра q со-

стоит из прямоугольников, расположенных между сосредоточенными площадями (фиг. 10.8). При учете стенки она имеет более сложный вид. Покажем построение эпюры q для некоторых видов тонкостенных открытых профилей. Условимся, как и ранее (гл. 7, § 3), откладывать ординаты эпюры в ту сторону, куда будет направлено усилие q , если его повернуть на 90° по ходу часовой стрелки.

Швеллер. Определить касательные усилия в открытом профиле в виде швеллера при действии поперечной силы $Q_y = 325$ кг, параллельной вертикальной стенке (фиг. 10.9,а). Прежде всего



Фиг. 10.9. Погонные касательные усилия для швеллера от вертикальной нагрузки.

а — направление касательных усилий q_y ; б — эпюра касательных усилий.

необходимо вычислить момент инерции сечений относительно центральной оси z :

$$J_z = 2 \cdot 5 \cdot 0,4 \cdot 4^2 + \frac{0,4 \cdot 8^3}{12} = 81 \text{ см}^4.$$

В формуле $q_y = \frac{Q_y}{J_z} S_z$ множитель $\frac{Q_y}{J_z} = \frac{325}{81} = 4 \text{ кг/см}^4$ является постоянным. Для определения касательного усилия в точке на расстоянии z от края верхней полки (фиг. 10.9,а) нужно статический момент заштрихованной площади относительно центральной оси $S_z = \frac{h}{2} tz$ умножить на величину $\frac{Q_y}{J_z}$,

т. е. $q_y = \frac{Q_y}{J_z} \frac{ht}{2} z$. Для заданных на фиг. 10.9 размеров имеем

$$q_y = 4 \frac{8 \cdot 0,4}{2} z = 6,4 z.$$

При переходе к другим точкам полки изменяется только величина z в первой степени; следовательно, q_y должно изменяться в пределах полки по прямой линии:

при $z=0$, $q_{yA}=0$; при $z=b=5$ см, $q_{yB}=6,4 \cdot 5=32$ кг/см. Откладывая эти величины в виде ординат перпендикулярно контуру, получаем эпюру касательных усилий в верхней полке (фиг. 10.9, б).

Переходим к определению касательных усилий в вертикальной стенке. Здесь к статическому моменту площади сечения полки, $S_n = \frac{h}{2} tb = \frac{8}{2} 0,4 \cdot 5 = 8$ см³, добавляется статический момент прямоугольной площади сечения стенки, расположенной выше уровня y , в котором определяется касательное усилие, $S_z = 8 + y_1 \left(\frac{h}{2} - y \right) t$. Добавочная часть статического момента изменяется по квадратной параболе, как было уже установлено ранее (фиг. 9.27). В пределах стенки швеллера получаем:

$$\text{при } y = \frac{h}{2},$$

$$S_z = 8 + \frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{2} \right) t = 8 \text{ см}^3; \quad q_{yB} = 4 \cdot 8 = 32 \text{ кг/см};$$

$$\text{при } y = 0,$$

$$S_z = 8 + \frac{h}{4} \frac{h}{2} t = 8 + 2 \cdot 4 \cdot 0,4 = 11,2 \text{ см}^3; \quad q_{yC} = 4 \cdot 11,2 = 44,8 \text{ кг/см};$$

$$\text{при } y = -\frac{h}{2},$$

$$S_z = 8 + 0 = 8 \text{ см}^3; \quad q_{yE} = 4 \cdot 8 = 32 \text{ кг/см}.$$

Эпюра q_y на этом участке контура состоит из прямоугольника, выражающего влияние полки, и добавочной параболы, выражающей влияние стенки (фиг. 10.9, б). Наибольшей величины усилие q_y достигает на уровне нейтрального слоя, для которого нужно подсчитать статический момент площади половины сечения. В точках, расположенных симметрично относительно нейтральной оси, касательные усилия одинаковы и эпюра q_y получается симметричной.

При изгибе балки в горизонтальной плоскости усилия q_z от поперечной силы $Q_z = 325$ кг (фиг. 10.10, а) направлены попеременно вдоль средних линий стенок, но распределение усилий и, следовательно, их эпюра будут иные. В этом случае нужно определить сначала центр тяжести сечения

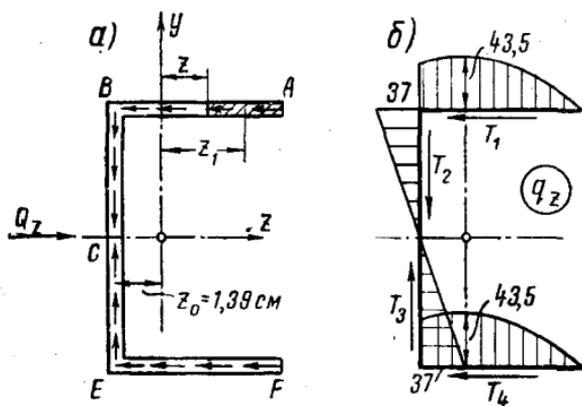
$$z_0 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 0,4 \cdot 2,5}{2 \cdot 5 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,4} = \frac{10}{7,2} = 1,39 \text{ см}$$

и затем момент инерции относительно центральной оси

$$J_y = 2 \left[\frac{0,4 \cdot 5^3}{12} + (2,5 - 1,39)^2 \cdot 5 \cdot 0,4 \right] + 1,39^2 \cdot 8 \cdot 0,4 = 19,4 \text{ см}^4.$$

Постоянный множитель равен $\frac{Q_z}{J_y} = \frac{325}{19,4} = 16,7 \text{ кг/см}^4$. Построение эпюры q_z начинаем от края A , вычисляя статический момент относительно центральной оси y . На участке AB он изменяется по квадратной параболе, потому что с изменением заштрихованной площади изменяется и расстояние z_1 ее центра тяжести до нейтральной оси y :

при $z = 5 - 1,39 = 3,61 \text{ см}$,
 $S_y = 0$; $q_{zA} = 0$;
 при $z = 0$,
 $S_y = \frac{3,61}{2} \cdot 3,61 \cdot 0,4 = 2,6 \text{ см}^3$; $q_{z \max} = 16,7 \cdot 2,6 = 43,5 \text{ кг/см}$;
 при $z = -1,39 \text{ см}$,
 $S_y = 2,6 - \frac{1,39}{2} \cdot 1,39 \cdot 0,4 = 2,21 \text{ см}^3$; $q_{zB} = 16,7 \cdot 2,21 = 37 \text{ кг/см}$.



Фиг. 10.10. Касательные усилия для швеллера от горизонтальной нагрузки.

a — направление усилий q_z в сечении; b — эпюра q_z .

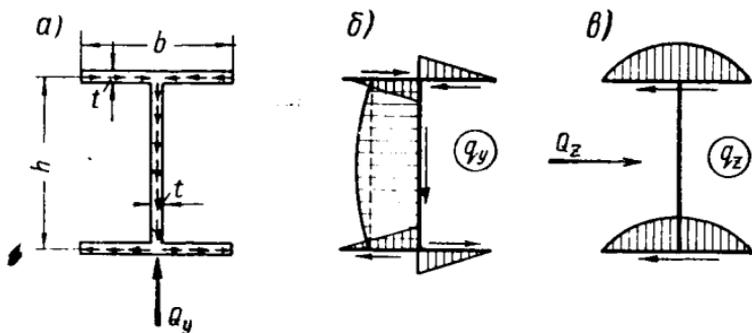
На участках BC и CE величины S_y и q_z изменяются по наклонной прямой, потому что с изменением заштрихованной площади расстояние ее центра тяжести остается неизменным и равно $z = -1,39 \text{ см}$.

В точке B ,
 $S_y = 2,21 \text{ см}^3$; $q_{zB} = 37 \text{ кг/см}$;
 в точке C ,
 $S_y = 2,21 - 1,39 \cdot 4 \cdot 0,4 = 0$; $q_{zC} = 0$;
 в точке E ,
 $S_y = 0 - 1,39 \cdot 4 \cdot 0,4 = -2,21 \text{ см}^3$; $q_{zE} = -37 \text{ кг/см}$.

На участке BC усилия q_z направлены вниз, а на участке CE у них изменился знак на обратный и они направлены вверх. Как

мы условились (гл. VII, § 3), усилия q , действующие в направлении обхода сечения против часовой стрелки, считаются положительными, а действующие по часовой стрелке — отрицательными. На фиг. 10. 10,б изображена эпюра q_z от горизонтальной силы Q_z .

На малый участок Δz по длине контура (фиг. 10. 9,б) приходится малая сила $q\Delta z$, равная элементарной площади эпюры q . На всю длину полки приходится касательная сила $T = \sum q\Delta z$, равная площади всей эпюры, построенной для этой полки. Аналогично площадь эпюры, построенной на стенке, равна касательной силе, приходящейся на эту стенку, и т. д. Силы T являются равнодействующими касательных усилий q и приложены вдоль средних линий соответствующих стенок.



Фиг. 10. 11. Распределение касательных усилий в двутавре.

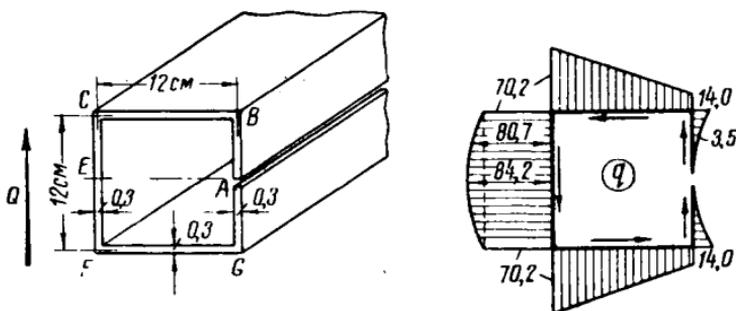
a — направление усилий, возникающих от вертикальной нагрузки; *б* — эпюра q_y от нагрузки вдоль стенки (вертикальной); *в* — эпюра q_z от нагрузки вдоль полки.

Двутавровое сечение. Если два швеллера соединить стенками, то образуется сечение в виде двутавра (фиг. 10. 11). От равнодействующей внешней нагрузки Q_y , направленной вверх, уравновешивающие ее касательные усилия q_y в стенке будут направлены вниз. В верхних полках двутавра они должны быть направлены навстречу друг к другу, к стенке, чтобы стрелки, указывающие их направление, при переходе на вертикальную стенку могли образовать общий поток, в который как бы «вливаются» касательные усилия верхних полки. Этот общий поток затем как бы «разливается» в обе стороны на нижние полки (фиг. 10. 11,а). Эпюра q_y в полках очерчивается по прямой, потому что S изменяется в зависимости от расстояния z в первой степени. Ординаты эпюры откладываются в правой половине двутавра снаружи контура, а в левой внутрь контура, если повернуть все усилия q_y на 90° по часовой стрелке. В данном случае изгиб происходит в плоскости симметрии балки и погонные касательные усилия расположены симметрично (фиг. 10. 11,б).

От внешней нагрузки Q_z , направленной горизонтально, касательные усилия q_z в полках изменяются по квадратной параболе

(фиг. 10.11,в). Наибольшей величины они достигают на уровне нейтрального слоя, т. е. на уровне центра тяжести сечения. В стенке усилия q_z отсутствуют, потому что при переходе от полки к стенке позадилежащая (заштрихованная) площадь равна площади всей полки, статический момент которой относительно центральной оси y равен нулю. В обеих полках усилия q_z направлены в одну сторону, противоположно направлению силы Q_z , которую они уравнивают.

Пример 1. Построить эпюру погонных касательных усилий изгиба для тонкостенного открытого профиля в виде квадратной трубы с продольным разрезом. Поперечная сила $Q=900$ кг. Размеры профиля приведены на фиг. 10.12.



Фиг. 10.12. Эпюра q для сечения квадратной трубы с продольным разрезом.

Момент инерции сечения относительно нейтральной оси z

$$J = \frac{0,3 \cdot 12^3}{12} + 2 \cdot 0,3 \cdot 12 \cdot 6^2 + 2 \frac{0,3 \cdot 6^3}{3} = 345,6 \text{ см}^4.$$

Следовательно, $\frac{Q}{J} = \frac{900}{345,6} = 2,6 \text{ кг/см}^4$.

Подсчет статического момента начнем от края сечения, т. е. от точки А. На уровне y нужно площадь yt умножить на расстояние ее центра тяжести $\frac{y}{2}$ до нейтральной оси, $S = yt \frac{y}{2}$. Здесь площадь и расстояние центра тяжести зависят от y , следовательно, на участке АВ

$$q = \frac{Q}{J} S = \frac{Q}{J} \frac{y^2 t}{2} = 2,6 \frac{0,3}{2} y^2,$$

касательное усилие изменяется по квадратной параболе:

при $y=0$, $q_A=0$;

при $y=3 \text{ см}$, $q = 2,6 \frac{0,3}{2} 9 = 3,5 \text{ кг/см}$;

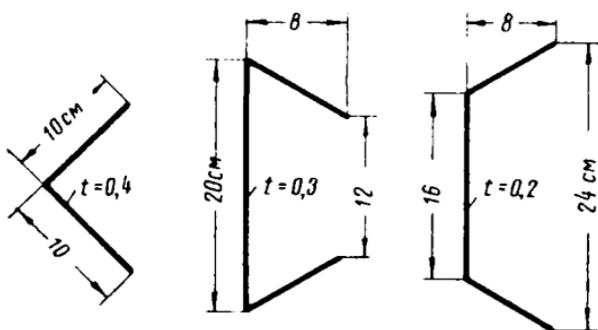
при $y=6 \text{ см}$, $q_B = 2,6 \frac{0,3}{2} 36 = 14,0 \text{ кг/см}$.

На участке BC изменяется только площадь сечения пропорционально расстоянию z , а ордината центра тяжести остается неизменной. Здесь усилие q изменяется по прямой от $q_B = 14,0 \text{ кг/см}$ до $q_C = 14,0 + 2,6 \cdot 0,3 \cdot 12 \cdot 6 = 70,2 \text{ кг/см}$. На участке CE изменение q снова происходит по параболе. Она начинается от $q_C = 70,2 \text{ кг/см}$;

$$\text{при } y = 3 \text{ см, } q = 70,2 + 2,6 \cdot 0,3 \cdot 3 \cdot 4,5 = 80,7 \text{ кг/см};$$

$$\text{при } y = 0, \quad q_E = 70,2 + 2,6 \cdot 0,3 \cdot 6 \cdot 3 = 84,2 \text{ кг/см}.$$

По стенке CF усилие q направлено вниз, чтобы уравновесить поперечную силу, а во всех остальных участках оно должно образовать непрерывный поток, следовательно, на участках AB и CA усилие q будет направлено вверх. Вычисленные ординаты



Фиг. 10.13. Примеры тонкостенных открытых профилей для построения эпюр погонных касательных усилий.

позволяют построить эпюру, которая получается симметричной относительно горизонтальной оси симметрии (фиг. 10.12). Наибольшие касательные напряжения возникают на уровне нейтрального слоя, а именно в точке E :

$$\tau_E = \frac{q_E}{t} = \frac{84,2}{0,3} = 282 \text{ кг/см}^2.$$

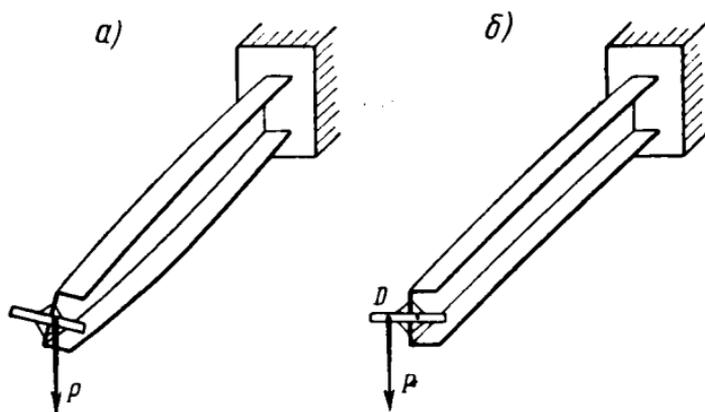
Задачи. 1. Вычислить ординаты эпюры q и определить q_{\max} в сечении балки, изображенной на фиг. 10.11, от поперечной силы $Q_y = 800 \text{ кг}$, если высота двутавра $h = 20,3 \text{ см}$, ширина полков $b = 16 \text{ см}$ и толщина стенок $t = 0,3 \text{ см}$. *Ответ:* $q_{\max} = 45,5 \text{ кг/см}$.

2. Построить эпюры q для сечений, изображенных на фиг. 10.13, от вертикальной силы $Q_y = 500 \text{ кг}$.

§ 4. Центр изгиба

Кручение при изгибе. При изгибе балок предполагалось, что внешние силы лежат в одной из главных плоскостей балки, совпадающей с плоскостью симметрии. В этом случае

происходит только изгиб балки в плоскости нагрузки. Несколько иначе происходит изгиб балок, у которых хотя бы одна главная плоскость, проходя через ось балки, не является плоскостью симметрии. Когда нагрузка лежит в этой плоскости, то одновременно с изгибом таких балок наблюдается еще и закручивание их, несмотря на то что нагрузка проходит через центр тяжести сечения. Явление кручения при изгибе силами, расположенными в главной плоскости, особенно заметным бывает в тонкостенных открытых профилях. Например, если взять тонкостенный швеллер, то от силы, приложенной в центре тяжести сечения параллельно вертикальной стенке (т. е. в главной пло-



Фиг. 10.14. Центр изгиба.

а — закручивание швеллера от силы, приложенной в центре тяжести сечения; *б* — швеллер не закручивается, если изгибающая сила проходит через центр изгиба.

кости, перпендикулярной плоскости симметрии), профиль обязательно будет закручиваться (фиг. 10.14,*а*). Такую деформацию можно наблюдать даже при незначительных нагрузках.

Рассмотрим следующий небольшой опыт. Прикрепим на свободном конце балки, имеющей сечение в виде швеллера, горизонтальную планку (фиг. 10.14) и будем подвешивать груз в различных точках этой планки. Подвешивая его правее центра тяжести, увидим, что балка будет закручиваться еще сильнее. Наоборот, передвигая груз по планке влево, найдем такое его положение, при котором балка не будет закручиваться и планка останется горизонтальной (фиг. 10.14,*б*). Точка сечения *D*, через которую должна проходить плоскость нагрузки, чтобы балка при изгибе не закручивалась, называется центром изгиба. Хотя обычно при определении напряжений изгиба и нет особой необходимости пользоваться центром изгиба, однако, знать, где он находится, во многих случаях необходимо. Если требуется нагрузить балку с поперечным сечением в виде швеллера так, чтобы она не закручивалась, то нагрузка должна быть

приложена в центре изгиба, который находится вне сечения (фиг. 10.14,б). При действии нагрузки в плоскости вертикальной стенки или в плоскости, проходящей через центр тяжести сечений, в балке возникают, помимо касательных напряжений изгиба, дополнительные напряжения кручения. Последние определяются по формулам, приведенным в гл. VII § 2, для чего необходимо предварительно знать крутящий момент, создаваемый поперечной нагрузкой относительно оси, проходящей через центр изгиба.

В открытом профиле касательные напряжения кручения по толщине стенки распределяются по закону треугольника (фиг. 7.5). Их равнодействующая по средней линии равна нулю, и они не создают погонного касательного усилия q . Если к изгибу открытого профиля добавить кручение, например, от силы, не проходящей через центр изгиба, то к равномерным по толщине напряжениям изгиба $\tau_{из} = \frac{q}{t}$ (фиг. 10.9) нужно добавить неравномерные по толщине напряжения кручения $\tau_{кр}$ (фиг. 7.5). Вследствие этого нарушится равномерность распределения касательных напряжений $\tau_{кас}$: в одной половине по толщине стенки они увеличатся, а в другой уменьшатся на одну и ту же величину $\tau_{кр}$. Но погонное касательное усилие q от этого несколько не изменится, и эпюра q останется прежней, будет ли плоскость изгибающей нагрузки проходить через центр изгиба или нет. Для балки же это далеко не безразлично, потому что при несовпадении нагрузки с центром изгиба, вследствие малой жесткости на кручение тонкостенной балки, появляются значительные деформации: угол закручивания и депланация сечения (см. гл. VII, § 4). Кроме того, при наличии препятствий к свободной депланации, например, в случае защемления одного из сечений появляются дополнительные нормальные напряжения и сопутствующие им касательные. Кручение бруса при наличии препятствий к свободной депланации называется стесненным кручением¹. Если желательно не осложнять изгиб стержня кручением и не вызывать больших деформаций, следует нагрузку располагать в плоскости, проходящей через центры изгиба сечений. Попутно заметим, что сечение депланирует и при поперечном изгибе. При наличии препятствий к депланации от изгиба также возникают добавочные нормальные и касательные напряжения. В этом случае говорят о «стесненном изгибе». Обычно теория изгиба строится в предположении, что сечение остается плоским и после деформации.

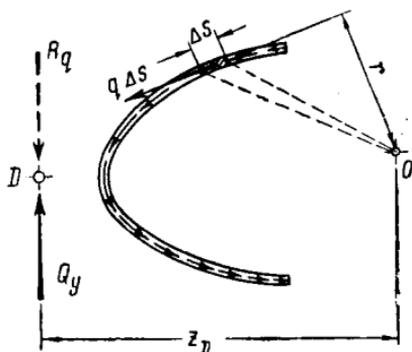
Момент касательных усилий изгиба. Для определения положения центра изгиба нужно уметь вычислить мо-

¹ Теория стесненного кручения тонкостенных конструкций подробно разработана в трудах советских авторов: В. З. Власов, Упругие тонкостенные стержни, Москва, 1940. А. А. Уманский, Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций, Москва, 1939.

мент, создаваемый касательными усилиями относительно произвольной точки, расположенной в плоскости сечения. Возьмем тонкостенный профиль, в котором возникают касательные усилия q , например, от вертикальной силы Q_y (фиг. 10.15). Момент касательной силы $q\Delta s$, приходящейся на малый элемент длины контура, относительно какой-либо точки O равен

$$\Delta M_q = q\Delta s r,$$

где r — перпендикуляр, опущенный из точки O на направление касательной к контуру в данном элементе сечения. Чтобы получить момент касательных усилий всего профиля, нужно сложить все элементарные моменты, распространяя сумму на все сечение:



Фиг. 10.15. Центр изгиба тонкостенного профиля с переменным значением погонных касательных усилий.

$$M_q = \sum q r \Delta s. \quad (5)$$

В тех случаях когда балка состоит из прямолинейных стенок, как, например, балки, сечения которых изображены на фигурах 10.8—10.13, удобнее предварительно вычислить для каждого прямолинейного участка сечения равнодействующие силы $T = \sum q \Delta s$. Они равны площади эпюры q , построенной на участке данной прямой стенки (фиг. 10.9,б). Затем, умножив каждую силу T на соответствующие им плечи r до рассматриваемого полюса O , получим момент касательных усилий

$$M_q = T_1 r_1 + T_2 r_2 + T_3 r_3 + \dots = \sum T r. \quad (6)$$

Например, в профиле в виде швеллера (фиг. 10.9,а) касательные силы будут:

$$T_1 = \frac{32 \cdot 5}{2} = 80 \text{ кг}; \quad T_2 = 32 \cdot 8 + \frac{2}{3} (44,8 - 32) 8 = 325 \text{ кг};$$

$$T_3 = \frac{32 \cdot 5}{2} = 80 \text{ кг}.$$

Момент касательных усилий относительно центра тяжести сечения равен

$$M_q = \sum T r = 80 \cdot 4 + 325 \cdot 1,39 + 80 \cdot 4 = 1092 \text{ кгсм}.$$

Если взять какую-либо точку правее вертикали, проходящей через центр тяжести, то момент относительно нее будет больше,

а относительно любой точки на вертикальной стенке он будет меньше, чем относительно центра тяжести.

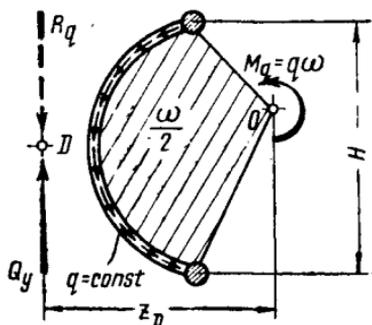
В тех случаях когда касательное усилие q имеет постоянную величину во всех точках контура, как, например, в случае открытого профиля в виде двухпоясной балки с криволинейной стенкой (фиг. 10.4), в формуле (5) величину q можно вынести за знак суммы. Оставшаяся сумма $\sum r \Delta s = \omega$ представляет собой удвоенную площадь, ограниченную средней линией стенки и прямыми, соединяющими полюс O с концами стенки (фиг. 10.16), как это было установлено в главе VII (фиг. 7.8). Момент постоянных касательных усилий равен

$$M_q = q\omega. \quad (7)$$

Положение центра изгиба D . Выбирая полюс O в различных местах сечения, будем получать относительно него большую или меньшую величину момента M_q . Но относительно точки D (фиг. 10.15), через которую проходит равнодействующая R_q всех касательных усилий q , возникающих в сечении, момент от них M_q всегда будет равен нулю. Если плоскость действия внешней нагрузки не проходит через эту точку, то внутренние силы q от изгиба не будут находиться в равновесии с внешней нагрузкой. В этом случае нагрузка создает крутящий момент относительно продольной оси балки, проходящей через точки D всех сечений, и вызывает кручение балки. Чтобы балка не закручивалась при изгибе, необходимо нагрузку приложить в плоскости, проходящей через точку D (фиг. 10.15). Точка D , через которую проходит равнодействующая внутренних касательных усилий изгиба, является центром изгиба сечения.

Из условия равновесия между внутренними и внешними силами равнодействующая R_q внутренних касательных усилий изгиба, возникающих в сечении, должна быть равна и противоположна равнодействующей внешних сил Q_y в данном сечении, $R_q = Q_y$. Положение равнодействующей R_q , а следовательно, и положение центра изгиба D найдем из другого условия равновесия, а именно: сумма моментов внутренних касательных усилий M_q и момент силы Q_y , проходящей через центр изгиба, относительно любой точки сечения, расположенной на расстоянии z_D по перпендикуляру к силе Q_y (фиг. 10.15), должны равняться нулю. Составим это уравнение: $M_q - Q_y \cdot z_D = 0$. Отсюда находим расстояние от центра изгиба до произвольно выбранного полюса O , относительно которого вычислен момент M_q ,

$$z_D = \frac{M_q}{Q_y}. \quad (8)$$



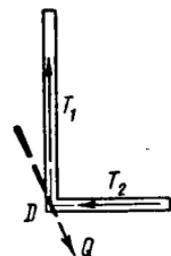
Фиг. 10.16. Центр изгиба двухпоясной балки с криволинейной стенкой.

Обращаем внимание, что здесь момент M_q вычисляется от касательных усилий, вызванных поперечной нагрузкой Q_y , и z_D измеряется по перпендикуляру к ней, т. е. к плоскости нагрузки.

В случае двухпоясной балки (фиг. 10.16) с постоянным значением $q = \frac{Q_y}{H}$ расстояние до центра изгиба находим, подставляя в полученную формулу значение M_q по формуле (7),

$$z_D = \frac{q\omega}{Q_y} = \frac{Q_y}{H} \frac{\omega}{Q_y} = \frac{\omega}{H}. \quad (9)$$

Формула (9) справедлива только для двухпоясной балки с постоянным значением q . Для всех остальных балок нужно применять общую формулу (8). Центр изгиба часто легко установить без вычислений, как точку, через которую проходит равнодействующая касательных усилий q . Например, в двутавре (фиг. 10.11) центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения вследствие симметрии распределения усилий q . Вообще центр изгиба всегда лежит на оси симметрии, а в сечениях с двумя осями симметрии он находится на пересечении этих осей, совпадая в этом случае с центром тяжести. Угольник (фиг. 10.17) имеет центр изгиба в угловой точке D , потому что при любом расположении нагрузки (вертикально или горизонтально) касательные усилия q создают только две силы T_1 и T_2 , которые всегда пересекаются в угловой точке; следовательно, через эту точку проходит и общая равнодействующая сил T . Чтобы угольник не закручивался при изгибе, плоскость нагрузки тоже должна проходить через угловую точку.



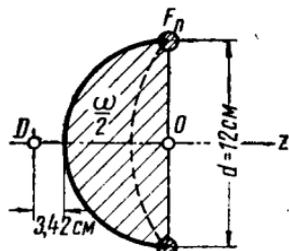
Фиг. 10.17. Центр изгиба угольника.

Угольник (фиг. 10.17) имеет центр изгиба в угловой точке D , потому что при любом расположении нагрузки (вертикально или горизонтально) касательные усилия q создают только две силы T_1 и T_2 , которые всегда пересекаются в угловой точке; следовательно, через эту точку проходит и общая равнодействующая сил T . Чтобы угольник не закручивался при изгибе, плоскость нагрузки тоже должна проходить через угловую точку.

Пример 1. Определить центр изгиба сечения балки с тонкой стенкой, очерченной по дуге полуокружности диаметром $d = 12$ см, имеющей два пояса с площадью сечения F_{II} (фиг. 10.18). Работу стенки на нормальные напряжения не учитывать.

Горизонтальная ось z является осью симметрии, следовательно, центр изгиба лежит на этой оси. Так как усилие q постоянно по длине стенки, то следует воспользоваться формулой (9). Возьмем полюс O , например, в центре окружности и соединим его с краями стенки, т. е. с поясами. Удвоенная площадь, ограниченная диаметром и полуокружностью, будет $\omega = 2 \frac{\pi d^2}{4 \cdot 2} = \frac{\pi d^2}{4}$. Принимая во внимание, что высота балки $H = d$, по формуле (9) получаем расстояние от центра изгиба до центра O :

$$z_D = \frac{\omega}{H} = \frac{\pi d^2}{4d} = \frac{\pi d}{4} = \frac{3,14 \cdot 12}{4} = 9,42 \text{ см.}$$



Фиг. 10.18. К примеру вычисления центра изгиба.

Центр изгиба находится на расстоянии $9,42 - 6 = 3,42$ см от стенки. Если стенку сделать более пологой (пунктир на фиг. 10. 18), то при той же высоте H удвоенная площадь ω уменьшится и центр изгиба будет лежать ближе к стенке. В частном случае прямолинейной стенки он совпадает с ней (фиг. 10. 3,б).

Пример 2. Вывести формулу для определения центра изгиба швеллера в зависимости от его размеров h , b и t (фиг. 10. 19).

Центр изгиба лежит на горизонтальной оси симметрии. Для его определения удобно момент M_q касательных усилий, вызванных вертикальной силой Q , вычислить относительно одной из угловых точек, например, относительно точки C . Тогда касательные силы T_2 и T_3 не войдут в выражение момента M_q и он будет зависеть только от силы T_1 , которая равна площади эпюры q , построенной для верхней полки AB швеллера (фиг. 10. 9,б). Угловая ордината этой эпюры равна

$$q_B = \frac{Q}{J_z} bt \frac{h}{2}.$$

Затем находим

$$T_1 = \frac{q_B b}{2} = \frac{b^2 h}{4} t \frac{Q}{J_z}$$

и вычисляем относительно точки C величину

$$M_q = T_1 h = \frac{b^2 h^2}{4} t \frac{Q}{J_z}.$$

Подставляя найденную величину M_q в формулу (8), получаем

$$z_D = \frac{M_q}{Q} = \frac{b^2 h^2 t}{4 J_z}.$$

Момент инерции швеллера относительно оси симметрии:

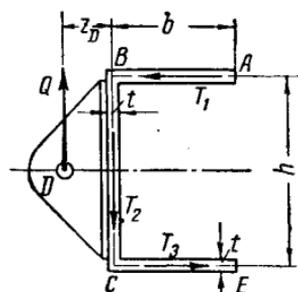
$$J_z = 2bt \frac{h^2}{4} + \frac{th^3}{12} = \frac{th^2}{4} \left(2b + \frac{h}{3} \right).$$

После подстановки и сокращения искомая формула имеет вид

$$z_D = \frac{b^2}{2b + \frac{h}{3}} = \frac{b}{2 + \frac{h}{3b}}.$$

В частном случае для размеров, указанных на фиг. 10. 9,а, расстояние центра изгиба от вертикальной стенки равно

$$z_D = \frac{5}{2 + \frac{8}{15}} = 1,97 \text{ см.}$$



Фиг. 10. 19. К выводу формулы для определения центра изгиба швеллера с постоянной толщиной стенок.

На основании изложенного нетрудно видеть, что *положение центра изгиба не зависит от поперечной силы Q* . Его координаты относятся к числу геометрических характеристик сечения и зависят только от формы и размеров последнего.

Задачи. 1. Определить положение центра изгиба сечения, изображенного на фиг. 10. 12. *Ответ:* $z_D = 7,4$ см от стенки CF .

2. Найти расстояние центра изгиба до вертикальной стенки сечения, изображенного на фиг. 10. 8, сначала без учета площади сечения стенок, используя построенную эпюру q , а затем с учетом этой площади. *Ответ:* 1. $z_D = 6$ см; 2. $z_D = 5,43$ см.

§ 5. Изгиб замкнутых профилей

Нормальные напряжения. При изучении деформации кручения было принято допущение о том, что форма контура тонкостенных профилей остается все время неизменной; это обеспечивается постановкой достаточно часто расположенных поперечных диафрагм (гл. VII, § 4). Принятое допущение в полной мере справедливо и для деформации изгиба. При кручении поперечные сечения поворачиваются относительно оси бруса и, вообще говоря, получают иногда значительную деформацию, переставая быть плоскими после деформации. Изгиб же замкнутых и открытых профилей в главной центральной плоскости нагрузкой, проходящей через центр изгиба, характеризуется лишь поворотом поперечных сечений около центральной оси, перпендикулярной главной плоскости. Как было упомянуто выше, при изгибе сечения считаются плоскими и после деформации.

Ввиду того что деформация изгиба тонкостенных профилей не отличается от соответствующей деформации балок сплошного сечения, то и распределение нормальных напряжений у них должно быть одинаковым. Если изгиб происходит в одной из главных центральных плоскостей балки, то нормальные напряжения определяются по формуле

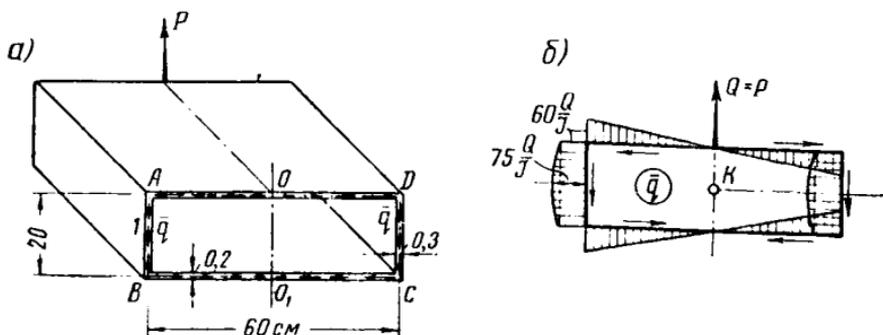
$$\sigma = \frac{M}{J} y.$$

Здесь J — момент инерции относительно нейтральной оси, проходящей через центр тяжести сечения; M — изгибающий момент и y — расстояние от нейтральной оси до рассматриваемой точки сечения.

Касательные напряжения. В замкнутых тонкостенных профилях распределение касательных напряжений или касательных усилий, которые в отличие от усилий q открытого профиля будем теперь обозначать \bar{q} , связано с формой контура сечения и с положением центра изгиба. В симметричном сечении распределение \bar{q} будет симметричным при изгибе в плоскости симметрии. Например, при изгибе бруса в виде прямоугольной коробки сосредоточенной силой P (фиг. 10. 20,а) совершенно очевидно, что в вертикальных стенках произвольного сечения усилия \bar{q} будут одинаковыми по величине и по направлению. Если усилие q в вертикальных стенках направлено вниз, то в нижней горизонтальной стенке оно будет направлено от краев к середине, а в верхней, наоборот, от середины к краям; на вертикальной оси симметрии в точках O и O_1 усилие $q = 0$. Эпюра q замкнутого профиля изображена на фиг. 10. 20,б.

Данный профиль можно разрезать на две одинаковые части по вертикальной плоскости симметрии. Каждая половина получается в виде швел-

лера. Нагрузка, лежащая в плоскости симметрии, распределится поровну на обе половины, и они будут изгибаться совершенно одинаково. Распределение нормальных и касательных напряжений по сечению каждого швеллера совпадает с распределением напряжений на половине замкнутого прямоугольника. Вследствие симметрии распределения усилий по замкнутому сечению их равнодействующая проходит по оси симметрии, и центр изгиба (будем

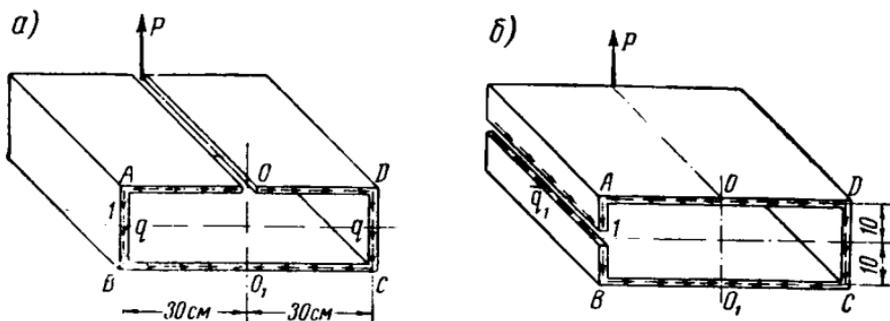


Фиг. 10.20. Изгиб замкнутого профиля.

a — направление погонных касательных усилий в симметричном прямоугольном сечении от симметрично приложенной нагрузки;
б — эпюра \bar{q} .

его обозначать в замкнутом профиле буквой *K*) обязательно лежит на этой оси (фиг. 10.20, *б*). В сечении с двумя осями симметрии центр *K* лежит на пересечении этих осей и совпадает с центром тяжести.

Так как заранее известно, что усилие \bar{q} в данном профиле (фиг. 10.20, *a*) равно нулю в точке *O* на оси симметрии, то этот профиль можно рас-



Фиг. 10.21. Открытый профиль, полученный из замкнутого.

a — разрез сделан через точку с нулевым значением \bar{q} ; *б* — профиль разрезан через точку со значением \bar{q}_1 , отличным от нуля.

смаивать как открытый, полученный путем продольного разреза стенки через точку *O* на всю длину бруса (фиг. 10.21, *a*). Величину \bar{q} замкнутого профиля в таком случае можно вычислить по формуле (4), $q = \frac{Q}{J} S$, справедливой для открытого профиля, если это вычисление начинать от точ-

ки O с нулевым значением \bar{q} . Пользуясь этим обстоятельством, при заданных размерах находим для точки A

$$\bar{q}_A = \frac{Q}{J} 0,2 \cdot 30 \cdot 10 = 60 \frac{Q}{J}.$$

Здесь взят статический момент площади сечения стенки на участке от O до A . Добавляя статический момент площади от A до I , на нейтральной оси находим

$$\bar{q}_1 = (60 + 0,3 \cdot 10 \cdot 5) \frac{Q}{J} = 75 \frac{Q}{J}.$$

Для точки B имеем $\bar{q}_B = \bar{q}_A$, потому что добавочный статический момент площади участка AB относительно нейтральной оси равен нулю и т. д. \blacklozenge

Не всегда можно заранее определить, в каком месте замкнутого контура касательное усилие равно нулю, особенно если сечение не имеет оси симметрии. В таком случае, делая разрез замкнутого контура, в каком-нибудь месте, например, через точку I (фиг. 10. 21, б), обнаруживаем в этом разрезе усилие \bar{q}_1 , которое нужно добавлять к касательному усилию, вычисленному по формуле (4). Таким образом в общем случае формула касательных усилий замкнутого профиля принимает вид

$$\bar{q} = \bar{q}_1 + \frac{Q}{J} S = \bar{q}_1 + q. \quad (10)$$

Здесь \bar{q}_1 представляет собой погонное касательное усилие в той точке контура, от которой начинается вычисление статического момента площади сечения. В частных случаях оно может быть равно нулю, положим, если начать от точек O или O_1 , расположенных на оси симметрии. Касательное усилие открытого профиля $q = \frac{Q}{J} S$ является переменным и зависит от изменения статического момента S . Зная начальное усилие \bar{q}_1 , легко найти усилие любой точки замкнутого профиля, для чего достаточно к переменному усилию q везде добавить постоянную величину \bar{q}_1 . Например, в точке B (фиг. 10. 21, б), начиная от точки I , при $\bar{q}_1 = 75 \frac{Q}{J}$, по формуле (10) имеем

$$\bar{q}_B = 75 \frac{Q}{J} + 0,3 \cdot 10 (-5) \frac{Q}{J} = 60 \frac{Q}{J}.$$

Здесь на участке от точки I до точки B добавляется отрицательный статический момент. Точно так же для точки O_1

$$\bar{q}_0 = 75 \frac{Q}{J} - (0,3 \cdot 10 \cdot 5 + 0,2 \cdot 30 \cdot 10) \frac{Q}{J} = 0;$$

для точки C

$$\bar{q}_C = 75 \frac{Q}{J} - (0,3 \cdot 10 \cdot 5 + 0,2 \cdot 60 \cdot 10) \frac{Q}{J} = -60 \frac{Q}{J}$$

и т. д. Знак минус указывает, что в правой половине сечения усилие \bar{q} имеет направление, противоположное направлению \bar{q} левой половины. В левой половине касательные усилия вращают сечение против часовой стрелки, а в правой — по часовой стрелке. Здесь, так же как и при кручении (гл. VII, § 3), считается положительным усилие \bar{q} , вращающее сечение против часовой стрелки.

Уравнение замкнутости. В общем случае невозможно заранее предугадать, в какой точке замкнутого контура усилие q равно нулю, или определить его хотя бы для одной какой-нибудь точки. Другими словами, в замкнутом контуре нужно предварительно найти начальное усилие q_1 . Для этого воспользуемся тем условием, что контур является замкнутым и касательные усилия должны распределяться по сечению таким образом, чтобы было удовлетворено уравнение замкнутости, полученное при рассмотрении кручения профиля [гл. VII, § 4, формула (9)]:

$$\sum_k q \Delta s' = G \vartheta \omega_k.$$

При кручении в это уравнение входит погонное касательное усилие $q_{кр}$, имеющее постоянную величину для всего контура. При изгибе в уравнение замкнутости нужно подставить переменное касательное усилие q ; оно зависит от изменения статического момента S площади части сечения, и поэтому его нельзя выносить за знак суммы. Если плоскость изгибающих сил проходит через центр изгиба K замкнутого профиля, то закручивания балки не будет, и погонный угол закручивания $\vartheta = 0$. Уравнение замкнутости в условиях только одного изгиба без кручения принимает вид

$$\sum_k \bar{q} \Delta s' = 0. \quad (11)$$

Подставим в него значения \bar{q} по формуле (10):

$$\sum_k (\bar{q}_1 + q) \Delta s' = 0.$$

Усилие \bar{q}_1 имеет вполне определенное значение и изменяется по сечению только величина q ; поэтому, раскрыв скобки, мы отделим неизменяющую часть и можем вынести \bar{q}_1 за знак суммы:

$$\bar{q}_1 \sum \Delta s' + \sum q \Delta s' = 0.$$

Величина $\sum_k \Delta s' = \sum_k \frac{\Delta s}{t} = s'_k$ называется приведенным периметром контура (гл. VII, § 4).

Вводя это обозначение, получаем

$$\bar{q}_1 s'_k + \sum_k q \Delta s' = 0,$$

откуда

$$\bar{q}_1 = - \frac{\sum_k q \Delta s'}{s'_k}. \quad (12)$$

Чтобы определить касательное усилие замкнутого контура в какой-либо точке I , принятой за начальную, прежде всего нужно вычислить переменные усилия q , считая контур открытым в этой точке, и построить эпюру q по типу эпюр, изображенных на фиг. 10.8—10.12. Если все ординаты этой эпюры разделить на соответствующие им толщины стенок t , то получится эпюра касательных напряжений $\tau = \frac{q}{t}$. Теперь числитель формулы (12) можно записать в виде

$$\sum_k q \Delta s' = \sum_k \frac{q \Delta s}{t} = \sum_k \tau \Delta s.$$

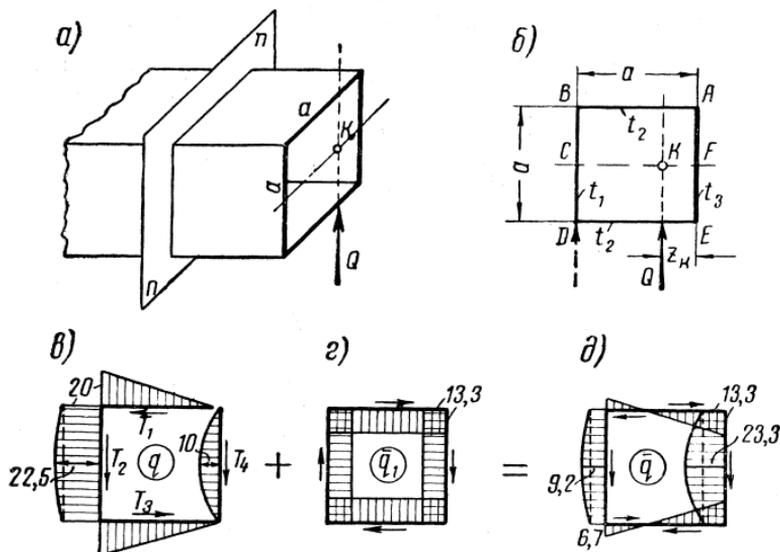
Сумма произведений $\tau \Delta s$ подобно произведениям $q \Delta z$ (фиг. 10.9, б) равна площади эпюры τ . Поэтому сумму $\sum_k q \Delta s'$ можно рассматривать как

площадь эпюры касательных напряжений данного контура. Для вычисления этой площади построение эпюры τ не обязательно. Достаточно разбить периметр контура на прямые участки с постоянной толщиной t (кривые участки заменяются вписанными в них ломаными участками), определить на каждом участке площадь эпюры q , равную для прямых полосок касательной силе T (фиг. 10.9, б), и разделить ее на постоянную для участка толщину t . Найденные таким образом значения суммируются по всем участкам контура и составляют величину $\sum_k \frac{q \Delta s}{t} = \sum_k q \Delta s'$. Разделив ее

на приведенный периметр s_k и взяв с обратным знаком, получаем искомое начальное усилие \bar{q}'_1 замкнутого контура. Окончательная эпюра \bar{q} получается путем сложения эпюры q с постоянной величиной \bar{q}_1 по формуле (10).

Заметим, что если бы речь шла об определении \bar{q} от некоторой поперечной нагрузки, независимо от того, сопровождается ли вызываемый ею изгиб кручением или нет, то задача могла бы быть решена с помощью уравнений равновесия без использования условий замкнутости.

Пример 1. Определить касательные усилия в сечении nn тонкостенного замкнутого профиля квадратной формы от поперечной силы $Q=1000$ кг,



Фиг. 10.22. Пример вычисления касательных усилий при изгибе замкнутого профиля.

a —общий вид; b —поперечное сечение; $в$ —эпюра касательных усилий открытого профиля; $г$ —эпюра постоянного усилия q_1 ; $д$ —окончательная эпюра погонных касательных усилий замкнутого профиля.

проходящей через центр изгиба K . Размеры сечения (фиг. 10.22): $a=20$ см; $t_1=0,05$ см; $t_2=0,1$ см; $t_3=0,2$ см.

Выбираем начало отсчета в угловой точке A , как бы сделал в этом месте продольный разрез и превратив профиль в открытый. Пользуясь фор-

мулой (4), строим эюру q , обходя контур от точки A против часовой стрелки (фиг. 10.22, в):

$$q_A=0; \quad q_B=0,1 \cdot 20 \cdot 10 \frac{Q}{J}=20 \frac{Q}{J}; \quad q_C=(20+0,05 \cdot 10 \cdot 5) \frac{Q}{J}=22,5 \frac{Q}{J};$$

$$q_D=20 \frac{Q}{J}; \quad q_E=0; \quad q_F=0,2 \cdot 10 (-5) \frac{Q}{J}=-10 \frac{Q}{J}.$$

Вычисляем числитель формулы (12) как сумму площадей эюры $\tau = \frac{q}{t}$ участков контура, которые в данном случае являются прямыми:

$$\sum_k q \Delta s' = \sum_k \frac{q \Delta s}{t} = \left(\frac{20 \cdot 20}{2 \cdot 0,1} + \frac{120 \cdot 20}{0,05} + \frac{2}{3} \frac{2,5 \cdot 20}{0,05} + \right. \\ \left. + \frac{20 \cdot 20}{2 \cdot 0,1} - \frac{2}{3} \frac{10 \cdot 20}{0,2} \right) \frac{Q}{J} = 12000 \frac{Q}{J}.$$

Приведенный периметр контура равен

$$s'_k = \frac{20}{0,1} + \frac{20}{0,05} + \frac{20}{0,1} + \frac{20}{0,2} = 900.$$

Подставляя полученные значения в формулу (12), находим

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_A = - \frac{1}{s'_k} \sum_k q \Delta s' = - \frac{12000}{900} \frac{Q}{J} = -13,3 \frac{Q}{J}.$$

По формуле (10) начальное усилие \bar{q}_1 добавляется везде к ординатам эюры q . Для этого построим эюру постоянного усилия \bar{q}_1 и сложим с эюрой q (фиг. 10.22). В результате получим окончательную эюру погонных касательных усилий замкнутого контура при изгибе его без кручения, т. е. при условии расположения поперечной нагрузки в плоскости, проходящей через центр изгиба K . Вычислим теперь момент инерции J относительно нейтральной оси:

$$J = 2 \cdot 0,1 \cdot 20 \cdot 10^2 + (0,05 + 0,2) \frac{20^3}{12} = 567 \text{ см}^4.$$

Умножая все ординаты эюры на отношение $\frac{Q}{J} = \frac{1000}{567} = 1,765 \text{ кг/см}^4$, получаем числовые значения погонных касательных усилий изгиба. Например, в точках C и F имеем (фиг. 10.22, д)

$$\bar{q}_C = 9,2 \cdot 1,765 = 16,2 \text{ кг/см};$$

$$\bar{q}_F = -23,3 \cdot 1,765 = -41,1 \text{ кг/см}.$$

Соответствующие напряжения будут

$$\bar{\tau}_C = \frac{\bar{q}_C}{t_1} = \frac{16,2}{0,05} = 324 \text{ кг/см}^2; \quad \bar{\tau}_F = \frac{41,1}{0,2} = 205 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшие касательные напряжения возникают в самой тонкой стенке.

§ 6. Центр изгиба замкнутого профиля

Чтобы балка не закручивалась, плоскость нагрузки должна проходить через центр изгиба. Необходимо поэтому уметь определять его положение. Как было указано выше, через центр изгиба проходит равнодействующая внутренних касательных усилий \bar{q} , возникающих в данном сечении при изгибе. Исходя из этого, для нахождения центра изгиба достаточно составить уравнение суммы моментов касательных усилий и поперечной силы относительно какой-нибудь точки сечения.

Касательные усилия q (фиг. 10. 23), возникающие от поперечной силы, дают относительно произвольной точки O момент, равный сумме произведений сил $\bar{q}\Delta s$ на их расстояния r до точки O , измеренные по перпендикуляру к направлению сил:

$$M_q = \sum \bar{q} r \Delta s. \quad (13)$$

Считая положительным момент M_q , направленный против часовой стрелки, уравнение моментов относительно точки O получим в следующем виде (фиг. 10. 23):

$$M_q - Q z_K = 0.$$

Отсюда находим расстояние от центра изгиба до произвольно выбранной точки O , измеренное по перпендикуляру к плоскости изгиба:

$$z_K = \frac{M_q}{Q}. \quad (14)$$

Фиг. 10. 23. Момент от переменных по периметру погонных касательных усилий относительно полюса O .

Полученные здесь формулы (13) и (14) для замкнутого профиля соответствуют формулам (5) и (8) для открытого профиля. При положительном значении z_K центр изгиба действительно находится слева от выбранной точки O , как было предположено вначале. Если z_K получится с минусом, то это предположение неверно и расстояние от точки O до центра изгиба нужно измерять в обратном направлении. Если точку O выбрать в центре изгиба, то момент касательных усилий M , относительно нее будет равен нулю.

Поясним на примере профиля, изображенного на фиг. 10. 22, порядок нахождения центра изгиба. Касательные усилия замкнутого профиля состоят из постоянного усилия $q_1 = q_A$ и переменного усилия q открытого профиля. Постоянное усилие q_1 создает относительно любой точки сечения момент, равный произведению этого усилия на удвоенную площадь, ограниченную контуром, как это было показано в главе VII (фиг. 7. 8). Усилия q открытого профиля в каждой плоской стенке дают касательные силы T , равные площади эпюры q на данном участке (фиг. 10. 9). Выберем для составления уравнения моментов, например, точку E в предположении, что центр изгиба находится слева от нее. Пользуясь фиг. 10. 22, составляем сумму моментов относительно точки E :

$$-\bar{q}_1 \omega_K + T_1 a + T_2 a - Q z_K = 0.$$

Силы T_3 и T_4 в уравнение не вошли, так как они проходят через точку E . Вычисляем величины:

$$\omega_K = 2a^2 = 2 \cdot 20^2 = 800 \text{ см}^2; \quad T_1 = \frac{20 \cdot 20}{2} \frac{Q}{J} = 200 \frac{Q}{J};$$

$$T_2 = \left(20 \cdot 20 + \frac{2}{3} 2,5 \cdot 20 \right) \frac{Q}{J} = 433 \frac{Q}{J}$$

и подставляем их в уравнение моментов, причем вычисленное ранее усилие \bar{q}_1 нужно подставить со знаком плюс, потому что его знак уже учтен при составлении уравнения

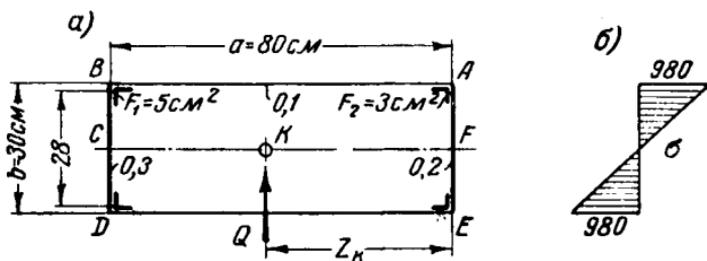
$$(-13,3 \cdot 800 + 200 \cdot 20 + 433 \cdot 20) \frac{Q}{J} - Qz_K = 0.$$

Отмечаем, что положение центра изгиба, как и в открытом профиле, не зависит от поперечной силы, потому что она в уравнении сокращается. Подставляя сюда момент инерции $J=567 \text{ см}^4$, окончательно находим расстояние между центром изгиба K и точкой E :

$$z_K = \frac{(-13,3 \cdot 800 + 200 \cdot 20 + 433 \cdot 20)}{567} = 3,53 \text{ см}.$$

Только в том случае, когда плоскость действия нагрузки проходит через точку K , брус будет изгибаться без закручивания. Если же нагрузка приложена таким образом, что ее плоскость не проходит через центр изгиба, то относительно него нагрузка будет создавать крутящий момент M_K , равный произведению поперечной силы на ее расстояние до центра K . Например, если силу Q перенести на стенку BD (пунктир на фиг. 10.22,б), то она создаст относительно центра изгиба момент $M_K = Q(a - z_K)$. При действии такой нагрузки в дополнение к переменным усилиям q , возникающим от изгиба, в сечении появятся погонные касательные усилия q_K постоянной величины, определяемые в зависимости от крутящего момента по формуле (6) главы VII: $q_K = \frac{M_K}{\omega_K}$. Их нужно сложить с усилиями \bar{q} (фиг. 10.22,д), чтобы получить окончательную эпюру касательных усилий, возникающих в сечении при одновременном действии изгиба и кручения.

Пример 1. Несущая часть крыла образована из двух лонжеронов, которые состоят из вертикальных стенок, угольников и соединяющей лонжероны



Фиг. 10.24. К расчету замкнутого профиля на изгиб.

a — размеры сечения; b — эпюра нормальных напряжений.

обшивки. Схематически эту часть сечения крыла можно рассматривать как прямоугольник с сосредоточенными площадями в углах. Определить положение центра изгиба и вычислить нормальные и касательные напряжения, если изгибающий момент $M=5000 \text{ кгм}$ и поперечная сила $Q=2500 \text{ кг}$ действуют в вертикальной плоскости, проходящей через центр изгиба. Размеры сечения и сосредоточенные площади указаны на фиг. 10.24.

Вычисляем момент инерции. Пренебрегая моментами инерции угольников относительно их собственных центральных осей, можно считать, что вся площадь сечения каждого угольника сосредоточена в одной точке. Если расстояние между центрами тяжести сосредоточенных площадей F равно 28 см , то

$$J = 2(80 \cdot 0,1 \cdot 15^2 + 5 \cdot 14^2 + 3 \cdot 14^2) + (0,3 + 0,2) \frac{28^3}{12} = 7651 \text{ см}^4.$$

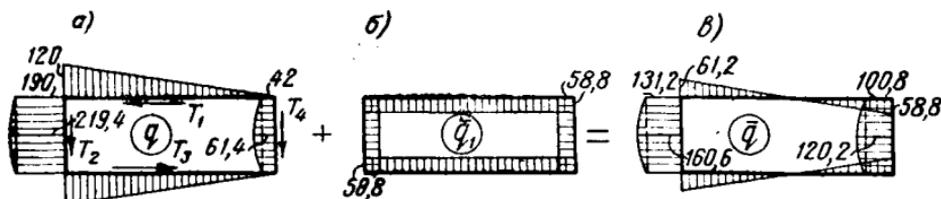
Наибольшие нормальные напряжения возникают в обшивке:

$$\sigma = \frac{M}{J} y_{\max} = - \frac{500\,000}{7651} 15 = 980 \text{ кг/см}^2.$$

Вычисление касательных напряжений начнем с построения эпюры q открытого профиля, полученного путем продольного разреза, например, в углу А. Тогда в верхней обшивке на правом конце, отделенном разрезом от лонжерона, будет усилие $q_A = 0$, а на левом конце

$$q_B = 0,1 \cdot 80 \cdot 15 \frac{Q}{J} = 120 \frac{Q}{J}.$$

По длине обшивки усилие q меняется по наклонной прямой (фиг. 10.25,а). В вертикальной стенке касательные усилия резко возрастают вследствие вклю-



Фиг. 10.25. Эпюра погонных касательных усилий.

а — в открытом профиле; б — эпюра начального усилия q_1 ; в — окончательная эпюра q в замкнутом профиле.

чения сосредоточенной площади F_1 (фиг. 10.24,а). В верхней части стенки левого лонжерона

$$q_B = (120 + 5 \cdot 14) \frac{Q}{J} = 190 \frac{Q}{J}.$$

По середине стенки

$$q_C = (190 + 0,3 \cdot 14 \cdot 7) \frac{Q}{J} = 219,4 \frac{Q}{J}.$$

В верхней части стенки правого лонжерона у продольного разреза касательное усилие не равно нулю, потому что на конце вертикальной стенки имеется сосредоточенная площадь F_2 . Учитывая ее, имеем

$$q_A = 3 \cdot 14 \frac{Q}{J} = 42 \frac{Q}{J}.$$

По середине правого лонжерона

$$q_F = (42 + 0,2 \cdot 14 \cdot 7) \frac{Q}{J} = 61,4 \frac{Q}{J}.$$

На участке между сосредоточенными площадями угольников усилие q в вертикальных стенках изменяется по квадратной параболе. В нижней части сечения усилия q распределяются симметрично верхней части (фиг. 10.25,а). Так как поперечная сила направлена вверх, то уравновешивающие ее усилия q в вертикальных стенках направлены вниз и в горизонтальных стенках они

образуют общий поток. В каждой стенке усилия q дают равнодействующие касательные силы T , равные площади эпюры q на длине соответствующего участка:

$$T_1 = T_3 = \frac{120 \cdot 80}{2} \frac{Q}{J} = 4800 \frac{Q}{J}; \quad T_2 = \left(190 \cdot 28 + \frac{2}{3} 29,4 \cdot 28 \right) \frac{Q}{J} = 5868 \frac{Q}{J};$$

$$T_4 = \left(42 \cdot 28 + \frac{2}{3} 19,4 \cdot 28 \right) \frac{Q}{J} = 1538 \frac{Q}{J}.$$

Касательные усилия замкнутого профиля определяются по формуле (10), для чего предварительно нужно вычислить начальное усилие \bar{q}_1 по формуле (12).

Входящая в числитель сумма $\sum_k q \Delta s'$ равна алгебраической сумме сил T , деленных на толщины соответствующих стенок:

$$\sum q \Delta s' = \sum \frac{T}{t} = \left(2 \frac{4800}{0,1} + \frac{5868}{0,3} - \frac{1538}{0,2} \right) \frac{Q}{J} = 107\,870 \frac{Q}{J}.$$

Приведенный периметр контура

$$s'_k = 2 \frac{80}{0,1} + \frac{28}{0,3} + \frac{28}{0,2} = 1833.$$

По формуле (12) находим

$$\bar{q}_1 = - \frac{1}{s'_k} \sum \frac{q \Delta s}{t} = - \frac{107\,870}{1833} = - 58,8 \frac{Q}{J}.$$

Строим эпюру \bar{q}_1 (фиг. 10.25, б) и складываем ее с эпюрой q , в результате чего получаем окончательную эпюру касательных усилий \bar{q} замкнутого профиля (фиг. 10.25, в). Вычислим касательные напряжения в точке B обшивки и в точках C и F лонжеронов крыла:

$$\bar{\tau}_B = \frac{\bar{q}_B}{t} = \frac{61,2}{0,1} \cdot \frac{2500}{7651} = 200 \text{ кг/см}^2;$$

$$\bar{\tau}_C = \frac{160,6}{0,3} \cdot \frac{2500}{7651} = 175 \text{ кг/см}^2; \quad \bar{\tau}_F = \frac{120,2}{0,2} \cdot \frac{2500}{7651} = 196 \text{ кг/см}^2.$$

Для определения положения центра изгиба составим уравнение моментов хотя бы относительно точки E :

$$Qz_K - T_1 b - T_2 a + \bar{q}_1 \omega_K = 0.$$

Подставляя сюда $\omega_K = 2ab = 2 \cdot 30 \cdot 80 = 4800 \text{ см}^2$, значения сил T и момент инерции J , находим

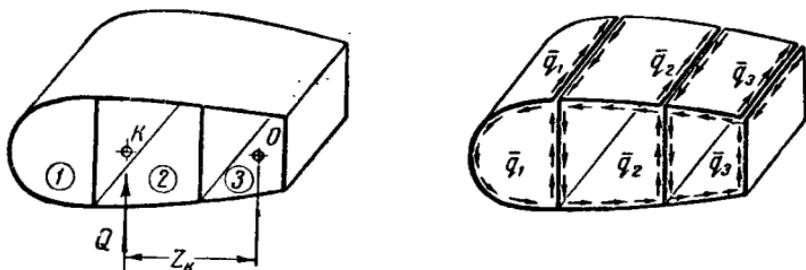
$$z_K = \frac{4800 \cdot 30 + 5868 \cdot 80 - 58,8 \cdot 4800}{7651} = 43,3 \text{ см}.$$

§ 7. Изгиб многоконтурного профиля

Распределение напряжений. Поперечные сечения некоторых тонкостенных конструкций, как, например, крыла самолета, часто имеют многозамкнутый контур. Внешние нагрузки (для крыла самолета они состоят из веса его элементов, сил инерции и аэродинамических сил) в общем случае вызывают кручение и изгиб конструкции крыла одновременно. Расчет на кручение был рассмотрен в главе VII, § 5. Теперь следует рассмотреть изгиб без

кручения, предполагая, что плоскость изгибающих сил проходит через центры изгиба сечений. При этом будем исходить из тех же предположений, которые были приняты в главе VII при изучении кручения тонкостенных профилей.

Нормальные напряжения при изгибе многоконтурного профиля поперечно определяются по формуле $\sigma = \frac{M}{J} y$, потому что и здесь принимается гипотеза плоских сечений. Переходя к касательным напряжениям или к погонным касательным усилиям q , нужно учесть, что превратить многоконтурный профиль в открытый можно, сделав не один, а несколько продольных разрезов, именно столько, сколько замкнутых контуров составляет данный профиль. В каждом таком разрезе обнаруживается вполне определенное и пока нам неизвестное погонное касательное усилие, которое распространяется на стенки только одного контура и добавляется к касательным усилиям открытого профиля, полученного из заданного. Рассмотрим, например, трехконтурный профиль (фиг. 10.26); его необходимо разрезать в трех местах, чтобы открыть



Фиг. 10.26. Начальные касательные усилия в трехконтурном профиле.

все контуры. Тогда обнаруживаются три начальных значения касательного усилия: q_1 , q_2 и q_3 в трех точках поперечного сечения, от которых начинается вычисление усилий q открытого профиля. Усилия q на фиг. 10.26 не показаны.

В стенках, принадлежащих только одному, положим, первому контуру, окончательное погонное касательное усилие \bar{q} при изгибе состоит из постоянного усилия \bar{q}_1 этого контура, возникающего в точке разреза, и переменного усилия q открытого профиля, зависящего от изменения статического момента площади, $\bar{q} = \bar{q}_1 + \frac{Q}{J} S = \bar{q}_1 + q$. На промежуточных стенках, принадлежащих двум смежным контурам, например, в стенке, разделяющей первый и второй контуры (фиг. 10.26), возникают два постоянных усилия \bar{q}_1 и \bar{q}_2 , которые складываются с переменным усилием. Окончательное усилие промежуточной стенки равно $\bar{q} = \bar{q}_1 - \bar{q}_2 + q$. Положительное для второго контура усилие \bar{q}_2 действует на первый контур в направлении, обратном положительному усилию q_1 , и для первого контура усилие q_2 является отрицательным. Аналогичная картина получается и в других стенках.

Уравнения замкнутости. Величины постоянных касательных усилий, так же как и в одноконтурном профиле, определяются при помощи уравнения замкнутости (11), которое нужно написать для каждого контура в отдельности. Для первого контура в уравнение замкнутости, $\sum_1 \bar{q} \Delta s' = 0$, следует подставить $\bar{q} = \bar{q}_1 + q$ для стенок всего периметра первого контура. Это составит

$$\sum_1 (\bar{q}_1 + q) \Delta s' = \bar{q}_1 s_1 + \sum_1 q \Delta s'$$

Так как в стенке, разделяющей первый и второй контуры, возникает еще и усилие \bar{q}_2 , которое направлено на общей стенке противоположно усилию \bar{q}_1 , то к написанной сумме нужно приписать сумму произведений $-\bar{q}_2\Delta s'$, взятую только в пределах общей стенки. Обозначая приведенную длину стенки, общей первому и второму контуру, через s_{12} получим добавочную сумму $-\bar{q}_2s_{12}$. Окончательно уравнение замкнутости первого контура принимает вид

$$\bar{q}_1s_1 - \bar{q}_2s_{12} + \sum_1 \bar{q}\Delta s' = 0.$$

Аналогично составляются уравнения замкнутости для остальных контуров. Со вторым контуром граничат первый и третий контуры и на него одновременно с усилием \bar{q}_2 действуют в промежуточных стенках соответственно усилия $-\bar{q}_1$ и $-\bar{q}_3$ (фиг. 10. 26). С третьим контуром граничит только второй и на их общей стенке возникают усилия \bar{q}_3 и $-\bar{q}_2$. Ра. полагая в порядке постоянных усилий, уравнения замкнутости второго и третьего контуров запишем в следующем виде:

$$-\bar{q}_1s_{12} + \bar{q}_2s_2 - \bar{q}_3s_{23} + \sum_2 \bar{q}\Delta s' = 0;$$

$$-\bar{q}_2s_{23} + \bar{q}_3s_3 - \sum_3 \bar{q}\Delta s' = 0.$$

В каждом уравнении в сумму

$$\sum \bar{q}\Delta s' = \sum \frac{\bar{q}\Delta s}{t}$$

включаются участки периметра только одного контура, для которого написано уравнение замкнутости. Чтобы получить эти суммы, нужно сначала построить от заданной поперечной силы общую эпюру q открытого профиля, полученного из заданного многоконтурного профиля путем продольных разрезов; затем вычислить площади эпюры q , приходящиеся на каждый участок с постоянной толщиной стенки t , и разделить эти площади на соответствующие им толщины. Полученные значения суммируются отдельно для каждого замкнутого контура.

Решение уравнений замкнутости содержит величины начальных усилий \bar{q}_1 , \bar{q}_2 и \bar{q}_3 . Складывая их с эпюрой q открытого профиля, получим окончательную эпюру q многоконтурного профиля при изгибе его без кручения.

Центр изгиба. После того как окончательная эпюра q будет построена, можно определить положение центра изгиба, исходя из условия, что усилия q должны уравновешивать собой силу Q , проходящую через центр изгиба K (фиг. 10. 26). Условие равновесия следует составить в виде уравнения моментов усилий q и силы Q относительно произвольно выбранной точки O , как это было сделано для одноконтурного профиля:

$$\sum \bar{q}r\Delta s - Qz_K = M_{\bar{q}} - Qz_K = 0.$$

Здесь сумма произведений сил $q\Delta s$ на их расстояния r до точки O распространяется на все поперечное сечение по всем его контурам. Принимая во внимание, что усилие q состоит из начальных усилий и из усилий q открытого профиля, уравнение равновесия, например, для трехконтурного профиля можно записать в следующем развернутом виде:

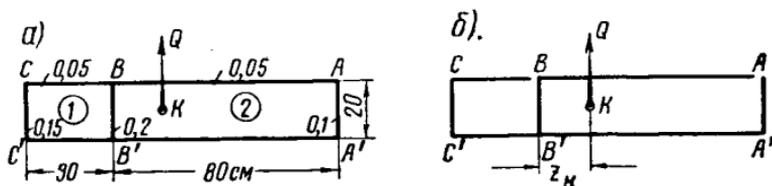
$$\bar{q}_1\omega_1 + \bar{q}_2\omega_2 + \bar{q}_3\omega_3 + \sum \bar{q}r\Delta s - Qz_K = 0.$$

Вычисление момента $M_q = \sum q r \Delta s$ касательных усилий q открытого профиля относительно выбранной точки сечения было показано на примерах предыдущего параграфа для одноконтурного профиля. Совершенно аналогично вычисляется эта сумма и для многоконтурного профиля. Сопоставляя расчет многоконтурного профиля на изгиб с его расчетом на кручение (глава VII, § 5), отмечаем, что в основном оба расчета производятся одинаково. Разница состоит лишь в том, что при расчете на изгиб в уравнение замкнутости рассматриваемого контура входит площадь его эпюры τ , равная сумме

$$\sum \tau \Delta s = \sum q \Delta s',$$

распространенной по периметру только данного контура, а при расчете на кручение вместо площади эпюры τ входит удвоенная площадь этого контура ω . Кроме того, в уравнение моментов относительно произвольной точки сечения вместо внешнего крутящего момента входят при расчете на изгиб моменты от касательных усилий q открытого профиля и от силы, приложенной в центре изгиба. Если это уравнение моментов составить относительно центра изгиба, то момент от силы Q будет равен нулю. Покажем порядок вычисления погонных касательных усилий при изгибе и порядок определения центра изгиба на следующем примере.

Пример 1. Дан двухконтурный тонкостенный профиль в виде двух прямоугольников с размерами, указанными на фиг. 10.27. Определить погонные



Фиг. 10.27. К расчету касательных усилий изгиба в двухконтурном профиле.

a—размеры заданного сечения; *б*—открытый профиль, полученный из заданного.

касательные усилия в стенках профиля от силы $Q = 1000$ кг, вызывающей только изгиб, и найти положение центра изгиба.

Для заданного профиля уравнений замкнутости два. При изгибе они имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 s_1 - \bar{q}_2 s_2 + \sum_1 q \Delta s' &= 0, \\ -\bar{q}_1 s_2 + \bar{q}_2 s_2 + \sum_2 q \Delta s' &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить суммы, входящие в уравнение замкнутости, превратим двухконтурный профиль в открытый, сделав продольные разрезы в углах A и B обоих контуров, и построим эпюру q для полученного открытого профиля (фиг. 10.27, б). Ординаты этой эпюры в угловых точках равны (фиг. 10.28, а):

$$q_B = q_{B'} = 0,05 \cdot 80 \cdot 10 \frac{Q}{J} = 40 \frac{Q}{J}; \quad q_C = q_{C'} = 0,05 \cdot 30 \cdot 10 \frac{Q}{J} = 15 \frac{Q}{J}.$$

На вертикальных стенках эпюра q изменяется по квадратной параболе, добавленной к прямоугольной эпюре. По середине высоты стенок ординаты будут:

$$\begin{aligned} q_{CC'} &= (15 + 0,15 \cdot 10 \cdot 5) \frac{Q}{J} = 22,5 \frac{Q}{J}; \quad q_{BB'} = (40 + 0,2 \cdot 10 \cdot 5) \frac{Q}{J} = 50 \frac{Q}{J}; \\ q_{AA'} &= 0,1 \cdot 10 \cdot 5 \frac{Q}{J} = 5 \frac{Q}{J}. \end{aligned}$$

Вычисляем силы T , равные площадям эпюры q , приходящимся на отдельные участки контура:

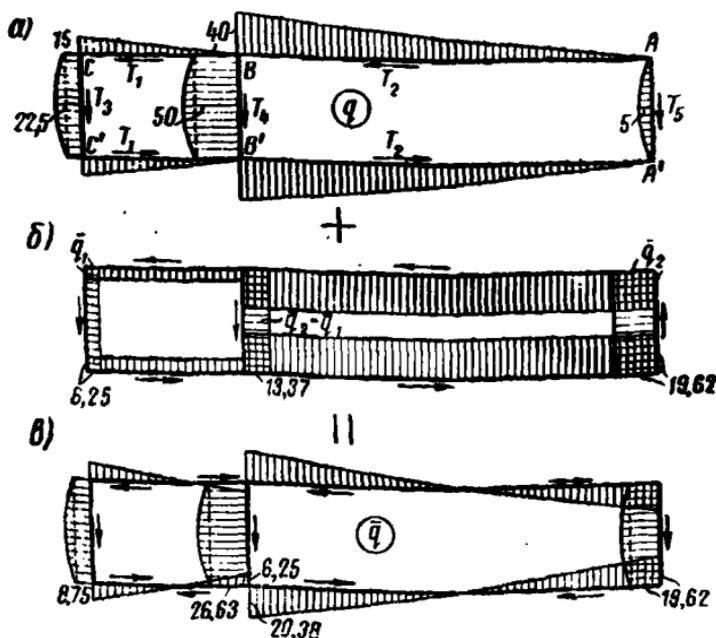
$$T_1 = \frac{15 \cdot 30}{2} \frac{Q}{J} = 225 \frac{Q}{J};$$

$$T_2 = \frac{40 \cdot 80}{2} \frac{Q}{J} = 1600 \frac{Q}{J};$$

$$T_3 = \left(15 \cdot 20 + \frac{2}{3} 7,5 \cdot 20 \right) \frac{Q}{J} = 400 \frac{Q}{J};$$

$$T_4 = \left(40 \cdot 20 + \frac{2}{3} 10 \cdot 20 \right) \frac{Q}{J} = 933 \frac{Q}{J};$$

$$T_5 = \frac{2}{3} 5 \cdot 20 \frac{Q}{J} = 67 \frac{Q}{J}.$$



Фиг. 10.28. Эпюры касательных усилий.
 а — касательные усилия в открытом профиле; б — эпюра начальных усилий q_1 и q_2 ; в — окончательная эпюра q .

Разделив каждую силу T на толщину соответствующей стенки и сложив их отдельно для первого и второго контуров с учетом знаков усилий, получаем

$$\sum_1 q \Delta s' = \frac{2T_1}{0,05} + \frac{T_3}{0,15} - \frac{T_4}{0,2} = \left(\frac{2 \cdot 225}{0,05} + \frac{400}{0,15} - \frac{933}{0,2} \right) \frac{Q}{J} = 7000 \frac{Q}{J};$$

$$\sum_2 q \Delta s' = \frac{2T_2}{0,05} + \frac{T_4}{0,2} - \frac{T_5}{0,1} = \left(\frac{2 \cdot 1600}{0,05} + \frac{933}{0,2} - \frac{67}{0,1} \right) \frac{Q}{J} = 68000 \frac{Q}{J}.$$

Вычисляем приведенные длины (фиг. 10. 27, а):

$$s'_1 = 2 \frac{30}{0,05} + \frac{20}{0,15} + \frac{20}{0,2} = 1433;$$

$$s'_{12} = \frac{20}{0,2} = 100;$$

$$s'_2 = 2 \frac{80}{0,05} + \frac{20}{0,2} + \frac{20}{0,1} = 3500.$$

Подставляем вычисленные величины в уравнения замкнутости:

$$1433\bar{q}_1 - 100\bar{q}_2 + 7000 \frac{Q}{J} = 0;$$

$$- 100\bar{q}_1 + 3500\bar{q}_2 + 6800 \frac{Q}{J} = 0.$$

Решая эти уравнения, находим $\bar{q}_1 = -6,25 \frac{Q}{J}$ и $\bar{q}_2 = -19,62 \frac{Q}{J}$.

Строим общую эпюру (фиг. 10. 28, б) при одновременном действии \bar{q}_1 и \bar{q}_2 . На промежуточной стенке BB' будем иметь разность начальных усилий

$$\bar{q}_2 - \bar{q}_1 = (-19,62 + 6,25) \frac{Q}{J} = -13,37 \frac{Q}{J}.$$

Складываем эпюру начальных усилий с эпюрой q открытого профиля и получаем окончательную эпюру q_0 двухконтурного профиля (фиг. 10. 28, в).

Вычисляем момент инерции сечения относительно центра тяжести

$$J = (0,15 + 0,2 + 0,1) \frac{20^3}{12} + 2(30 + 80) 0,05 \cdot 10^2 = 1400 \text{ см}^4.$$

Чтобы получить истинные значения касательных усилий от силы Q , нужно все ординаты эпюры \bar{q} умножить на

$$\frac{Q}{J} = \frac{1000}{1400} = 0,714 \text{ кг/см}^2.$$

Для определения центра изгиба составим уравнение моментов, например, относительно точки B по типу уравнения (15):

$$\bar{q}_1 \omega_1 + \bar{q}_2 \omega_2 + \sum q r \Delta s + Q z_K = 0,$$

Здесь $\omega_1 = 2 \cdot 20 \cdot 30 = 1200 \text{ см}^2$; $\omega_2 = 2 \cdot 20 \cdot 80 = 3200 \text{ см}^2$;

$$\sum q r \Delta s = 30T_3 + 20T_1 + 20T_2 - 80T_3$$

или

$$\sum q r \Delta s = (400 \cdot 30 + 225 \cdot 20 + 1600 \cdot 20 - 67 \cdot 80) \frac{Q}{J} = 43 \cdot 140 \frac{Q}{J}.$$

Подставим эти величины и значения начальных усилий в уравнение моментов

$$(-6,25 \cdot 1200 - 19,62 \cdot 3200 + 43 \cdot 140) \frac{Q}{J} + Q z_K = 0,$$

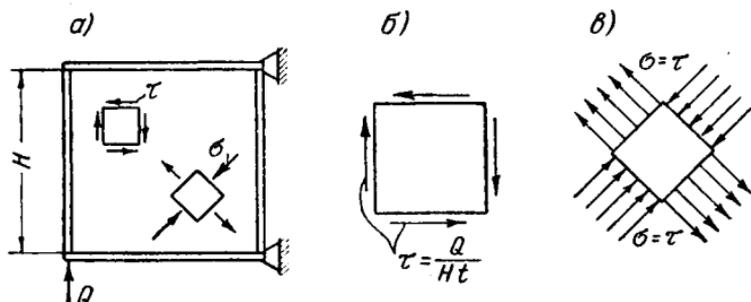
откуда

$$z_K = \frac{27\,100}{J} = \frac{27\,100}{1400} = 19,3 \text{ см.}$$

Это и есть расстояние от точки B до центра изгиба K , измеренное по перпендикуляру к силе Q .

§ 8. Балка со стенкой, не работающей на сдвиг

В первом параграфе настоящей главы рассмотрена балка со стенкой, которая воспринимает на себя поперечную силу в данном сечении, работая на сдвиг. В таком случае говорят о балке со стенкой, работающей на сдвиг. В гранях элемента, выделенного из стенки продольными и поперечными се-



Фиг. 10.29. Напряжения в элементе тонкостенной балки.

a — тонкостенная балка нагружена поперечной силой; b — в вертикальных и горизонтальных гранях элемента стенки возникают только касательные напряжения; $в$ — в гранях под 45° возникают растягивающие и сжимающие нормальные напряжения.

чениями (фиг. 10.29, a), действуют [формула (3')] касательные напряжения $\tau = \frac{Q}{Ht}$ и можно считать, что элемент находится в условиях чистого сдвига (фиг. 10.29, b). В площадках, наклоненных на 45° к поперечному сечению, при чистом сдвиге (гл. V, § 1) возникают нормальные напряжения $\sigma = \tau$. В одном направлении они растягивают элемент, а в перпендикулярном направлении сжимают его (фиг. 10.29, a и $в$).

Работу такой стенки можно уподобить работе двух диагональных раскосов квадратной панели в шарнирной ферме (фиг. 10.30, a). От поперечной нагрузки квадрат $ABCD$ обращается в ромб, диагональ AC удлиняется, а диагональ DB укорачивается на ту же величину. Если оба перекрещивающихся раскоса изготовлены из одного и того же материала и имеют одинаковую площадь сечения, то в них возникают усилия, равные по величине и противоположные по знаку, при условии что раскос DB , работающий на сжатие, не искривляется или, как говорят, не теряет устойчивости. Ниже, в главе XIV, рассматривается изгиб стержней от действия продольных сжимающих сил и устанавливается критерий для определения их устойчивости. Здесь же мы пока можем отметить, что искривление стержня сжимающей силой потребует тем большей нагрузки, чем больше момент инерции поперечного сечения стержня и чем меньше длина стержня. Длинные сжатые стержни должны быть жесткими на изгиб, чтобы они не теряли устойчивости от продольной силы. Их изготавливают из труб, угольников, швеллеров и из других профилей. Растянутые стержни могут быть гибкими, изготовленными из проволоки, лент, тросов и т. д. Таким образом в жестких диагональных раскосах квадратной панели фермы от поперечной силы возникают продольные усилия N , которые,

так же как и нормальные напряжения σ в стенке, работающей на сдвиг, одинаковы по величине и противоположны по знаку: $N_1 = -N_2 = N$ (фиг. 10.30, б).

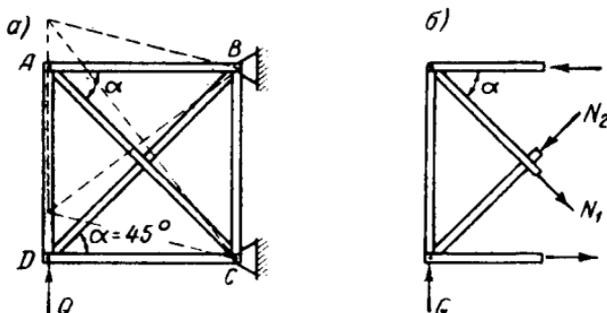
Величина усилий определяется из равновесия отсеченной части фермы (фиг. 10.30, б). Составляя уравнение проекций на вертикаль

$$N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha - Q = 0$$

и принимая во внимание, что усилия в раскосах одинаковые, получаем

$$2N \sin \alpha = Q \quad \text{или} \quad N = \frac{Q}{2 \sin \alpha}.$$

Совсем другая картина наблюдается, если оба раскоса сделать гибкими, например, проволочными или ленточными. В этом случае сжатый раскос легко искривляется и уже в начале нагружения выходит из работы от незначительной сжимающей силы; получается ферма, имеющая в панели только один раскос — растянутый (фиг. 10.31, а). Вся поперечная сила в сечении воспринимается только этим раскосом. Растягивающее усилие N_1 в работающем раскосе определяется из уравнения проекций на вертикаль всех сил отсечен-



Фиг. 10.30. Работа жестких диагональных раскосов квадратной панели фермы.

а — деформация панели от поперечной нагрузки Q ; б — усилия в раскосах равны по величине.

ной части фермы (фиг. 10.31, б), которое имеет вид

$$N_1 \sin \alpha - Q = 0, \quad \text{откуда} \quad N_1 = \frac{Q}{\sin \alpha}.$$

В ферме с гибкими раскосами, быстро теряющими устойчивость от сжимающей силы, усилие N_1 в растягивающем раскосе вдвое больше усилия N , возникающего в том случае, когда сжатый раскос не теряет устойчивости.

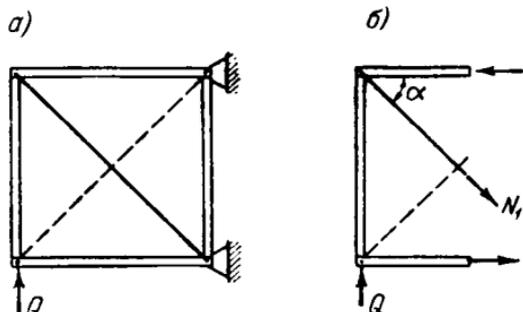
Если вместо одного диагонального раскоса поставить несколько параллельных ему раскосов (фиг. 10.32), то при жестких на изгиб поясах и стойках нормальные напряжения во всех этих раскосах будут одинаковы. Объясняется это тем, что относительные удлинения всех раскосов равны между собой. Под действием силы Q квадратная рамка, образованная шарнирно соединенными поясами и стойками, обращается в ромб (пунктир на фиг. 10.32). Если пояса и стойки жестки на изгиб настолько, что их можно считать прямыми и после деформации, то из подобия треугольников (фиг. 10.32) легко составить следующие соотношения:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Отсюда получается, что $\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_2}{l_2}$ или $\epsilon_1 = \epsilon_2$. Так как относительные удлинения любых двух параллельных раскосов одинаковы, то, учитывая закон пропорциональности при растяжении (гл. III, § 2), получаем $\frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma}{E}$.

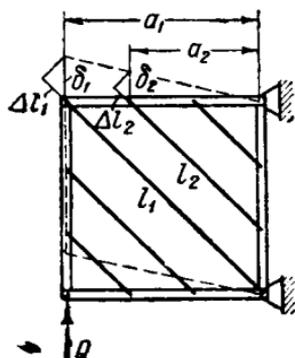
В параллельных раскосах, сделанных из одного материала, возникают одинаковые нормальные напряжения σ .

Стенка, работающая на сдвиг, заменяет собой два жесткие перекрещивающиеся раскоса фермы. Подобно этому два гибкие раскоса или один растянутый раскос могут быть заменены очень тонкой стенкой, которая искривляется и теряет устойчивость в самом начале нагружения, при весьма малых сжимающих напряжениях. В такой стенке будут возникать только диагональ-



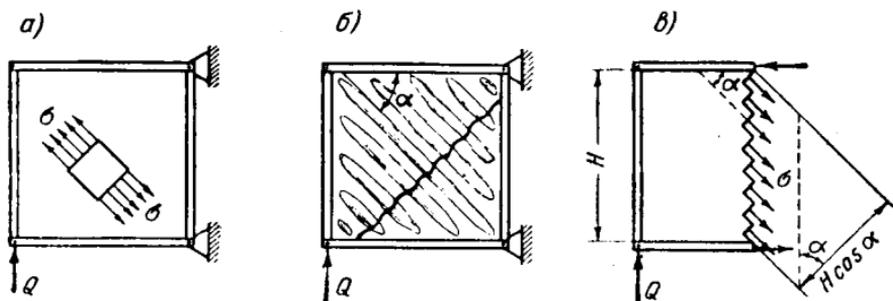
Фиг. 10.31. Работа гибких раскосов фермы.

a — сжатый раскос выходит из работы;
 b — поперечная нагрузка воспринимается одним (растянутым) раскосом.



Фиг. 10.32. Несколько параллельных раскосов, заменяющих один диагональный.

но направленные растягивающие напряжения σ (фиг. 10.33, a). Самые незначительные касательные напряжения, возникающие в поперечных и продольных сечениях (фиг. 10.29), обязательно создают в одном диагональном направлении сжатие, а в другом — растяжение выделенного элемента. Вслед-



Фиг. 10.33. Балка с очень тонкой стенкой.

a — от поперечной нагрузки в стенке возникают только растягивающие напряжения, направленные по диагонали; b — образование складок (воли) в направлении растягивающих напряжений стенки; c — схема равновесия отсеченной части балки.

ствие быстрой потери устойчивости в очень тонкой стенке не могут появиться сколько-нибудь значительные сжимающие напряжения, а следовательно, стенка не может сопротивляться касательным напряжениям, вызывающим сжатие, как говорят, *стенка не работает на сдвиг*. Это не означает, что ни в одном сечении стенки нет касательных напряжений. Они имеются, так же как и в брус, испытывающем одноосное растяжение. Слова, что «стенки не работают на сдвиг», следует понимать в том смысле, что напряженное состояние эле-

ментов стенки не является чистым сдвигом. Модель такой стенки представляет собой прямоугольную рамку из четырех стержней, соединенных шарнирами в углах с натянутой на ней мягкой обшивкой, хотя бы из материи. Как показывают опыты, при действии изгибающей балки силы Q (фиг. 10.33,б) уже в самом начале нагружения в тонкой стенке появляется ряд параллельных складок или волн, направленных вдоль растягивающих напряжений, и возникает так называемое поле диагональных растяжений. Угол α наклона складок к поясам зависит от общих размеров балки, от поперечных сечений окаймляющих стенку стержней и от толщины стенки. Для употребительных в практике размеров угол α часто получается в пределах от 40 до 45°. Описанная здесь схема тонкостенной балки очень близко подходит к некоторым видам авиационных конструкций со стенками из тонких металлических листов. Однако в отдельных случаях, когда листы стенки не очень тонкие, сжимающие напряжения в диагональном направлении оказывают заметное влияние на работу балки и в точных расчетах их следует учитывать.

Чтобы определить нормальные напряжения в стенке, не работающей на сдвиг, проводим вертикальный разрез балки ступеньками, перпендикулярными направлению σ (фиг. 10.33, в), т. е. наклоненными на угол α к вертикали. Именно в этих площадках возникают растягивающие напряжения; в перпендикулярных площадках, параллельных направлению складок, никаких напряжений не будет. Стенку можно представить в виде сплошного ряда растянутых полос, подобных раскосам, изображенным на фиг. 10.32. Так же как и в раскосах, растягивающие напряжения σ во всех полосах, т. е. по всей тонкой стенке, одинаковы. Общая ширина ступенек, которые попадают в вертикальный разрез балки, равна $H \cos \alpha$. На этой ширине действуют постоянные напряжения σ , обнаруженные в разрезе; при толщине стенки t они дают равнодействующую, равную $\sigma t H \cos \alpha$. Уравнение проекций на вертикальную ось всех сил оставшейся части балки с очень тонкой стенкой получается в следующем виде:

$$(\sigma t H \cos \alpha) \sin \alpha - Q = 0.$$

Подставляя сюда $\cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$, после преобразования находим

$$\sigma = \frac{2Q}{Ht \sin 2\alpha}. \quad (16)$$

При $\alpha \approx 45^\circ$ можно считать $\sin 2\alpha \approx \sin 90^\circ = 1$. Тогда

$$\sigma = \frac{2Q}{Ht}. \quad (16')$$

Как и следовало ожидать, по аналогии с жесткими и гибкими диагональными раскосами растягивающие напряжения стенки, не работающей на сдвиг, вдвое больше соответствующих напряжений стенки, работающей на сдвиг.

До сих пор рассматривалась одна близкая к квадрату панель балки с очень тонкой стенкой. Обычно такие балки имеют несколько панелей (фиг. 10.34,а). При постоянной по длине балки поперечной силе Q нормальные напряжения во всей стенке одинаковы [формулы (16) и (16')].

Для определения усилий в поясах балки разрежем ее в каком-нибудь сечении на расстоянии x и заменим действие отброшенной части равнодействующей напряжений стенки $\sigma t H \cos \alpha$ и усилиями в поясах: U — в нижнем поясе и O — в верхнем. Составляем уравнение моментов относительно точки A верхнего пояса всех сил оставшейся части балки (фиг. 10.34,б):

$$UH - Qx + \sigma t H \cos \alpha \frac{H \cos \alpha}{2} = 0.$$

Учитывая, что произведение $Qx=M$ является изгибающим моментом в данном сечении балки, и подставляя приближенное значение σ по формуле (16') при $\alpha=45^\circ$ (следовательно, $\cos^2 \alpha = \cos^2 45 = \frac{1}{2}$), после преобразования уравнения моментов получаем тоже приближенную формулу для усилия в нижнем поясе

$$U = \frac{Qx}{H} - Q \cos^2 \alpha = \frac{M}{H} - \frac{Q}{2}. \quad (17)$$

Составляя аналогичное уравнение моментов всех сил относительно точки B , находим приближенное значение усилия в верхнем поясе:

$$O = -\frac{M}{H} - \frac{Q}{2}. \quad (17')$$

Усилия в поясах балки с очень тонкой стенкой зависят от изгибающего момента и поперечной силы балки и изменяются по прямолинейному закону в пределах панели от нагрузки сосредоточенными силами в узлах.

Растягивающие напряжения от стенки создают нагрузку поясов и вызывают их изгиб. На единицу длины пояса приходится погонная нагрузка (фиг. 10.34, б)

$$q = \sigma t \sin \alpha.$$

Ее вертикальная составляющая равна

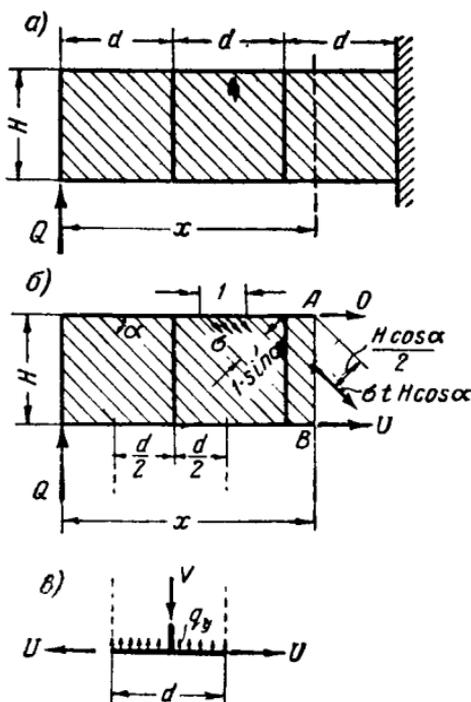
$$q_y = q \sin \alpha = \sigma t \sin^2 \alpha.$$

Таким образом пояса балки находятся в условиях одновременного изгиба равномерной нагрузкой q_y и растяжения или сжатия продольными силами U и O [формулы (17) и (17')]. Растяжение и изгиб, а для коротких стержней также сжатие и изгиб рассматриваются ниже в главе XIII. Сжатие с изгибом длинных стержней рассматривается в главе XIV, §6. Принимая приближенно $\alpha = 45^\circ$, т. е.

$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$, и подставляя значение σ по формуле (16'), получаем вертикальную нагрузку поясов в следующем виде:

$$q_y = \frac{2Q}{Ht} \frac{t}{2} = \frac{Q}{H}. \quad (18)$$

Кроме изгиба, нагрузка q_y стремится сблизить пояса друг с другом. Этому препятствуют стойки, и в них возникают сжимающие усилия. Считая, что нагрузка q_y каждой панели по ову распределяется на ограничивающие ее стойки, получаем, что на каждую стойку приходится нагрузка, расположенная на половине левой и правой от стойки панелей (фиг. 10.34), в. Таким образом при одинаковых длинах панелей d и постоянном напряже-



Фиг. 10.34. Тонкостенная балка с тремя панелями.

a — поперечная сила постоянна по длине балки; b — схема равновесия отсеченной части балки; v — сжатие стойки погонной нагрузкой поясов, возникающей от растяжения стенки.

нии σ сжимающее усилие в каждой промежуточной стойке равно

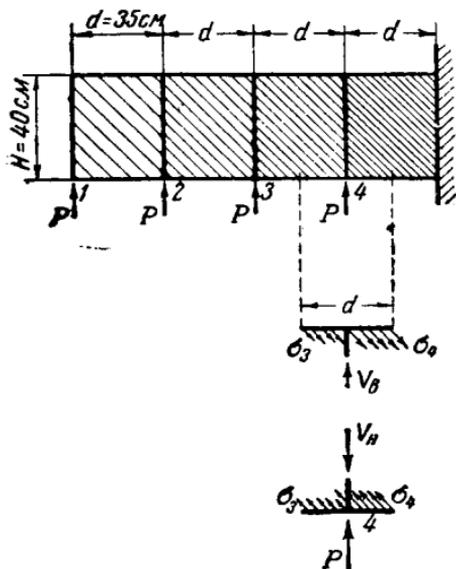
$$V = -q_y d = -\frac{Q}{H} d. \quad (19)$$

Формулы (16') — (19) являются приближенными, так как получены в предположении $\alpha = 45^\circ$. Фактически α зависит от размеров балки и для каждой балки имеет свое значение. Если вместо 45° взять $\alpha = 40^\circ$, то эти формулы изменятся на следующие:

$$\sigma = \frac{2,03Q}{Ht}; \quad U \text{ и } O = \pm \frac{M}{H} - \frac{Q}{2}; \quad q_y = 0,84 \frac{Q}{H}; \quad V = -0,84 \frac{Q}{H} d.$$

Значительные изменения получают только погонная нагрузка q_y и усилие в стойках V и при этом в сторону уменьшения, следовательно, неточность расчета по формулам (16') — (19) идет в основном в запас прочности балки.

Пример 1. Тонкостенная балка с жесткими на изгиб поясами нагружена четырьмя силами $P = 200$ кг в каждом узле (фиг. 10.35). Подобрать толщину стенки t из материала с допуском напряжением $[\sigma] = 1000$ кг/см² и определить наибольшие усилия в поясах и стойках



Наибольшая поперечная сила возникает в четвертой панели у заделки $Q = 4P = 800$ кг. По формуле (16') для этой панели получаем

$$t = \frac{2Q}{H[\sigma]} = \frac{2 \cdot 800}{40 \cdot 1000} = 0,04 \text{ см.}$$

Во всех остальных панелях стенка может быть тоньше. Выполняя ее из одного листа толщиной $t = 0,4$ мм для всех панелей, получаем по формуле (16') напряжения соответственно в первой, второй и третьей панелях, равные $\sigma_1 = 250$ кг/см², $\sigma_2 = 500$ кг/см² и $\sigma_3 = 750$ кг/см².

Наибольшие усилия поясов возникают в сечении у заделки, где изгибающий момент имеет максимальное значение:

$$M = P(4d + 3d + 2d + d) = 10Pd = 10 \cdot 200 \cdot 35 = 70\,000 \text{ кгсм.}$$

Фиг. 10.35. К расчету тонкостенной балки, нагруженной несколькими силами в узлах.

По формулам (17) вычисляем усилия в поясах:

$$U = \frac{M}{H} - \frac{Q}{2} = \frac{70\,000}{40} - \frac{800}{2} = 1750 - 400 = 1350 \text{ кг;}$$

$$O = -\frac{M}{H} - \frac{Q}{2} = -1750 - 400 = -2150 \text{ кг.}$$

Кроме этих усилий, в поясах возникают изгибающий момент и поперечная сила от равномерной нагрузки q_y , которая имеет различные значения в каж-

дой панели в зависимости от изменения поперечной силы балки. Например, в третьей и четвертой панелях она равна

$$q_{y_3} = \frac{3P}{H} = \frac{600}{40} = 15 \text{ кг/см}; \quad q_{y_4} = \frac{4P}{H} = \frac{800}{40} = 20 \text{ кг/см}.$$

Вследствие разницы между нормальными напряжениями в стенках смежных панелей на стойки передается погонная нагрузка, горизонтальная составляющая которой вызывает изгиб стойки, а вертикальная изменяет сжимающее усилие стойки по высоте. Поэтому сжатие стойки у верхнего узла меньше, чем у нагруженного нижнего узла. Чтобы найти усилия в стойке 4, вырежем верхний узел вместе с участком пояса до середины третьей и четвертой панелей (фиг. 10.35). Погонная нагрузка q_y , приходящаяся на этот участок, передается на стойку и сжимающее усилие в ее верхнем конце равно

$$V_B = (q_{y_3} + q_{y_4}) \frac{d}{2} = (15 + 20) 17,5 = 625 \text{ кг}.$$

Усилие у нижнего конца стойки найдем из равновесия вырезанного таким же образом нижнего узла, который, кроме того, нагружен силой P :

$$V_H = P + (q_{y_3} + q_{y_4}) \frac{d}{2} = 200 + 625 = 825 \text{ кг}.$$

Вдоль стойки сжимающее усилие изменяется по прямолинейной зависимости от V_H до V_B .

Контрольные вопросы

1. Какие балки называются тонкостенными?
2. Что называется центром изгиба?
3. Как распределяются касательные напряжения в тонкостенном открытом профиле при изгибе?
4. Объясните, почему происходит закручивание несимметричного открытого профиля от поперечной силы, проходящей через центр тяжести?
5. Изменится ли распределение касательных усилий по сечению открытого профиля, если поперечную силу перенести из центра тяжести в другую точку, например, в центр изгиба и почему?
6. Какое уравнение нужно составить, чтобы найти центр изгиба открытого профиля?
7. По какой формуле вычисляются погонные касательные усилия при изгибе замкнутого профиля? Что представляет собой начальное усилие q_1 ? Чему оно равно?
8. В каком случае центр изгиба замкнутого профиля совпадает с центром тяжести?
9. Как вычисляются начальные усилия многоконтурного профиля?
10. Напишите уравнения замкнутости при изгибе для четырехконтурного профиля.

Глава XI

ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

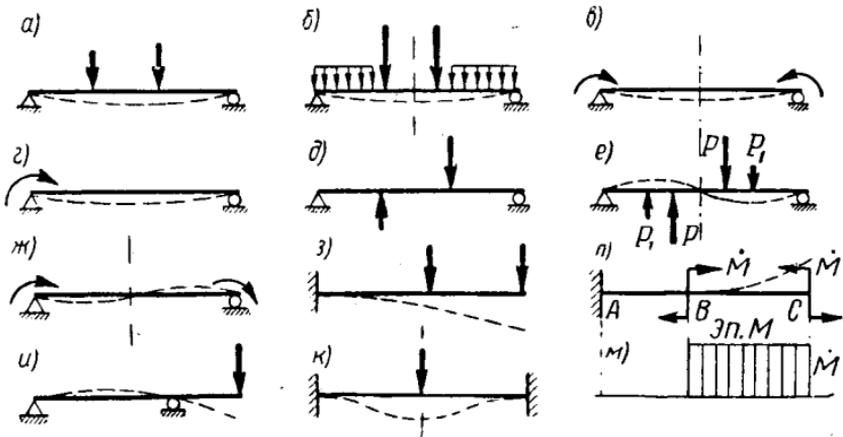
В настоящей главе рассматривается плоская деформация изгиба балки или рамы. Это означает, во-первых, что ось балки или рамы целиком находится в одной плоскости, причем с этой плоскостью всегда совпадает одна из главных осей инерции каждого из поперечных сечений и в этой же плоскости лежат центры изгиба всех сечений. Во-вторых, нагрузки также действуют только в этой плоскости. Другие, более сложные случаи балок и нагрузок рассматриваются в главе XIII. В конце главы рассматривается деформация фермы.

§ 1. Примеры деформации балок и рам

Всякая балка при нагружении изменяет свою форму, как говорят, деформируется. Если деформация исчезает после снятия нагрузки, то она называется *упругой деформацией*. Если не вся деформация исчезает после снятия нагрузки, то остающаяся деформация называется *остаточной* или *пластической деформацией*. Деформация балки при изгибе выражается в *искривлении ее оси*. Так, мы знаем, что первоначально прямая балка, опертая по концам, прогибается под действием нагрузки выпуклостью в ту сторону, куда направлена нагрузка. На фиг. 11. 1,а сплошной линией показана первоначальная ось балки, а пунктиром — ось деформировавшейся балки. Эта кривая ось деформированной балки называется *упругой линией балки* (если деформация упруга). Деформация балки, показанная на фиг. 11. 1,а, изображена в увеличенном масштабе. Действительная деформация балок настолько невелика, как это видно и из примеров, приведенных далее, что на чертеже малого масштаба в подавляющем большинстве случаев изображена быть не может.

В случае нагрузки, симметричной относительно среднего сечения балки (фиг. 11. 1,б и 11. 1,в), упругая линия балки также симметрична относительно этого сечения и наибольший прогиб имеет место по середине балки (если все нагрузки имеют одно и то же направление). При несимметричной нагрузке

(фиг. 11.1,а и 11.1,з) — прогиб по середине балки не будет наибольшим, но, как показывают расчеты, он мало отличается от наибольшего прогиба и может быть принят равным последнему; это замечание относится к нагрузкам, действующим в одну сторону, и несправедливо для нагрузок, действующих в различные стороны (фиг. 11.1,д). В случае так называемой обратно симметричной нагрузки (фиг. 11.1,е и 11.1,ж) упругая линия балки также обратно симметрична: прогиб по середине балки равен нулю, а обе ветви упругой линии — правая и левая — одинаковы, но взаимно противоположно направлены.



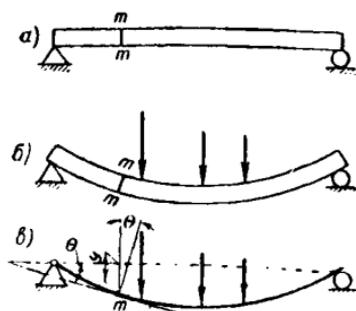
Фиг. 11.1. Деформация балки при изгибе.

а — изгиб балки на двух опорах силами, направленными в одну сторону; прогиб по середине мало отличается от максимального; б, в — случаи симметричной нагрузки; упругая линия балки также симметрична; г, д — несимметричная нагрузка; е, ж — обратно-симметричная нагрузка; з — изгиб консоли; и — изгиб консольной балки; к — изгиб балки с защемленными концами; л — консоль нагружена двумя равными парами; участок АВ не изгибается, так как здесь изгибающий момент равен нулю (фиг. м).

Консоль (фиг. 11.1,з) под нагрузкой, направленной в одну сторону, изгибается выпуклостью, направленной в сторону, противоположную направлению нагрузки. При этом первоначальная ось балки (прямая) есть касательная к упругой линии в точке защемления, если защемление полное и не позволяет поворачиваться опорному сечению. Балка с консолью (фиг. 11.1,и), нагруженная силой на конце консоли, изгибается выпуклостью в сторону, противоположную направлению нагрузки. Балка, заделанная обоими концами (фиг. 11.1,к), изгибается в средней части выпуклостью вниз, а вблизи заделок — выпуклостью вверх.

Определение характера упругой линии по эпюре изгибающих моментов. Не всегда возможно сразу установить характер упругой линии. В таких случаях сле-

дует воспользоваться эпюрой изгибающих моментов. Эпюра изгибающих моментов, если она построена с соблюдением принятых нами правил знаков и откладывания эпюр, всегда располагается со стороны сжатых волокон, следовательно, с вогнутой стороны балки (выпуклая сторона при изгибе соответствует растянутым волокнам). Таким образом по эпюре моментов можно видеть, какой участок балки изгибается и в какую сторону. Так, например, консоль, нагруженная, как изображено на фиг. 11.1, двумя сосредоточенными равными парами, на участке AB не изгибается, так как здесь изгибающий момент равен нулю (на фиг. 11.1, m показана эпюра изгибающих моментов), а на участке BC изгибается, причем выпуклость упругой линии обращена вниз, т. е. в сторону, противоположную той, с которой расположена эпюра изгибающих моментов M .



Фиг. 11.2. Перемещения при изгибе.

$a, б$ — сечение mm при нагружении балки перемещается вниз и поворачивается; $в$ — поступательное перемещение y есть прогиб, а вращательное перемещение θ — угол поворота балки в данном сечении.

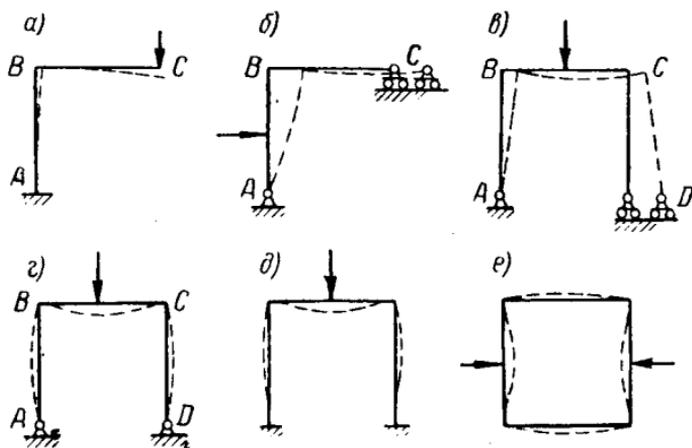
примере (фиг. 11.2). Возьмем произвольное поперечное сечение mm . После нагружения балки поперечной нагрузкой (фиг. 11.2, $б$), вызывающей ее изгиб, сечение mm переместится поступательно вниз и повернется. Эти перемещения, как указано выше, обычно очень малы.

Поступательное перемещение называется *прогибом* балки в данной точке (подразумевается точка на оси балки, совпадающая с центром тяжести данного сечения). Угол, на который отклоняется плоскость сечения от первоначального ее положения, называется *углом поворота* данного сечения. На фиг. 11.2, $в$ показана только ось балки. Пусть до нагружения балки ось ее прямая (пунктир). Ось балки после нагружения, т. е. ее упругая линия, изображена сплошной линией. Там же показаны прогиб — y и угол поворота — θ для некоторого произвольно выбранного сечения m . Угол поворота сечения равен углу между касательной к упругой линии в данном месте и первоначальной осью стержня, так как эти углы имеют взаимно перпендикулярные стороны. Очевидно, в сечениях над опорами прогиб равен

нулю. При симметричной нагрузке (фиг. 11.1,б, 11.1,в и 11.1,к) угол поворота по середине балки также равен нулю. У защемления (фиг. 11.1,з и 11.1,к) и прогиб и угол поворота равны нулю.

Если бы мы имели способ определения перемещений прогиба y и угла поворота θ для любого сечения балки, то мы могли бы постепенно определить деформацию всей балки полностью. Способов определения перемещений существует несколько. Один из них излагается далее (в §§ 3—5).

Жесткость балки. Деформация балки зависит от нагрузки. Чем больше нагрузка, тем больше и деформация. В пределах упругости деформация пропорциональна нагрузке. Вместе с тем очевидно, что деформация зависит и от материала и от размеров балки. Чем больше модуль упругости E материала балки и чем больше момент инерции J ее поперечного сечения, тем меньше деформируется балка при данной нагрузке. Произведение EJ называется жесткостью балки. Как мы увидим далее, деформация балки обратно пропорциональна ее жесткости EJ .



Фиг. 11.3. Деформация рамы при изгибе.

a — рама консольного типа; b — рама с одной шарнирно неподвижной и другой подвижной опорами; $в$ — прямоугольная рама с одной шарнирно неподвижной и другой подвижной опорами; $г$ — прямоугольная рама с шарнирно неподвижными опорами; $д$ — прямоугольная рама с заделанными пятнами; e — замкнутая рама.

Деформация рамы. На фиг. 11.3 показаны примеры деформации плоских рам в простейших случаях. На фиг. 11.3,а изображен ломаный брус, один конец которого защемлен, а другой свободен и нагружен сосредоточенной силой. Деформация бруса показана пунктиром. Сечение A у защемления не получает перемещений. Узел B получает линейное перемещение в

горизонтальном направлении и поворачивается. Перемещение точки B в вертикальном направлении очень мало сравнительно с горизонтальным и его можно считать равным нулю. Конец C бруса получает линейные перемещения в горизонтальном и в вертикальном направлениях и поворачивается. Таким образом здесь мы встречаемся уже с тремя составляющими перемещения сечения: двумя составляющими поступательного перемещения (вертикальной и горизонтальной) и вращательным перемещением. В балках горизонтальные перемещения обычно пренебрежимо малы.

На фиг. 11.3,б показана та же рама, но закрепленная иначе. Один конец ее A закреплен шарнирно неподвижно, другой — на подвижной опоре. При горизонтальной нагрузке слева, как показано, все точки оси рамы, кроме точки A , получают горизонтальные смещения вправо. Сечение A поступательного перемещения не имеет, но поворачивается. Все сечения элемента BC рамы получают, кроме горизонтальных, также вертикальные перемещения, за исключением крайних сечений B и C , которые вертикальных перемещений не имеют. Кроме того, все сечения рамы будут поворачиваться, за исключением одного сечения на участке BC , соответствующего месту наибольшего вертикального перемещения.

На фиг. 11.3,в, 11.3,г и 11.3,д показана П-образная рама, нагруженная сосредоточенной силой по середине при различном устройстве опор. На фиг. 11.3,в одна опора подвижная, а другая неподвижная. Вследствие изгиба горизонтального элемента BC рамы узлы B и C поворачиваются и расстояние между точками A и D увеличивается. В случае неподвижных опор (фиг. 11.3,г) такое расхождение стоек рамы невозможно. Горизонтальные реакции опор A и D , стесняющих эту деформацию, изгибают при этом стойки рамы. Упругая линия горизонтального участка BC имеет по середине выпуклость книзу, а вблизи узлов — кверху (деформация на рисунке сильно увеличена). В случае защемления концов (фиг. 11.3,д) упругая линия стойки на нижнем участке (вблизи защемления) обращена своей выпуклостью внутрь рамы, а на верхнем участке — наружу (точка на упругой линии, разделяющая эти участки, называется точкой перегиба).

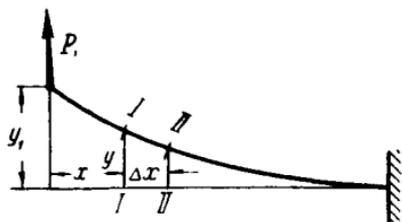
На фиг. 11.3,е изображена замкнутая рама. При данной симметричной нагрузке все узлы рамы поворачиваются одинаково. Деформация рамы показана пунктиром. Упругие линии стоек содержат по две точки перегиба.

§ 2. Определение перемещений

Потенциальная энергия деформации изгиба. Сила, деформирующая балку, раму или другую конструкцию, производит при этом работу. Пусть на балку (фиг. 11.4)

действует сила P_1 . Соответствующий прогиб равен y_1 . Выше, в главе III, определялась работа внешней силы на соответствующем упругом перемещении. Она равняется половине произведения силы на перемещение. Следовательно, в нашем случае работа, произведенная силой P_1 , равна $\frac{1}{2} P_1 y_1$. В этом помогают

убедиться также следующие примитивные соображения. Работа силы вычисляется в механике, как произведение силы на путь, пройденный силой. Если бы в нашем случае сила P_1 была постоянной на всем протяжении ее пути y_1 , то работа ее равнялась бы $P_1 y_1$. Но сила P_1 изменяется в процессе нагружения и деформации балки от нуля до полного ее значения P_1 , так как нагружение происходит не мгновенно, а в течение некоторого времени (с возрастанием силы деформация возрастает пропорционально ей). Средняя величина силы, действующей на пути y_1 , равна $\frac{1}{2} P_1$, и, следовательно, произведенная работа равна $\frac{1}{2} P_1 y_1$. Обозначим ее через A .



Фиг. 11.4. Консоль изгибается силой P_1 . Потенциальная энергия деформации изгиба равна $\frac{1}{2} P_1 y_1$.

Применим закон сохранения энергии: произведенная работа $A = \frac{P_1 y_1}{2}$ не исчезла, она перешла в другой вид энергии — потенциальную¹ энергию упруго деформированной балки. Обозначая потенциальную энергию через U , будем иметь равенство

$$U = A = \frac{P_1 y_1}{2}. \quad (1)$$

Если бы внешних сил было несколько, то потенциальная энергия выразилась бы следующей суммой:

$$U = \frac{P_1 y_1}{2} + \frac{P_2 y_2}{2} + \frac{P_3 y_3}{2} + \dots = \frac{1}{2} \sum P_i y_i. \quad (2)$$

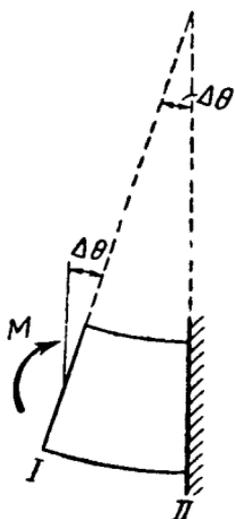
Теперь определим потенциальную энергию нашей упругой системы другим путем.

Рассмотрим деформацию элемента балки, выделенного мысленно двумя поперечными сечениями I и II (фиг. 11.4), отстоящими друг от друга на малом расстоянии Δx . На фиг. 11.5 показан этот элемент после деформации балки. Под влиянием

¹ В пределах упругих деформаций переход работы в потенциальную энергию деформированной системы есть процесс обратимый. Так, например, пружина часов возвращает работу, затраченную на завод ее.

изгибающего момента M размеры элемента изменились¹. Часть его, расположенная в сжатой зоне балки, т. е. выше нейтрального слоя, укоротилась, а нижняя часть, находящаяся в растянутой зоне, удлинилась. Только средние волокна (в нейтральном слое) сохранили свою прежнюю длину Δx . Вследствие этого сечение I наклонилось по отношению к сечению II . Угол, образуемый плоскостями сечений, весьма мал (так как длина элемента Δx весьма мала), обозначим его через $\Delta\theta$.

Выразим работу, выполненную изгибающим моментом M при повороте сечения I относительно сечения II на угол $\Delta\theta$. Эта работа также весьма мала, обозначим ее через ΔA . Так как мы рассматриваем поворот сечения I относительно сечения II , последнее будем полагать неподвижным (фиг. 11.5). Работа момента определяется произведением момента на угол поворота. Изгибающий момент изменяется в процессе деформации от нуля до полной величины M . В начале деформации балки он равен нулю. С увеличением нагрузки он пропорционально возрастает. Подобно предыдущему получаем среднюю величину момента равной $\frac{M}{2}$. Умножив ее на соответствующий угол поворота $\Delta\theta$, получим произведенную работу



Фиг. 11.5. Изгибающий момент M деформирует элемент балки на угол $\Delta\theta$. Произведенная при этом работа равна $\frac{1}{2} M \Delta\theta$.

$$\Delta A = \frac{M}{2} \Delta\theta. \quad (3)$$

Выше [в гл. IX, § 3, формула (3)] было получено, что $\Delta\theta = \frac{M\Delta x}{EJ}$ (где E — модуль упругости материала балки, а J — момент инерции площади поперечного сечения балки относительно его центральной оси). Следовательно, $\Delta A = \frac{M^2\Delta x}{2EJ}$.

Работа, затраченная на упругую деформацию элемента, целиком переходит в потенциальную энергию. Обозначая потенциальную энергию элемента через ΔU , напишем $\Delta U = \Delta A$ или $\Delta U = \frac{M^2\Delta x}{2EJ}$. Потенциальную энергию всей балки найдем, просуммировав энергию всех элементов, составляющих балку:

$$U = \sum \frac{M^2\Delta x}{2EJ}. \quad (4)$$

¹ Деформацией сдвига, как указано далее, пренебрегаем.

Полученная сумма выражает потенциальную энергию только деформации изгиба балки (вызываемой изгибающим моментом). Потенциальную энергию деформации сдвига (вызываемой поперечной силой) мы здесь не учитывали. Расчеты показывают, что деформация балок и рам почти полностью определяется действием изгибающих моментов, влияние же поперечных сил, а также и продольных весьма незначительно и им можно пренебречь. Если бы мы учли влияние поперечных и продольных сил, то получили бы два дополнительных слагаемых. Вместо выражения (4) для потенциальной энергии бруса мы имели бы

$$U = \sum \frac{M^2 \Delta x}{2EJ} + \sum \frac{Q^2 \Delta x}{2GF} k + \sum \frac{N^2 \Delta x}{2EF} \quad (5)$$

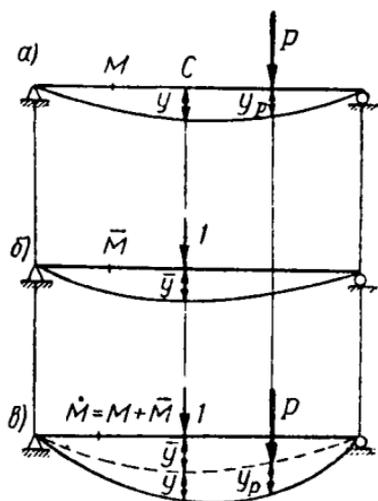
Здесь G — модуль упругости материала бруса при сдвиге; F — площадь поперечного сечения бруса; k — коэффициент, зависящий от формы сечения; в случае прямоугольного сечения коэффициент k равен 1,2 и в случае двутавра — 1,1.

Определение перемещений. Выведем общую формулу для определения перемещений любого сечения балки или рамы. Пусть дана некоторая балка (или другая упругая система), нагруженная изгибающей нагрузкой (фиг. 11.6, а). Для упрощения вывода на фигуре показана одна сила P , но их может быть сколько угодно. Требуется определить прогиб y балки в некотором заданном сечении C . Обозначим, как всегда, через M изгибающий момент в текущем сечении балки. Тогда потенциальная энергия деформации балки выразится [см. формулу (4)] так:

$$U = \sum \frac{M^2 \Delta x}{2EJ}.$$

Работа A внешней силы P равна $\frac{P y_p}{2}$, где y_p — прогиб в точке приложения силы P . Так как $A = U$, то

$$\sum \frac{M^2 \Delta x}{2EJ} = \frac{P y_p}{2} \quad (6)$$



Фиг. 11.6. К выводу формулы перемещений в упругой системе.

а — действительное грузовое состояние системы; б — фиктивное («единичное») состояние; в — совместное действие действительной и фиктивной нагрузок.

Теперь рассмотрим состояние балки, показанное на фиг. 11.6,б. Балка нагружена силой, равной единице, в точке C . Такое состояние балки в действительности не существует, оно является вспомогательным при расчете и называется фиктивным или единичным состоянием¹. Обозначим изгибающий момент в произвольном сечении балки в рассматриваемом единичном состоянии через M . Тогда потенциальная энергия запишется так:

$$\bar{U} = \sum \frac{\bar{M}^2 \Delta x}{2EJ}$$

и работа внешней силы (равной единице):

$$\bar{A} = \frac{1\bar{y}}{2},$$

где \bar{y} — прогиб, вызываемый силой, равной единице в точке C . Поскольку $\bar{U} = \bar{A}$, будем иметь

$$\sum \frac{\bar{M}^2 \Delta x}{2EJ} = \frac{1\bar{y}}{2}. \quad (7)$$

И, наконец, рассмотрим состояние балки, показанное на фиг. 11.6,в, где на балку действуют одновременно заданная нагрузка P и фиктивная сила, равная единице. Обозначим изгибающий момент в произвольном сечении балки в этом состоянии через M . Очевидно, $M = M + \bar{M}$. Потенциальная энергия выражается так:

$$\dot{U} = \sum \frac{(M + \bar{M})^2 \Delta x}{2EJ}.$$

Раскрывая скобки, получим

$$\dot{U} = \sum \frac{M^2 \Delta x}{2EJ} + \sum \frac{M\bar{M} \Delta x}{EJ} + \sum \frac{\bar{M}^2 \Delta x}{2EJ}.$$

Работу внешних сил выразим, предполагая, что сначала приложена сила, равная единице, а затем нагрузка P . Деформация балки, вызываемая единичной силой, показана на фиг. 11.6,в пунктиром; соответствующая работа равна $\frac{1\bar{y}}{2}$. Прилагая далее нагрузку P , получим дополнительную деформацию балки (см. фиг. 11.6,а): дополнительный прогиб в точке C равен y и под силой P равен y_p . При этом производится дополнительная работа:

$$\frac{P y_p}{2} + 1y.$$

¹ Сила, равная единице, называется также единичной силой

Последнее слагаемое не содержит в знаменателе 2, так как вся единичная сила проходит весь дополнительный путь y не изменяясь (являясь, так сказать, „пассажиром“). Таким образом полная работа внешних сил в рассматриваемом состоянии

$\dot{A} = \frac{1\bar{y}}{2} + \frac{P y_p}{2} + 1 y$. Приравнявая выражения \dot{U} и \dot{A} , будем иметь

$$\sum \frac{M^2 \Delta x}{2EJ} + \sum \frac{M\bar{M}\Delta x}{EJ} + \sum \frac{\bar{M}\Delta x}{2EJ} = \frac{1\bar{y}}{2} + \frac{P y_p}{2} + 1 y.$$

Отсюда, учитывая равенства (6) и (7), найдем

$$\sum \frac{M\bar{M}\Delta x}{EJ} = 1 y$$

или

$$y = \sum \frac{M\bar{M}\Delta x^1}{EJ}. \quad (8)$$

Подчеркиваем правило знаков. Очевидно, что если направление перемещения y совпадает с направлением единичной силы, то результат вычисления по формуле (8) будет иметь положительный знак. И, наоборот, отрицательный результат означает, что направление искомого перемещения противоположно направлению направлению единичной силы.

В случае балки постоянного сечения постоянный знаменатель EJ может быть вынесен за знак суммы и формула (8) получает вид

$$y = \frac{1}{EJ} \sum M\bar{M}\Delta x. \quad (9)$$

Пользуясь формулами (8) или (9), можно найти перемещение любого сечения балки, причем не только линейное, а также и угловое. В последнем случае нужно лишь вместо силы, равной единице прикладывать момент, равный единице (см. далее § 8). Примем общее обозначение δ для перемещения как линейного, так и углового; тогда формула (8) запишется так:

$$\delta = \sum \frac{M\bar{M}\Delta x}{EJ}. \quad (10)$$

¹ При выводе формулы предполагалось, что Δx мало. Используя при выводе методы высшей математики, рассматривают вместо Δx бесконечно малую величину и обозначают ее через dx . Знак суммы заменяется символом \int . Самая сумма называется интегралом. Применяя эти обозначения, будем иметь формулу (8) в виде

$$y = \int \frac{M\bar{M}dx}{EJ}.$$

В таком виде формула перемещений и дается обычно в курсах сопротивления материалов и строительной механики для рам и балок.

Если бы мы для выражения потенциальной энергии пользовались не сокращенной формулой (4), а полной формулой (5), то для перемещения δ мы получили бы вместо формулы (10) такую формулу:

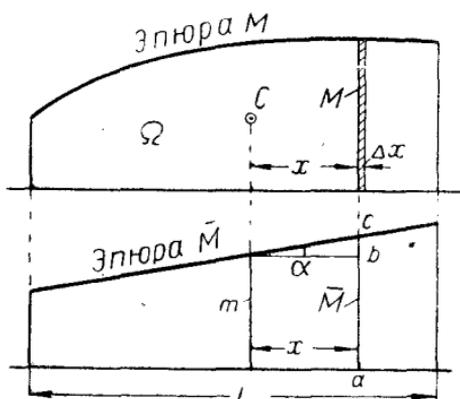
$$\delta = \sum \frac{M\bar{M}\Delta x}{EJ} + \sum \frac{Q\bar{Q}\Delta x}{GF} k + \sum \frac{N\bar{N}\Delta x}{EF}. \quad (10')$$

Здесь \bar{Q} и \bar{N} — соответственно поперечная и продольная силы при единичной нагрузке.

В следующих параграфах рассмотрим применение полученных формул в практических расчетах.

§ 3. Правило Верещагина

Вычисление перемещений по формулам (8)—(10) удобно производить при помощи эюр изгибающих моментов M и \bar{M} на



Фиг. 11.7. «Произведение» эюр M и \bar{M} (т. е. $\sum M\bar{M}\Delta x$) по Верещагину равно Ωm .

где m — ордината эюры \bar{M} , находящаяся под центром тяжести C площади эюры M , α — угол наклона прямой линии, изображающей эюру \bar{M} . Подставляя написанное выражение \bar{M} в формулу (9), будем иметь

$$y = \frac{\sum M\bar{M}\Delta x}{EJ} = \frac{\sum M(m+x \operatorname{tg} \alpha)\Delta x}{EJ} = \frac{m}{EJ} \sum M\Delta x + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EJ} \sum Mx \Delta x. \quad (11)$$

Рассмотрим каждую из двух полученных сумм. Произведение $M\Delta x$ представляет собой площадь заштрихованного на фиг. 11.7 прямоугольника (обозначим ее через $\Delta\Omega$). Следовательно, сумма $\sum M\Delta x = \sum \Delta\Omega$, взятая на всей длине l , равна площади Ω всей эюры M . Таким образом $\sum M\Delta x = \Omega$. Вторую сумму запишем так:

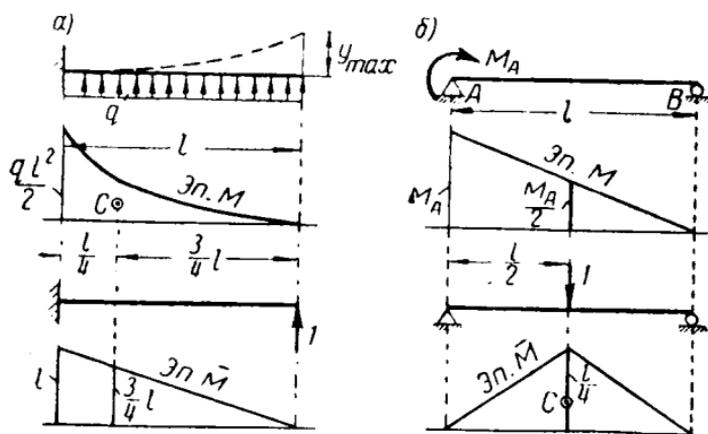
$$\sum xM\Delta x = \sum x\Delta\Omega.$$

Она представляет собой статический момент площади Ω [см. гл. I, § 5, формула (9a)] относительно вертикали, проходящей через точку C , от которой отсчитываются значения x . Этот статический момент равен нулю, так как точка C по условию есть центр тяжести площади Ω . Следовательно, последнее слагаемое в выражении (11) отпадает, и окончательно формула для перемещения y получает вид

$$y = \frac{\sum M \bar{M} \Delta x}{EJ} = \frac{\Omega m}{EJ}. \quad (12)$$

Итак, перемещение y по Верещагину равно произведению площади Ω эпюры изгибающих моментов M от заданной нагрузки (эта эпюра может быть произвольного вида) на ординату m эпюры M — от единичной силы (эта эпюра предполагается обязательно прямолинейной), соответствующую центру тяжести площади эпюры M (см. фиг. 11.7), деленному на жесткость EJ балки.

Пример 1. Рассмотрим пример применения правила Верещагина. Пусть требуется определить максимальный прогиб консоли (фиг. 11.8, а) при загрузении ее равномерно распределенной нагрузкой заданной интенсивности q .



Фиг. 11.8.

а — определение максимального прогиба консоли под действием равномерно распределенной нагрузки;
б — определение прогиба по середине простой балки, нагруженной моментом на конце.

Построим эпюру изгибающих моментов M . Она представится квадратной параболой (см. фиг. 11.8). Наибольшая ордината этой параболы (у заземления) равна $\frac{ql^2}{2}$. Площадь такой эпюры равна одной трети произведения основания на высоту: $\Omega = \frac{1}{3} l \frac{ql^2}{2} = \frac{ql^3}{6}$ (см. гл. VI, § 5, пример 1). Центр тяжести C

площади эпюры находится на расстоянии $\frac{1}{4}l$, как показано на фигуре.

Искомый максимальный прогиб y_{\max} , очевидно, имеет место на конце консоли. Следовательно, здесь и приложим силу, равную единице. Эпюра моментов от этой силы прямолинейна (см. эпюру \bar{M} на фиг. 11.8,а). Ордината (m) этой эпюры, соответствующая центру тяжести S эпюры M , равна $\frac{3}{4}l$, как это нетрудно установить из подобия треугольников. Таким образом искомый прогиб

$$y_{\max} = \frac{\Omega m}{EJ} = \frac{\frac{ql^3}{6} \frac{3}{4}l}{EJ} = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

Возьмем некоторые числовые данные: длина консоли $l = 1,2 \text{ м} = 120 \text{ см}$, поперечное сечение консоли круглое $d = 2 \text{ см}$, материал — сталь (модуль упругости $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$), интенсивность нагрузки q (включая и собственный вес балки) равна $0,1 \text{ кг/см}$. Момент инерции сечения будет $J = 0,05d^4 = 0,05 \cdot 2^4 = 0,8 \text{ см}^4$ и прогиб

$$y_{\max} = \frac{0,1 \cdot 120^4}{8 \cdot 2000000 \cdot 0,8} = 1,62 \text{ см}.$$

Обратимость порядка «перемножения» эпюр. Процесс вычисления перемещения по формуле Верещагина требует, как видим, построения двух эпюр: M и \bar{M} . Затем площадь первой эпюры умножается на соответствующую ординату второй (прямолинейной).

Эта операция часто называется «перемножением» эпюр. Заметим, что порядок «перемножения» можно менять на обратный, в тех случаях когда эпюра \bar{M} также прямолинейна. В этих случаях можно площадь Ω взять из эпюры \bar{M} и соответствующую ей ординату t из эпюры M , так как M и \bar{M} в сумме $\sum M\bar{M}\Delta x$ взаимозаменяемы (произведение $M\bar{M}$ не изменяется от перестановки сомножителей).

Пример 2. Пусть, например, требуется определить прогиб по середине балки, загруженной сосредоточенной парой M_A у опоры A (фиг. 11.8,б). В данном случае удобно применить именно обратный порядок „перемножения“. Эпюра моментов M от заданной нагрузки в данном случае прямолинейна, а эпюра \bar{M} от единичной силы ломаная. Возьмем площадь Ω из

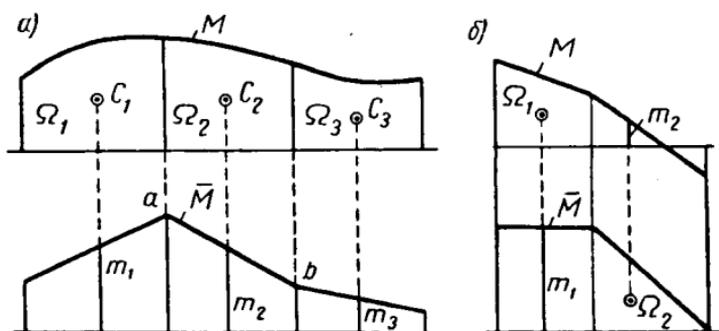
эпюры \bar{M} , а ординату m — из эпюры M . Получим $\Omega = \frac{1}{2} l \frac{l}{4} = \frac{l^2}{8}$; $m = \frac{M_A}{2}$.

Искомый прогиб

$$y = \frac{\Omega m}{EJ} = \frac{\frac{l^2}{8} \frac{M_A}{2}}{EJ} = \frac{M_A l^3}{16EJ}.$$

Другие примеры применения правила Верещагина даны ниже.

Случай эпюры в виде ломаной. Если ни одна из эпюр M или \bar{M} не является прямолинейной на всей длине бруса,



Фиг. 11.9.

a — «перемножение» эпюр M и \bar{M} по Верещагину, в случае когда одна из эпюр ломаная; *b* — если обе эпюры являются прямолинейными (на протяжении каждого из участков), то порядок «перемножения» произволен.

но одна из них изображается ломаной линией, то «перемножение» таких эпюр также можно произвести по правилу Верещагина, применяя его к каждому прямолинейному участку в отдельности. Пусть, например, эпюры M и \bar{M} имеют вид, показанный на фиг. 11.9, *a*. Через точки *a* и *b* перелома эпюры \bar{M} проведем вертикали, разделяя ими площадь эпюры M на части Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 . Находим центры тяжести C_1 , C_2 и C_3 этих частей и соответствующие им ординаты m_1 , m_2 и m_3 из эпюры \bar{M} . К каждому из трех участков можем применить формулу Верещагина. Получим

$$\frac{\sum M\bar{M}\Delta x}{EJ} = \frac{1}{EJ} (\Omega_1 m_1 + \Omega_2 m_2 + \Omega_3 m_3)$$

или при любом числе участков

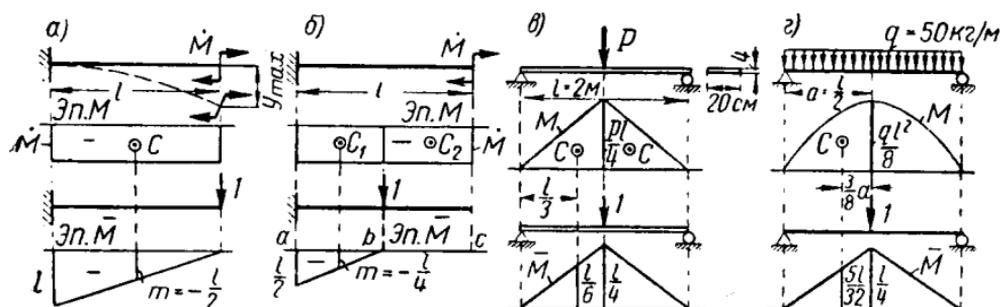
$$y = \frac{\sum \Omega m}{EJ}. \quad (13)$$

Если эпюра M прямолинейна или ломаная, то можно, как это было указано выше, площади $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ взять из эпюры \bar{M} , а ординаты m_1, m_2, m_3 — из эпюры M . Наконец, на каждом из участков может быть принят свой порядок перемножения, независимо от других участков. Так, например, на первом участке (фиг. 11.9,б) площадь Ω_1 можно взять из эпюры M и ординату m_1 — из эпюры \bar{M} , а на втором участке площадь Ω_2 взять, наоборот, из эпюры \bar{M} и ординату m_2 — из эпюры M . Необходимо только, чтобы ордината m была взята из эпюры, прямолинейной на данном участке.

Иногда вычисление площадей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ и нахождение их центров тяжести C_1, C_2, C_3 затруднительны. Одним из приемов, упрощающих вычисления, является дальнейшая разбивка площадей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ на составляющие, как это показано на примере 5 в следующем параграфе. При невозможности применить указанный прием используются приближенным решением, изложенным далее в § 5.

§ 4. Примеры определения перемещений

Прогиб балки. *Пример 1.* Определить максимальный прогиб консоли (фиг. 11.10,а) длиной l , нагруженной сосредоточенным моментом на конце M .



Фиг. 11.10.

а — определение максимального прогиба консоли, нагруженной моментом на конце; б — определение прогиба по середине той же консоли; в и г — определение прогиба простой балки при действии сосредоточенной и равномерно распределенной нагрузки.

Построим эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки — она имеет вид прямоугольника (см. эпюру M). Площадь этой эпюры $\Omega = -Ml$. Центр тяжести ее находится по середине. Теперь рассмотрим «единичное» состояние балки. Искомый максимальный прогиб, очевидно, будет иметь место у свободного конца балки; следовательно, здесь и должна быть приложена единичная сила. Построив эпюру изгибающих моментов от

единичной силы (см. эпюру M), находим ординату ее $m = -\frac{l}{2}$, расположенную под центром тяжести C площади эпюры M . По формуле (12) получим:

$$y = \frac{\Omega m}{EJ} = \frac{(-Ml) \left(-\frac{l}{2}\right)}{EJ} = \frac{Ml^2}{2EJ}.$$

Положительный знак найденного результата означает, что направление прогиба совпадает с принятым направлением единичной силы. Пунктиром показан характер упругой линии балки.

Пример 2. Для консоли, рассмотренной в предыдущем примере, определить прогиб по середине. В данном случае эпюра M имеет прежний вид, но эпюра M иная; единичную силу на этот раз прикладываем посередине балки (фиг. 11.10,б); получаем эпюру M , состоящую из двух участков — ab и bc . Участок ab представляется наклонной прямой, а на участке bc все ординаты эпюры равны нулю. Применим правило Верещагина для каждого из участков в отдельности [см. формулу (13)]:

$$y = \frac{\sum \Omega m}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\left(-M \frac{l}{2}\right) \left(-\frac{l}{4}\right) + \left(-M \frac{l}{2}\right) 0 \right] = \frac{Ml^2}{8EJ}.$$

Как видим, прогиб по середине в четыре раза меньше, чем прогиб на конце (см. предыдущий пример).

Пример 3. Определить максимальный прогиб сосновой доски (фиг. 11.10,в) поперечным сечением 20×4 см при нагружении ее по середине сосредоточенной силой P , равной 100 кг. Модуль упругости материала равен $100\,000$ кг/см².

Максимальный прогиб в данном случае имеет место по середине балки. Здесь и приложим силу, равную единице. Эпюры M и \bar{M} показаны на фиг. 11.10,в. Каждая из эпюр состоит из двух симметричных участков. Применим правило Верещагина к участкам эпюр, соответствующим первой половине балки:

$$\frac{\Omega m}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{Pl}{4} \right) \left(\frac{l}{6} \right) = \frac{Pl^3}{96EJ}.$$

Для второй половины получим то же. Таким образом искомым прогиб

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{96EJ} \cdot 2 = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Подставим сюда числовые значения: $P = 100$ кг, $l = 200$ см, $E = 100\,000$ кг/см², $J = \frac{20 \cdot 4^3}{12} = 107$ см⁴. Получим

$$y_{\max} = \frac{100 \cdot 200^3}{48 \cdot 100\,000 \cdot 107} = 1,55 \text{ см.}$$

Пример 4. Определить прогиб той же доски, в том случае если нагрузка 100 кг будет равномерно распределена по всей длине доски.

Эюра изгибающих моментов M от заданной нагрузки изобразится в данном случае квадратной параболой (см. фиг. 8. 19 и фиг. 11. 10,г). Максимальная ордината этой эюры равна $\frac{ql^2}{8}$, где q — интенсивность сплошной нагрузки (в нашем случае $q = \frac{100}{2} = 50 \text{ кг/м} = 0,5 \text{ кг/см}$). Площадь эюры, представляемая сегментом параболы, равна двум третям произведения основания сегмента на его высоту (см. гл. VI, § 5, пример 1):

$$\frac{2}{3} l \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{12}.$$

Эюра моментов \bar{M} от единичной силы (на фиг. 11. 10,г внизу) такая же, как и в предыдущем примере. Снова применим правило Верещагина для одной половины балки. Площадь полусегмента параболы

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{ql^3}{12} = \frac{ql^3}{24},$$

центр тяжести находится на расстоянии $\frac{3}{8}a$ от края (см. фиг. 6. 14), как показано на фигуре, где a — длина полухорды. Соответствующая ордината эюры \bar{M} равна $m = \frac{5}{8} \frac{l}{4} = \frac{5}{32} l$. Определяем искомый прогиб:

$$y = \frac{\Omega m}{EJ} 2 = \frac{1}{EJ} \frac{ql^3}{24} \frac{5l}{32} 2 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}.$$

Подставляя числовые значения, находим

$$y = \frac{5 \cdot 0,5 \cdot 200^4}{384 \cdot 100\,000 \cdot 107} = 0,973 \text{ см.}$$

В данном случае, как и следовало ожидать, прогиб значительно меньше, чем в случае сосредоточенной силы.

Пример 5. Обратимся к более сложному случаю; рассмотрим снова балку постоянного сечения с равномерно распределенной нагрузкой, но пусть теперь требуется определить прогиб y_c балки в некоторой произвольно взятой точке C .

Эюры M и \bar{M} показаны на фиг. 11. 11,а. Разбиваем эюру M на два участка так, чтобы каждому участку соответствовал прямолинейный участок эюры \bar{M} . Искомый прогиб будет

$$y_c = \frac{\Omega_1 m_1 + \Omega_2 m_2}{EJ} \quad (14)$$

Но вычисление площадей Ω_1 и Ω_2 и нахождение их центров тяжести затруднительно. Разобьем площади Ω_1 и Ω_2 на более простые части. В нашем случае эпюра M , как уже известно, является квадратной параболой. Разбивая площадь Ω_1 на две Ω'_1 и Ω''_1 , как показано на фиг. 11.11 внизу, будем иметь $\Omega'_1 = \frac{qa^3}{12}$, где a — длина участка (см. гл.

VIII, § 6, фиг. 8.24). Центр тяжести площади Ω_1 находится по середине участка. Площадь Ω'_1 нетрудно найти как площадь треугольника. Вместо произведения $\Omega_1 m_1$ будем иметь $\Omega_1 m_1 + \Omega'_1 m'_1$. Точно так же можно вычислить и произведение $\Omega_2 m_2$. Таким образом вместо суммы двух слагаемых по формуле (14) будем иметь сумму четырех слагаемых, но зато более просто вычисляемых. В случае нагрузки, распределенной по закону треугольника или трапеции, мы имели бы эпюру M в виде кубической параболы. Данные о площадях и центрах тяжести фигур, ограниченных квадратными и кубическими параболой, можно найти во всех технических справочниках. Там же имеются и готовые формулы для вычисления прогибов и углов поворота для некоторых случаев балок и нагрузок.

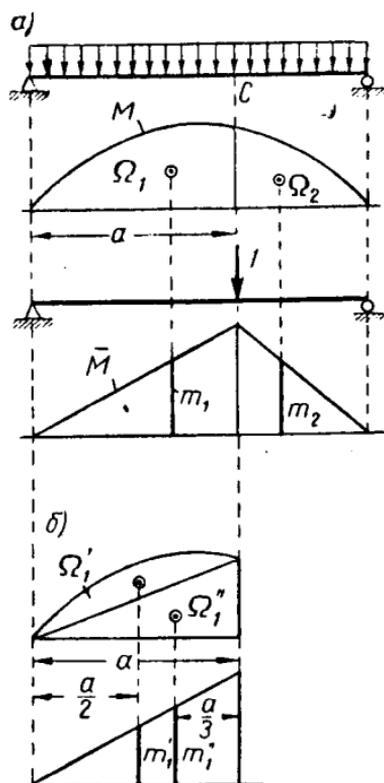
Задачи. 1. Определить максимальный прогиб консоли постоянного сечения, нагруженной сосредоточенной силой P на конце.

Ответ: $y_{\max} = \frac{Pl^3}{3EJ}$.

2. Для консоли определить прогиб на конце (y_{\max}) в случае нагрузки в виде двух сосредоточенных пар M , как показано на фиг. 11.12,а. Момент сосредоточенной пары M равен 7,2 кгм. Изобразить на рисунке вид упругой линии.

Ответ: $y_{\max} = \frac{Ml^2}{6EJ} = 1,08$ см. Упругая линия показана на

фиг. 11.12,а пунктиром.

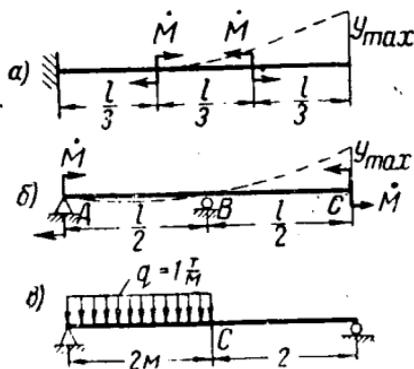


Фиг. 11.11. К вычислению прогиба в произвольном сечении простой балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

a — действительное и «единичное» состояние. Соответственно эпюры моментов M и M ; б — разбивка сложной площади на простые составляющие для удобства «перемножения».

3. Балка длиной l постоянного сечения лежит на двух опорах A и B , как показано на фиг. 11.12,б, и нагружена сосредоточенными парами \dot{M} по концам. Определить прогиб y_c конца консоли и нарисовать упругую линию. Ответ: $y_c = \frac{\dot{M}l^2}{4EJ}$. Упругая линия показана на фиг. 11.12,б пунктиром.

4. Определить прогиб y_{cp} по середине стальной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой на протяжении половины пролета, как показано на фиг. 11.12,в. Момент инерции сечения балки $J=1000 \text{ см}^4$, модуль упругости $E=2\,000\,000 \text{ кг/см}^2$. Указание: использовать прием разбивки площади эпюры M , показанный в примере 5. Ответ: $y_{cp}=0,833 \text{ см}$.



Фиг. 11.12. Задачи.

a и b — определить максимальный прогиб; v — определить прогиб по середине.

прикладывать не силу, равную единице, а пару с моментом, равным единице. Поясним порядок расчета на примерах.

Пример 6. Определить угол поворота конца консоли, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (см. пример 1 в § 3). На фиг. 11.13,а показаны эпюры M и \dot{M} . Эпюра M имеет, конечно, прежний вид (см. фиг. 11.8,а), а эпюра \dot{M} иная, так как в данном случае приложен момент, равный единице. Искомый угол поворота

$$\theta = \frac{\Omega m}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{3} l \frac{ql^2}{2} (-1) \right] = \frac{ql^3}{6EJ}.$$

Пример 7. Определить угол поворота конца доски, рассмотренной в примере 3. На фиг. 11.13,б показаны эпюры M и \dot{M} . Получим

$$\theta = \frac{\Omega m}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} l \frac{Pl}{4} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{Pl^2}{16EJ}$$

или после подстановки числовых значений ($P=100 \text{ кг}$, $l=200 \text{ см}$, $E=100\,000 \text{ кг/см}^2$, $J=107 \text{ см}^4$) $\theta = -0,0234$ радиан $\approx -0,0234 \cdot 57,3^\circ \approx -1,34^\circ = -1^\circ 20' 24''$. Отрицательный знак

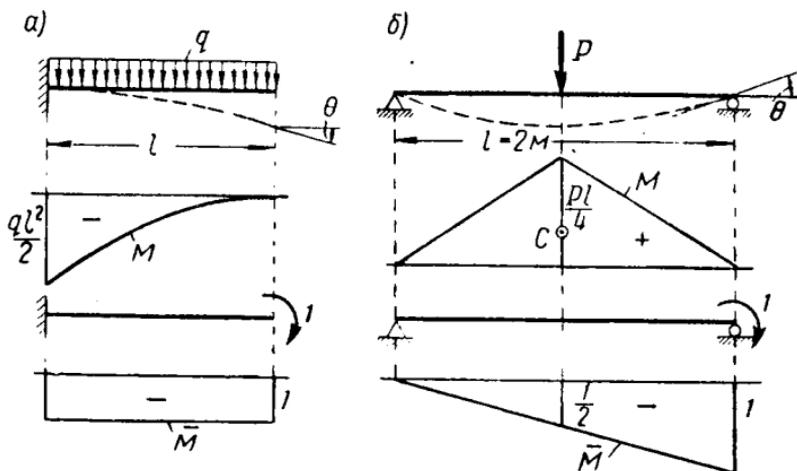
* Один радиан равен $57,3^\circ$.

результата показывает, что направление поворота рассматриваемого конца балки противоположно принятому направлению единичного момента, что соответствует действительности.

Задача. Определить угол поворота конца этой же балки при нагрузке, изображенной на фиг. 11. 10,г (пример 4). **Ответ:**

$$\theta = \frac{ql^3}{24EJ} = 0,0156.$$

Предлагается читателю определить также углы поворота сечений балок, изображенных на фиг. 11. 10.



Фиг. 11. 13. Определение углов поворота.

a — на конце консоли, несущей равномерно распределенную нагрузку, и *б* — на конце простой балки, нагруженной сосредоточенной силой посередине.

В единичном состоянии вместо силы, равной единице, прикладывается пара с моментом, равным единице.

Определение перемещений в рамах. Определение перемещений для бруса с осью не прямой, а представляющей некоторую ломаную линию, также можно производить по формулам (8) — (10), так как вывод их можно повторить для любой упругой системы. Ниже на примерах показано вычисление перемещений сечений рам постоянного сечения при помощи правила Верещагина.

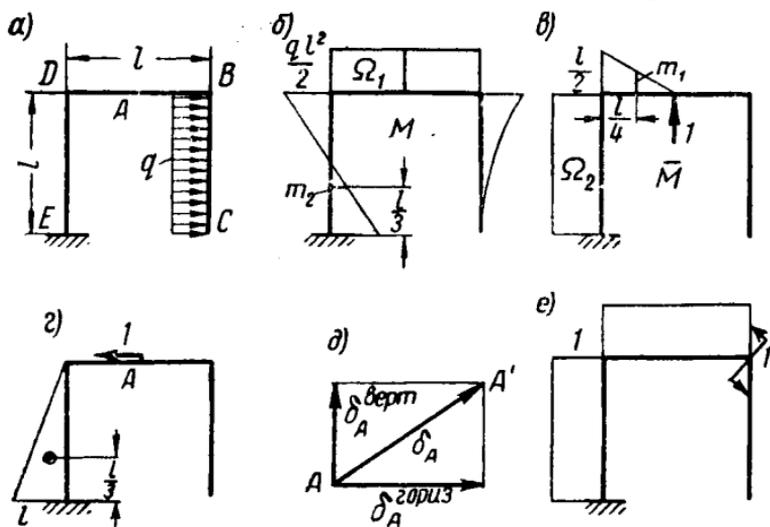
Пример 8. Дана П-образная рама, один конец которой заземлен, а другой свободен. Определить вертикальную составляющую перемещения сечения *A*, взятого по середине горизонтального участка рамы при нагрузке, показанной на фиг. 11. 14,а.

Построим эпюру изгибающих моментов *M* от заданной нагрузки. Полученная эпюра, отложенная со стороны сжатых волокон бруса, показана на фиг. 11. 14,б. Силу, равную единице, нужно приложить по направлению искомого перемещения в точке *A*, т. е. вертикально. Соответствующая эпюра моментов \bar{M}

изображена на фиг. 11.14,в. Теперь остается произвести «перемножение» эпюр по правилу Верещагина. Применим его последовательно для каждого из участков CB , BA , AD и DE рамы. На первых двух участках момент \bar{M} равен нулю и, следовательно, произведение по Верещагину также будет равно нулю. На участке AD площадь (Ω_1) эпюры M равна $\frac{l}{2} \frac{ql^2}{2} = \frac{ql^3}{4}$ и соответствующая ей ордината m_1 (из эпюры \bar{M}) равна $\frac{l}{4}$. Следовательно,

$$\left(\frac{\Omega m}{EJ}\right)_{AD} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql^3}{4}\right) \frac{l}{4} = \frac{ql^4}{16EJ}.$$

На участке DE площадь (Ω_2) возьмем из эпюры \bar{M} и соответствующую ей ординату — из эпюры M (обе «перемножаемые»



Фиг. 11.14. К определению перемещений в рамах.

a — заданная рама и нагрузка; b — соответствующая эпюра изгибающих моментов; $в$ — «единичная» эпюра для вычисления вертикального перемещения точки A рамы; $г$ — «единичная» эпюра для вычисления горизонтального перемещения точки A ; $д$ — определение полного перемещения точки A ; $е$ — «единичная» эпюра для вычисления угла поворота узла B .

эпюры прямолинейны и, следовательно, можно применить и обратный порядок при перемножении). Центр тяжести площади Ω_2 (фиг. 11.14,в) находится на середине высоты стойки. Соответствующая ей ордината m_2 из эпюры M , как видим, равна нулю, т. е. получим $\left(\frac{\Omega m}{EJ}\right)_{DE} = 0$. Таким образом искомый прогиб $\delta_A^{\text{верт}} = \frac{ql^4}{16EJ}$. Положительный ответ означает,

что точка A перемещается вверх (по направлению единичной силы).

Пример 9. Определить горизонтальную составляющую перемещения точки A в предыдущем примере. Направляя в данном случае единичную силу горизонтально, будем иметь эпюру \bar{M} , показанную на фиг. 11.14,з. Чтобы перемножить эту эпюру с эпюрой M (фиг. 11.14,б) по Верещагину, определим площадь эпюры \bar{M} и найдем соответствующую ей ординату из эпюры M и перемножим эти величины. При этом учтем, что перемножаемые площадь и ордината (m_2) имеют, как видно из рисунков, различные знаки и, следовательно, результат будет отрицательным. Получим

$$\delta_A^{\text{гориз}} = \frac{Qm}{EJ} = - \frac{\left(\frac{1}{2}l^2\right)\left(\frac{ql^2}{6}\right)}{EJ} = - \frac{ql^4}{12EJ}.$$

Знак минус означает, что горизонтальная составляющая перемещения точки A направлена не влево, как была направлена единичная сила, а вправо.

Объединяя результаты обоих примеров, можно найти полное перемещение точки A , которое обозначим через δ_A (см. фиг. 11.14,д), на основании теоремы Пифагора:

$$\begin{aligned} \delta_A &= \sqrt{(\delta_A^{\text{верт}})^2 + (\delta_A^{\text{гориз}})^2} = \sqrt{\left(\frac{ql^4}{16EJ}\right)^2 + \left(\frac{ql^4}{12EJ}\right)^2} \\ &= \frac{ql^4}{9,6EJ} = 0,1045 \frac{ql^4}{EJ}. \end{aligned}$$

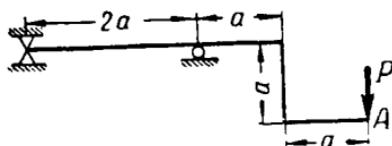
Направление перемещения показано стрелкой.

Пример 10. Найти угол поворота узла B той же рамы. Приложим в точке B момент, равный единице, и построим соответствующую эпюру M (фиг. 11.14,е). Эпюра M остается прежней (фиг. 11.14,б). Применяя к эпюрам M и \bar{M} правило Верещагина, получим для участка DE , так же как и в первом примере, произведение равное нулю, и для участка BD

$$\left(\frac{Qm}{EJ}\right)_{BD} = \frac{1}{EJ} (1l) \left(\frac{ql^2}{2}\right) = \frac{ql^3}{2EJ}.$$

Это и есть искомое значение угла поворота узла B . Положительный знак результата показывает, что поворот узла B происходит в принятом направлении действия единичного момента, т. е. против часовой стрелки.

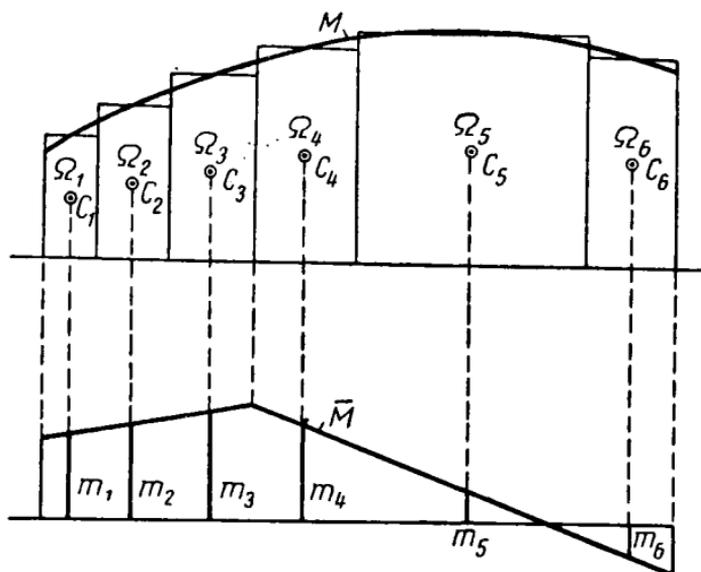
Задача. Определить угол поворота конца A рамы в положении ее, показанном на фиг. 11.15, когда сила P лежит в плоскости рамы. *Ответ:* $4,33 \frac{Pa^3}{EJ}$.



Фиг. 11.15.

§ 5. Более сложные случаи расчета

Общий случай нагрузки. Приближенный расчет. В случае сложной нагрузки площадь эпюры моментов трудно вычислить и тем более затруднительно определить ее центр тяжести. В таких случаях применяют приближенное решение, поясняемое следующим примером. Пусть эпюра изгибающих моментов M для некоторой балки постоянного сечения выражается произвольной кривой (фиг. 11.16). Разобьем площадь этой эпюры произвольно вертикалями на отдельные участки.



Фиг. 11.16. Замена криволинейной эпюры ступенчатой.

Если участков возьмем достаточно много, то площадь каждого из них можно будет приближенно вычислить как площадь прямоугольника и центр тяжести его считать находящимся по середине участка. В целях повышения точности расчета следует брать участки тем меньше, чем круче в данном месте линия, ограничивающая эпюру M , как это и сделано на фиг. 11.16. Тогда замена кривой ступенчатой линией происходит с меньшими погрешностями. Обозначим попережнему площади участков через $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$, центры тяжести их через C_1, C_2, C_3, \dots и соответствующие им ординаты из эпюры \bar{M} — через m_1, m_2, m_3, \dots

Эпюра \bar{M} на фиг. 11.16 взята произвольно; она может быть ломаной, но на протяжении каждого участка эпюры M она должна быть прямолинейной. Это следует учитывать сразу при разбивке эпюры M на участки.

Искомое перемещение найдем по правилу Верещагина, перемножая площади Ω и ординаты m :

$$\delta = \frac{\Sigma \Omega m}{EJ}$$

или в соответствии с фиг. 11.16

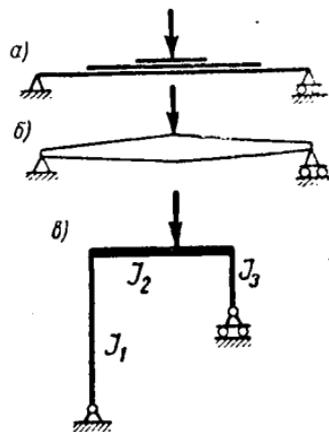
$$\delta = \frac{1}{EJ} (\Omega_1 m_1 + \Omega_2 m_2 + \Omega_3 m_3 + \Omega_4 m_4 + \Omega_5 m_5 - \Omega_6 m_6).$$

Значения ординат $m_1, m_2, m_3 \dots$ можно взять по масштабу из чертежа, вместо того чтобы вычислять их аналитическим путем. Определение площадей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ также может производиться на основании данных, полученных непосредственным измерением по чертежу. Обращаем внимание на то, что последнее произведение отрицательно, так как площадь Ω_6 и ордината m_6 имеют в рассматриваемом примере различные знаки.

Брус переменного сечения. (Очень часто балки и рамы обладают переменным по длине сечением. Это объясняется неравномерным распределением усилий в деталях конструкций и стремлением конструктора дать размеры детали, соответствующие этим усилиям. Так, целесообразно балку на двух опорах проектировать более мощного сечения по середине (фиг. 11.17, а, б), где изгибающие моменты велики, чем у опор, где они равны нулю. Консоль целесообразно проектировать более мощного сечения у заземления, где наиболее велики изгибающие моменты, и уменьшать сечение к концу консоли, где бесполезный материал только увеличивал бы вес конструкции. Так конструируется и крыло самолета. Проблема веса конструкции имеет особенно большое значение в авиации. Поэтому и брусья переменного сечения представляют для авиационных специалистов практический интерес.

Осуществить брус переменного сечения можно двумя путями: путем резкого изменения сечения через некоторые интервалы по длине (фиг. 11.17, а) и путем непрерывного изменения сечения (фиг. 11.17, б). Первый тип будем называть брусом ступенчато-переменного сечения, второй — брусом непрерывно-переменного сечения.

Брус ступенчато-переменного сечения. Рассмотрим сперва случай бруса ступенчато-переменного сечения,



Фиг. 11.17. Примеры бруса переменного сечения.

а — балка ступенчато-переменного сечения; б — балка непрерывно-переменного сечения; в — ломаный брус (рама) ступенчато-переменного сечения.

т. е. бруса, состоящего из нескольких участков постоянного сечения (см., например, кроме фиг. 11.17,а, также фиг. 11.17,в и 11.18,а). Формула Верещагина для этого случая имеет вид

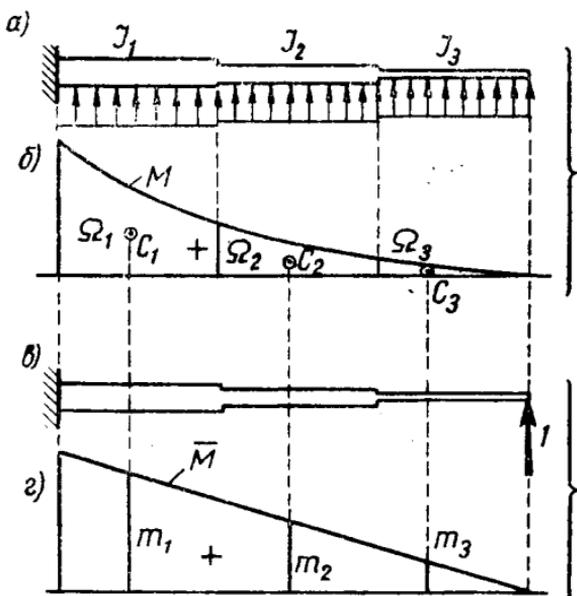
$$y = \frac{\Omega_1 m_1}{EJ_1} + \frac{\Omega_2 m_2}{EJ_2} + \frac{\Omega_3 m_3}{EJ_3} + \dots = \sum \frac{\Omega m}{EJ}. \quad (15)$$

Знаменатели EJ различны. Поэтому произведя «перемножение» эпюр по Верещагину по участкам, следует результат на каждом участке делить на жесткость EJ данного участка. Полученные

частные — сложить. Напоминаем, что в формуле (15) $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и т. д. — площади участков эпюры моментов, построенной от заданной нагрузки, которая может быть произвольной, а m_1, m_2, m_3 и т. д. — ординаты так называемой «единичной» эпюры моментов, соответствующие центрам тяжести площадей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и т. д.; под «единичной» эпюрой понимается эпюра моментов, построенная для данной балки или рамы от силы, равной единице, приложенной в месте и направлении искомого линейного перемещения или, если определяется угол поворота, от

момента, равного единице, приложенного в том сечении, угол поворота которого нужно определить; «единичная» эпюра на каждом участке прямолинейна.

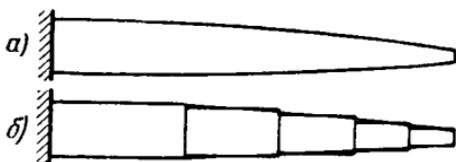
Поясним рассматриваемый случай на примере (фиг. 11.18,а). Момент инерции поперечного сечения балки на первом участке равен J_1 , на втором — J_2 , на третьем — J_3 . В пределах каждого участка момент инерции постоянен. Требуется определить прогиб конца консоли. Построим эпюру M изгибающих моментов от заданной нагрузки (фиг. 11.18,б) и «единичную» эпюру \bar{M} (см. фиг. 11.18,в и г). Эпюру M разобьем на участки так, чтобы на протяжении каждого участка момент инерции сечения был постоянным и эпюра \bar{M} прямолинейной. Так как эпюра M прямолинейна в данном случае на всем протяжении консоли, разбиваем эпюру M на три участка соответственно трем участкам балки с различными жесткостями. Определяя затем площади Ω



Фиг. 11.18. К определению прогиба консоли ступенчато-переменного сечения.

и ординаты m (см. фиг. 11.18,б и г), по формуле (15) получим искомый прогиб.

Брус непрерывно-переменного сечения. Мы рассмотрели брус ступенчато-переменного сечения. Но часто балки имеют непрерывно-переменное сечение. Сечение лонжерона крыла, например, непрерывно меняется по размаху крыла. Для приближенного вычисления перемещений сечений таких балок также может быть применен изложенный выше метод расчета. При этом балку непрерывно-переменного сечения заменяют балкой ступенчато-переменного сечения (см. фиг. 11.19,а и б). Искомое перемещение определяется затем общим путем по формуле Верещагина. Иногда такая замена проводится неявным путем. Производят предварительное деление ординат эпюры M (или \bar{M}) на J . Площади получаемой таким образом эпюры $\frac{M}{J}$ умножают затем



Фиг. 11.19. Замена бруса непрерывно-переменного сечения брусом ступенчато-переменного сечения.

на ординаты m из эпюры \bar{M} и результаты делят на E . Оба указанных способа по сути одинаковы. Приведем пример расчета по второму способу.

Пусть дана балка переменного сечения (фиг. 11.20,а), зашпеленная одним концом, для которой требуется определить при заданной нагрузке прогиб на свободном конце. Построим эпюру изгибающих моментов M от заданной нагрузки. Вид эпюры будет зависеть от характера распределения и величины нагрузки; на фиг. 11.20 эта эпюра показана условно. Наметим произвольно несколько сечений нашей балки. Для определения прогиба лонжерона крыла, например, достаточно таких сечений взять пять-шесть. На фиг. 11.20 эти сечения обозначены цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Расстояния между сечениями можно брать большими на тех участках балки, где нагрузка и поперечное сечение балок меняются незначительно, и, наоборот, меньшими там, где поперечное сечение балки (в рассматриваемом примере вблизи конца консоли) или нагрузка изменяются быстро. Если эпюра M имеет переломы (в местах приложения сосредоточенных сил эпюра M будет иметь переломы), то сечения рекомендуется принимать в местах этих переломов (чтобы облегчить вычисление площадей эпюры).

Наметив сечения, определим моменты инерции этих сечений относительно их центральных осей J_1, J_2, J_3 и т. д. и построим эпюру $\frac{M}{J}$. Для этого вычислим предварительно $\frac{M_1}{J_1}, \frac{M_2}{J_2}, \frac{M_3}{J_3}, \dots$, разделив значения ординат M_1, M_2, M_3, \dots эпюры M

соответственно на $J_1, J_2, J_3 \dots$ — моменты инерции сечений балки. Найденные значения $\frac{M_1}{J_1}, \frac{M_2}{J_2}, \frac{M_3}{J_3}$ отложим в виде отдельных ординат эпюры $\frac{M}{J}$. По этим отдельным ординатам может быть построена и вся эпюра $\frac{M}{J}$ (см. фиг. 11.20), причем тем точнее, чем больше вычислено значений ординат.

Затем построим эпюру \bar{M} от единичной силы. В данном случае единичная сила должна быть приложена вертикально на конце консоли (где отыскивается прогиб). Примем ее направленной вниз (на фиг. 11.20 единичная сила не показана). Получаемая эпюра \bar{M} изображена на фиг. 11.20, г. Теперь для того, чтобы найти значение искомого прогиба y , нужно площадь ω эпюры $\frac{M}{J}$ умножить на ординату m эпюры \bar{M} , соответствующую центру тяжести площади ω , и результат разделить на E , т. е.,

$$y = \frac{\omega m}{E}. \quad (16)$$

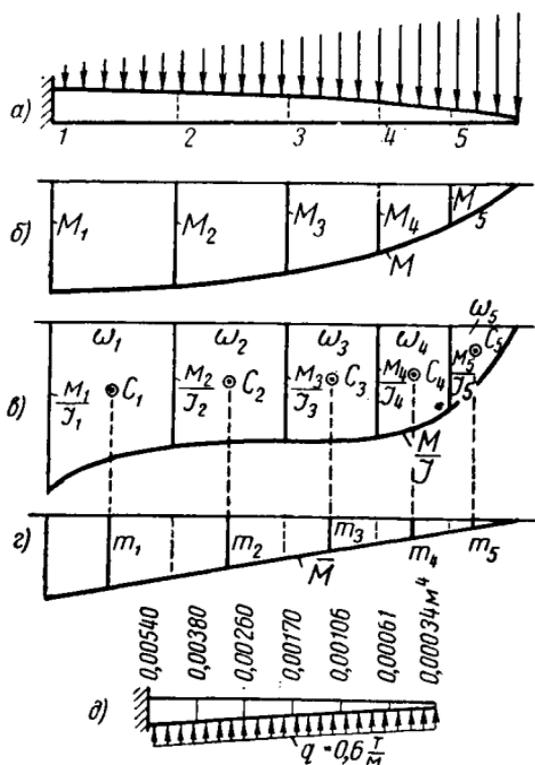
Но часто бывает затруднительно определить местоположение центра тяжести площади ω эпюры $\frac{M}{J}$. Тогда разбивают площадь ω на несколько участков и произведение ωm заменяют суммой произведений $\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 + \dots$ площадей отдельных участков эпюры $\frac{M}{J}$ (приблизительно при-

Фиг. 11.20. К определению прогиба консоли непрерывно-переменного сечения.

а — заданная система и нагрузка; б — соответствующая эпюра изгибающих моментов M ; в — эпюра $\frac{M}{J}$; г — «единичная»

эпюра для вычисления максимального прогиба.

нимаемых за трапеции или даже прямоугольники) на соответствующие ординаты эпюры \bar{M} (см. фиг. 11.20, в и г). Значе-



ния площадей $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots$ и ординат $m_1, m_2, m_3 \dots$ можно взять из чертежа. Таким образом получим

$$y = \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 + \omega_3 m_3 + \dots}{E} \quad (17)$$

Так же поступают в том случае, когда эпюра \bar{M} является ломаной.

Формулы (16) и (17) можно вывести непосредственно из формулы (8) § 2. Преобразуем формулу (8) так:

$$y = \sum \frac{M \bar{M} \Delta x}{EJ} = \frac{1}{E} \sum \left(\frac{M}{J} \right) \bar{M} \Delta x \quad (18)$$

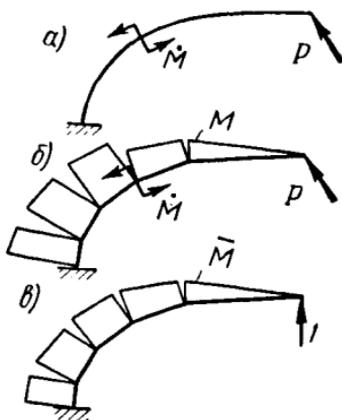
Применяя формулу Верещагина, вычислим эту сумму как произведение площади ω эпюры $\frac{M}{J}$ на соответствующую ординату m из эпюры \bar{M} :

$y = \frac{\omega m}{E}$. Эта формула совпадает с формулой (16). При нескольких участках приходим к формуле (17).

Сравнивая формулу (17) с формулой (12) § 3, выведенной для балки постоянного сечения, видим, что в данном случае знаменатель не содержит J , но зато вместо площади Ω эпюры M в данном случае входит в формулу площадь ω эпюры $\frac{M}{J}$.

Задача. Консоль переменного сечения длиной 6 м нагружена равномерно распределенной нагрузкой (фиг. 11.20 д). Интенсивность нагрузки $q = 0,6 \text{ т/м}$. Модуль упругости материала $E = 1\,000\,000 \text{ т/м}^2$. Моменты инерции сечений балки даны в м^4 на рисунке через 1 м по длине балки. Определить максимальный прогиб. *Ответ:* 3 см .

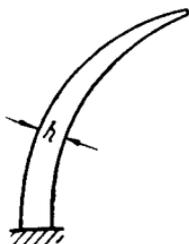
Случай криволинейного бруса. Криволинейный брус не очень большой кривизны (см. далее примечание) приближенно представляют как ломаный. Рассмотрим сперва брус постоянного сечения. Например, требуется определить вертикальное перемещение конца криволинейного бруса (фиг. 11.21, а), нагруженного силой P и парой сил M . Представим себе вместо нашего криволинейного бруса брус, состоящий из прямолинейных участков (фиг. 11.21, б), но такой, чтобы его ломаная ось была близкой к криволинейной оси действитель-



Фиг. 11.21. К определению перемещений криволинейного бруса произвольной формы.

а — заданная система и нагрузка; б и в — заданный криволинейный брус заменяется ломаным.

ного бруса. С полученным бруском поступим так, как поступали ранее с рамами. Построим эпюру M (фиг. 11. 21,б) изгибающих моментов от заданной нагрузки и эпюру \bar{M} (фиг. 11. 21,в) от силы—единицы, приложенной в направлении искомого перемещения. Затем, «перемножив» эти эпюры по Верещагину [см. формулу (13) § 3] по участкам (умножая площадь участка из одной эпюры на соответствующую ординату из другой) и разделив сумму полученных произведений на жесткость EJ балки, найдем искомый прогиб. При этом, поскольку участки в обеих эпюрах прямолинейны, безразлично, из какой из них брать площади Ω и ординаты m для перемножения (но, беря площадь из одной, ординату следует брать из другой).



Фиг. 11. 22. Криволинейный брус переменного сечения.

Чем короче будут прямые участки ломаного бруса, заменяющего действительный криволинейный брус, т. е. чем больше их будет, тем точнее будет решена задача. Наиболее короткими должны быть участки в местах наибольшей кривизны оси заданного бруса (в рассмотренном примере — вблизи защемления) и, наоборот, в местах малой кривизны (в рассмотренном примере — у свободного конца бруса, где он приближается к прямому) участки могут

быть длиннее. При достаточно коротких участках получающиеся трапеции эпюр оказываются близкими к прямоугольникам и тогда могут быть при вычислениях приближенно приняты за прямоугольники, что облегчит вычисление.

Если бы брус был переменного сечения (фиг. 11. 22), то решение следовало бы выполнить по формуле (17), т. е. построить эпюру M , разделив ее ординаты, как в предыдущем примере (фиг. 11. 20,в), на моменты инерции J соответствующих сечений бруса, и построить эпюру $\frac{M}{J}$. Затем эту эпюру следует «перемножить» с эпюрой \bar{M} от силы — единицы и результат разделить

на E . Получим искомое перемещение.

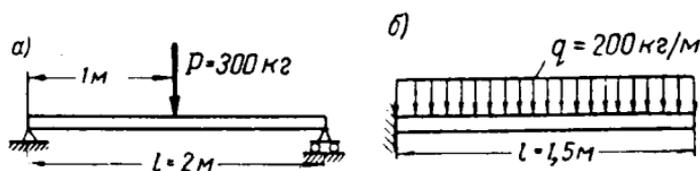
Примечание. В случае большой кривизны бруса, т. е. когда отношение радиуса кривизны оси бруса к его высоте (h на фиг. 11. 22) меньше 5, указанный выше метод расчета, учитывающий только изгибающие моменты и не учитывающий продольные и поперечные силы, неприменим, так как дает значительную погрешность. С теорией кривого бруса большой кривизны можно ознакомиться по любому учебнику «Сопротивление материалов» для вузов. В настоящей книге теория кривого бруса большой кривизны не рассматривается.

§ 6. Расчет на жесткость

Расчетом балки называется подбор ее поперечного сечения. Выше в гл. IX рассматривался расчет балки на прочность, т. е. подбор ее сечения по допускаемому напряжению. Расчетом бал-

ки на жесткость называется подбор ее сечения по допускаемому прогибу. Ход расчета покажем на примере.

Пусть дана балка, лежащая на двух опорах, нагруженная сосредоточенной силой по середине (фиг. 11. 23,а). Модуль упругости материала балки (сосна) равен $100\ 000\ \text{кг/см}^2$. Поперечное сечение квадратное. Определить сторону a поперечного сечения, исходя из условия, что максимальный прогиб балки не должен превышать $0,5\ \text{см}$.



Фиг. 11. 23.

Максимальный прогиб балки на двух опорах, нагруженной сосредоточенной силой по середине, равен $\frac{Pl^3}{48EJ}$ (см. пример 3 в § 4). Положим его согласно условию равным $0,5\ \text{см}$: $\frac{Pl^3}{48EJ} = 0,5$. Отсюда можем определить необходимый момент инерции сечения балки J :

$$J = \frac{Pl^3}{48E \cdot 0,5} = \frac{300 \cdot 200^3}{48 \cdot 100\ 000 \cdot 0,5} = 1000\ \text{см}^4.$$

Момент инерции квадрата равен $\frac{a^4}{12}$ [см. гл. IX, § 4, формула (8)].

Приравнивая его к нашему значению $1000\ \text{см}^4$, получаем $\frac{a^4}{12} =$

1000 , откуда $a = 10,5\ \text{см}$. Таким образом, чтобы наша балка прогибалась при данной нагрузке не более чем на $0,5\ \text{см}$, ее сечение должно быть не менее $10,5 \times 10,5\ \text{см}$. Произведенный подбор сечения и называется расчетом балки на жесткость.

Проверим прочность нашей балки. Для этого определим нормальное напряжение σ (см. гл. IX) и сравним его с пределом прочности. Наибольшее нормальное напряжение определяется по формуле $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$. В нашем случае $M_{\max} = \frac{Pl}{4} = \frac{300 \cdot 200}{4} = 15\ 000\ \text{кгсм}$ и $W = \frac{a^3}{6} = \frac{10,5^3}{6} = 193\ \text{см}^3$. Следова-

тельно, $\sigma_{\max} = \frac{15000}{193} = 78\ \text{кг/см}^2$. Предел прочности сосны при изгибе равен $\sim 600\ \text{кг/см}^2$. Получаем коэффициент запаса прочности $n = \frac{600}{78} = 7,7$.

Если бы мы хотели уменьшить запас прочности, то следовало бы уменьшить размеры сечения балки. Но это невозможно, так как тогда уменьшилась бы жесткость балки и прогиб превысил бы допустимое значение его. Расчет на жесткость часто приводит к большим размерам сечения, чем расчет на прочность (как это мы видели и выше, при расчете валов на кручение).

Задача. Определить необходимый момент инерции сечения консоли (фиг. 11. 23,б), чтобы прогиб ее не превышал 1 см. Предполагая, что консоль имеет круглое сечение, определить ее диаметр в двух случаях: 1) сплошного бруса и 2) трубы с толщиной стенки 2 мм. Сравнить вес консоли в этих двух случаях. Модуль упругости материала $E=700\,000$ кг/см² (дуралюмин). *Ответ:* $J=180$ см⁴; $d_1=6,5$ см; $d_2=10,5$ см; отношение весов равно 5.

§ 7. Деформация фермы

Мы рассмотрели в данной главе деформацию балок и рам, т. е. стержней, работающих преимущественно на изгиб. При этом мы пользовались в общей формуле (10') (см. § 2) только первым слагаемым [формула (10)], пренебрегая вторым и третьим, так как они в случае балок и рам очень малы по сравнению с первым слагаемым.

В случае же фермы, т. е. конструкции, стержни которой работают преимущественно на растяжение или сжатие (а при шарнирных узлах и узловой нагрузке стержни фермы работают, как мы знаем, только на растяжение или сжатие), пренебрегать последним слагаемым нельзя, а наоборот, можно пренебречь первым и вторым слагаемыми.

Формула для определения перемещений в фермах имеет таким образом вид

$$\delta = \sum \frac{N\bar{N}\Delta x}{EF}. \quad (19)$$

Здесь под δ подразумевается любое перемещение любого узла или сечения стержня. Знак суммы, как всегда, означает суммирование по всей системе. Напомним, что через N обозначены усилия в стержнях фермы, вызываемые заданной нагрузкой, а через \bar{N} — усилия в стержнях той же фермы, вызываемые силой, равной единице, приложенной к узлу, перемещение которого нужно определить, в направлении искомого перемещения или парой с моментом, равным единице, если ищется угловое перемещение. E — модуль упругости материала, F — площадь поперечного сечения стержня.

Формулу (19) можно выразить по Верещагину так ([ср. с формулой (15)]):

$$\delta = \sum_s \frac{Qm}{EF}, \quad (20)$$

где Ω — площадь эпюры продольных сил N стержня, а m — ордината эпюры \bar{N} .

Сумма (20) содержит количество слагаемых, равное количеству s стержней в ферме, что отмечено индексом s при знаке суммы.

Рассмотрим один какой-либо стержень фермы. Пусть он растянут силами N (фиг. 11.24,а). Эпюра N имеет вид прямоугольника, так как усилие N постоянно вдоль стержня (в любом сечении стержня продольная сила одна и та же — равна N). Площадь Ω эпюры N , очевидно, равна Nl .

Загрузив ферму единичной нагрузкой, будем иметь в рассматриваемом стержне усилие \bar{N} . Эпюра \bar{N} также прямоугольник. Все ординаты этой эпюры равны \bar{N} , т. е. $m = \bar{N}$ (см. фиг. 11.24,б).

Таким образом произведение Ωm равно $Nl\bar{N} = N\bar{N}l$. Сделанное рассуждение справедливо для каждого стержня фермы. Поэтому вместо формулы (20) можем написать

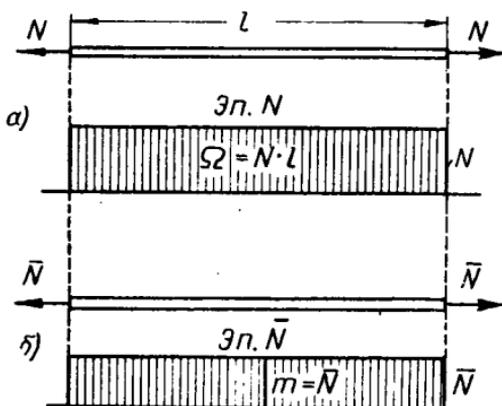
$$\delta = \sum_s \frac{N\bar{N}l}{EF}. \quad (21)$$

Обычно материал всех стержней один и тот же, поэтому модуль упругости E , как постоянная величина, может быть вынесен за знак суммы 21:

$$\delta = \frac{1}{E} \sum_s \frac{N\bar{N}l}{F}. \quad (22)$$

Ниже на примере излагается пользование формулой (22) для вычисления перемещения узла фермы.

Пример. Пусть для фермы (фиг. 11.25,а), рассмотренной в последнем примере главы II (см. фиг. 2.31), нагруженной двумя силами $P_1 = 3$ т и $P_2 = 1$ т, требуется определить перемещение $\delta_{\text{верт}}$ узла C по вертикали. Площади поперечных сечений поясов равны 5 см^2 , решетки — 3 см^2 (см. третий столбец таблицы 10). Длины стержней приведены в таблице. Материал — мягкая сталь; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. Податливостью опор пренебречь.



Фиг. 11.24. Эпюры продольных усилий в стержне фермы.

Усилия N в стержнях фермы, вызываемые приложенной к ней нагрузкой, были определены в гл. II и приведены во втором столбце таблицы.

Усилия \bar{N} в стержнях фермы, вызываемые силой, равной единице, приложенной в узле C вертикально (в соответствии с искомым перемещением), выписаны в пятом столбце табл. 10. Определение их графически показано на фиг. 11.25. Сперва были определены реакции опор; из условий равновесия получены $R_A=2$ и $R_B=1$ — реакции изображены на чертеже. Затем было выполнено построение диаграммы усилий — фиг. 11.25,6 (порядок построения диаграммы усилий изложен в гл. II, § 7).

Таблица 10

Наименование стержня	Усилие N кг	Площадь сечения стержня F см ²	Длина стержня l см	Усилие \bar{N}	$\frac{N\bar{N}l}{F}$
1	2	3	4	5	6
CD	3000	5	107	1,20	77 000
DE	2880	5	90	1	51 800
EF	1000	5	90	0	0
CA	-820	5	97	-1,10	17 500
AB	1090	5	90	0	0
BG	0	5	91	0	0
DA	-1900	3	93	-0,65	38 300
EB	1850	3	93	1	57 400
FG	0	3	73	0	0
AE	-2610	3	124	-1,45	157 000
BF	-1410	3	124	0	0
					399 000

Последний столбец таблицы служит для вычисления суммы $\sum_s \frac{N\bar{N}l}{F}$, входящей в формулу (22). Суммируя этот столбец, находим $\sum_s \frac{N\bar{N}l}{F} = 399\,000$. Разделив этот результат на E , получаем искомое перемещение узла C :

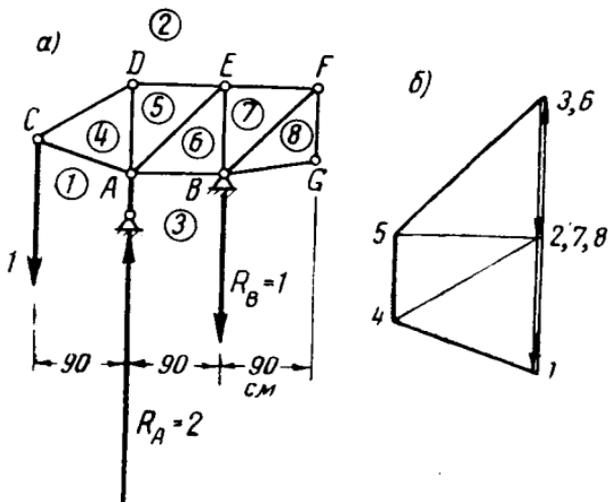
$$\delta_{\text{верт}} = \frac{399000}{2 \cdot 10^6} = 0,2 \text{ см} = 2 \text{ мм.}$$

Если бы нужно было определить перемещение узла C в горизонтальном направлении, то силу, равную единице, следовало бы приложить в горизонтальном направлении. Зная горизонтальное и вертикальное перемещения, можно определить и полное перемещение как их геометрическую сумму

$$\delta = \sqrt{\delta_{\text{гориз}}^2 + \delta_{\text{верт}}^2}$$

Совершенно так же вычисляются перемещения элементов пространственных ферм. При этом при вычислении полного перемещения узла предварительно вычисляют его составляющие по трем взаимно перпендикулярным, произвольно выбираемым направлениям.

Задача. Определить перемещение по вертикали узла C фермы, изображенной на фиг. 2.32, нагруженной силами $P_1 =$



Фиг. 11.25.

$= 800$ кг, $P_2 = 600$ кг и $P_3 = 1000$ кг. Площади поперечных сечений стержней:

обозначение стержня . .	18	13	23	54	76	86	64	43
площадь поперечного сечения стержня, см ² . .	3,08	1,35	2,36	3,19	2,70	1,69	1,77	0,50

Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см².

Примечание. Можно воспользоваться результатом определения усилий N для данной задачи в гл. II (последняя задача в § 7).

Ответ: $\delta_c = 0,54$ см.

Контрольные вопросы

1. Как можно установить характер деформации балки или рамы при помощи эпюры изгибающих моментов?
2. Напишите и объясните формулу для определения перемещений. Как определяется угол поворота? Как понимается знак (плюс или минус) в результате?
3. Объясните правило Верещагина и укажите, при каких условиях оно применимо.
4. Как применяется правило Верещагина, если: а) одна эпюра криволинейна, а другая ломаная; б) балка имеет переменное поперечное сечение; в) балка непрямолинейна?
5. Что называется расчетом балки на жесткость?
6. Как определяются перемещения узлов ферм?

Глава XII

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

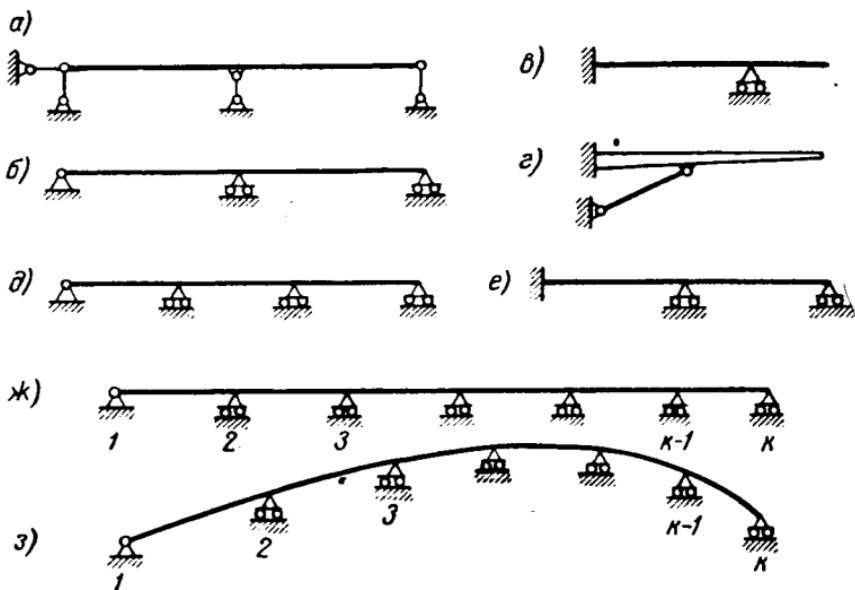
§ 1. Признаки статической неопределимости систем

Статически неопределимыми называются системы, усилия в элементах которых не могут быть найдены при помощи одних только уравнений равновесия. Мы уже встречались со статической неопределимостью в главах III и VII при рассмотрении явлений растяжения или сжатия и кручения в конструкциях с избыточным количеством связей. Для определения напряжений в таких случаях приходилось, помимо уравнений равновесия, составлять дополнительные уравнения, так называемые уравнения деформации, вытекающие из условий деформации данной конструкции.

В настоящей главе мы рассмотрим балки, рамы и фермы. Балки с избыточным количеством опор также являются статически неопределимыми. Для исследования напряжений в таких балках (и также их деформации) приходится составлять уравнения, отражающие условия деформации, налагаемые лишними связями, по одному уравнению на каждую лишнюю связь.

Лишними или избыточными называются связи, имеющиеся в системе сверх необходимых для обеспечения ее неизменяемости или неподвижности. Количество необходимых связей устанавливалось выше (в гл. II). Например, для того чтобы балка была неподвижна в плоскости, она, как мы знаем, должна быть прикреплена в этой плоскости тремя связями к земле или другой неподвижной системе. Из предыдущего нам известны два типа балок в зависимости от способа их прикрепления: балка на двух опорах и консоль. Каждая из этих балок обладает необходимыми тремя связями. Они наиболее наглядно изображаются в виде стержней, присоединенных шарнирно (см. схему балки на двух опорах на фиг. 1. 11,б — два стержня равносильны неподвижной опоре, один стержень равносильен катку). Схема связей консоли показана на фиг. 1. 12,а. Всякий дополнительный прикрепляющий стержень сверх трех необходимых явится *лишней* с точки зрения неподвижности системы связью.

Балка с четырьмя прикрепляющими стержнями, изображенная на фиг. 12.1,а есть система с одной лишней связью, или, как говорят, система однажды статически неопределимая (на фиг. 12.1,а и б представлена одна и та же система, но с различным изображением опор). Показанные на фиг. 12.1,в и г консоли с дополнительными опорами также однажды статически неопределимы: заделка представляет три связи и подвижная опора или стержень — одну, итого — четыре, одна связь «лишняя». Балка на четырех опорах (фиг. 12.1,д) и балка на трех



Фиг. 12.1. Статически неопределимые балки.

а и б — однажды статически неопределимая двухпролетная балка; в и г — однажды статически неопределимые консольные балки; д и е — дважды статически неопределимые балки; ж и з — пять раз статически неопределимые балки.

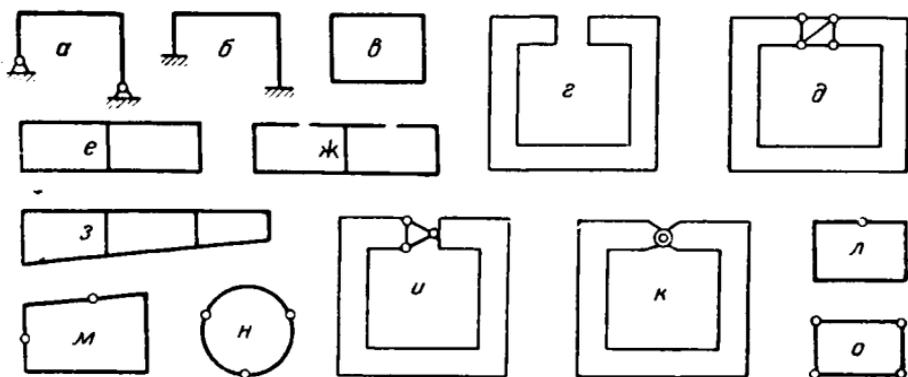
опорах с заделкой (фиг. 12.1,е) дважды статически неопределимы. Балка на k опорах (фиг. 12.1,ж) статически неопределима $k - 2$ раз.

Сказанное относится и к непрямым брусам. Криволинейная балка на k опорах (фиг. 12.1,з) также $k - 2$ раз статически неопределима. Рама на двух неподвижных опорах (фиг. 12.2,а) однажды статически неопределима, так как каждая неподвижная опора равносильна двум связям. Рама с двумя заделанными пятнами (фиг. 12.2,б) трижды статически неопределима, так как каждая заделка равносильна трем связям.

Число лишних связей называется *степенью статической неопределимости*.

Установим степень статической неопределимости замкнутой рамы (фиг. 12.2,в). Для этого проследим образование замкну-

той рамы из незамкнутого бруса. Представим себе брус со свободными концами (фиг. 12.2,а). Для того чтобы получить из него замкнутую раму, необходимо концы бруса неподвижно присоединить друг к другу. Это может быть обеспечено помощью трех соединяющих стержней (фиг. 12.2,б). Брус до установки стержней являлся статически определимой неизменяемой системой, следовательно, эти стержни — лишние связи. По числу лишних связей полученная замкнутая рама трижды статически неопределима.



Фиг. 12.2.

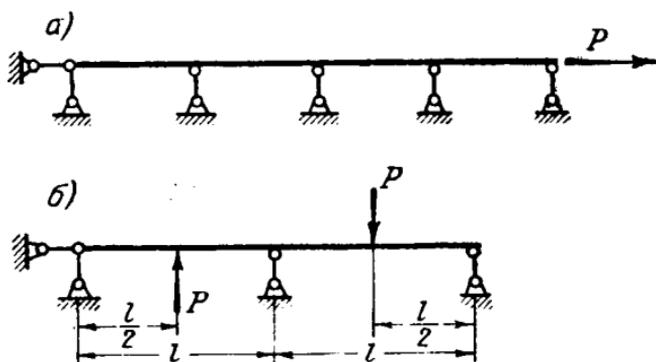
а — однажды статически неопределимая рама; б и в — трижды статически неопределимые замкнутые рамы; г — разрезав замкнутую раму, получаем статически определимую систему; д — вставляя три стержня, снова замыкаем ее; е — шесть раз статически неопределимая двузамкнутая рама; ж — сделав два разреза, получаем статически определимую систему; з — девять раз статически неопределимая рама; и, к, л — замкнутая рама, содержащая один шарнир, — дважды статически неопределима; м — однажды статически неопределимая рама; н — статически определимая рама; каждый шарнир уменьшает степень статической неопределимости на единицу; о — изменяемая система (с одной степенью свободы) — механизм.

Таким же путем можно установить степень статической неопределимости двузамкнутой рамы (фиг. 12.2,е). Разрезав каждый из контуров, получим статически определимый брус (фиг. 12.2,ж). Теперь, чтобы снова вернуться к двузамкнутой раме, нужно в каждом разрезе поместить по три соединяющих стержня. Следовательно, двузамкнутая рама шесть раз статически неопределима. Аналогично можно показать, что трехзамкнутая (фиг. 12.2,з) рама девять раз статически неопределима и так далее: каждый замкнутый контур содержит три лишних связи.

Введение шарниров. Если бы мы, соединяя концы бруса, изображенного на фиг. 12.2,г, вставили не три стержня, а только два (фиг. 12.2,и), то получили бы в данном месте шарнирное соединение или шарнир, изображаемое обычно, как

показано либо на фиг. 12.2,к, либо, если рама изображается только осевой линией, как на фиг. 12.2,л. Шарнирное соединение допускает взаимный поворот соединяемых концов. Поскольку для образования шарнира потребовались две связи, замкнутая рама с шарниром дважды статически неопределима, т. е. степень ее статической неопределимости на единицу меньше, чем замкнутой рамы без шарниров.

Итак, введение шарнира в раму снижает степень ее статической неопределимости на единицу. Замкнутая рама с двумя шарнирами (фиг. 12.2,м) однажды статически неопределима. За-



Фиг. 12.3. При некоторых нагрузках системы с избыточным количеством связей могут быть статически **определимыми.**

a — усилия в вертикальных связях заведомо равны нулю; усилие в горизонтальной связи определяется из уравнения равновесия; *б* — реакция средней опоры заведомо равна нулю; реакции остальных опор определяются из уравнений равновесия.

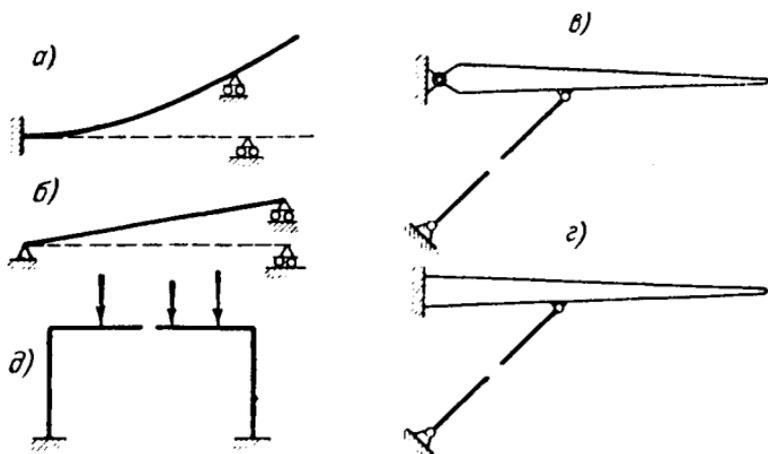
мкнутая рама с тремя шарнирами (фиг. 12.2,н) статически определима. Дальнейшее введение шарниров нарушило бы геометрическую неизменяемость системы. Замкнутый контур с четырьмя шарнирами (см., например, фиг. 2.1,д) является уже изменяемой системой.

Зависимость степени неопределимости от нагрузки. Заметим, что системы с избыточным числом связей могут при некоторых нагрузках явиться статически определимыми или иметь степень статической неопределимости меньшей числа лишних связей. Это является следствием того, что усилия в некоторых лишних связях заведомо обращаются в нуль. Так, у балки, показанной на фиг. 12.3,а, усилия всех опорных стержней, кроме горизонтального, при данной нагрузке равны нулю, а усилие горизонтального стержня определяется из уравнения статики. Таким образом данная система при данной нагрузке статически определима. Балка, изображенная на фиг. 12.3,б, имеет одну лишнюю связь, но реакция средней опоры при дан-

ной нагрузке явно равна нулю. Таким образом остается определить реакции трех остающихся связей, что возможно сделать при помощи трех уравнений статики, следовательно, данная конструкция при данной нагрузке статически определима.

§ 2. Особенности статически неопределимых систем

Чувствительность к неточности изготовления и изменению температуры. Одну из важных особенностей статически неопределимых систем мы установим на



Фиг. 12.4. Сравнение работы систем с лишними связями и без них.

a — статически неопределимая балка напрягается при перемещении опоры; *б* — простая балка не напрягается при перемещении опоры; *в* — статически определимая система при нарушении какой-либо связи превращается в изменяемую систему; *г* и *д* — статически неопределимая система при нарушении части связей остается неизменяемой.

основании следующего опыта. Пусть мы имеем статически неопределимую балку, показанную на фиг. 12.1, *в*. Представим себе, что правая опора переместилась по вертикали. Очевидно, это вызовет изгиб балки (фиг. 12.4, *a*) и, следовательно, напряжения в ней. Эти напряжения будут тем больше, чем больше жесткость балки EJ . Перемещение же опоры статически определимой балки (фиг. 12.4, *б*) никаких напряжений в балке не вызывает, так как балка при этом не деформируется, а только поворачивается.

Достаточно небольшого перемещения опоры, небольшой неточности в ее установке, чтобы в статически неопределимой конструкции возникли значительные напряжения. Таким образом статически неопределимые конструкции очень чувствительны к неточности изготовления деталей и неточности сборки. Незначительные отклонения в размерах против расчетных могут при-

вести к распределению внутренних усилий в статически неопределимой конструкции, совершенно отличному от того, которое предполагалось на основании расчета.

Подобным же образом часто влияет и изменение температуры. Нагревание или охлаждение рам, изображенных на фиг. 12. 2, *а* и 12. 2, *б*, вызовет напряжения в них, так как горизонтальный брус рамы изменит свою длину, а расстояние между опорами измениться не может. Нагревание или охлаждение части конструкции также может вызвать напряжения во всей конструкции (например, в конструкциях, показанных на фиг. 12. 1, *г*, 12. 2, *а*, *б*, *в*, *е*, *з*, *и*, *м*).

Пониженная точность расчета. Отмеченные обстоятельства часто приводят практически к невозможности точно рассчитать статически неопределимую систему. Неточность расчета в сложных случаях усугубляется трудоемкостью числовых выкладок. В том случае если статически неопределимая система выполнена из различных материалов, при расчете ее приходится учитывать свойства материалов, как модуль упругости, коэффициент теплового расширения и др. Неточность определения этих величин также приводит к дополнительному снижению точности расчета системы. Помимо указанного, большое влияние на погрешность может оказать деформация узлов и люфты в узлах.

Определение размеров статически неопределимой конструкции, обеспечивающих ее прочность, производится преимущественно путем подбора. В начале расчета предварительно приходится задаваться размерами сечений стержней или соотношением между ними (при расчете рам, например, нужно задаться моментами инерции сечений элементов рамы или отношением их). После определения напряжений, вызываемых в конструкции заданной нагрузкой, размеры элементов ее уточняются в соответствии с допускаемыми напряжениями для данного материала и в случае значительных поправок расчет напряжений повторяется с принятием новых размеров.

Живучесть. Избыточное количество связей в статически неопределимой системе полезно для конструкций, могущих подвергаться местным повреждениям, например, военных самолетов, так как приводит к большей живучести, т. е. способности работать и после повреждений. Система, n раз статически неопределимая, может, даже потеряв n связей в результате повреждений, остаться все же геометрически неизменяемой и, следовательно, способной воспринимать некоторую нагрузку и только потеря $(n+1)$ -ой связи приводит конструкцию к разрушению, превращая ее в механизм.

На фиг. 12. 4, *в* и *г* показан случай повреждения подкосной тяги в статически определимой и статически неопределимой конструкции. Первая превратилась в подвижную систему, вторая еще остается геометрически неизменяемой. Рама с заделанными

пятами, потеряв три связи в результате сквозного разреза (фиг. 12. 4, *д*), сохраняет еще способность нести некоторую нагрузку. Сказанное не относится, однако, к категории связей, называемых безусловно необходимыми. *Безусловно необходимыми* связями или элементами конструкции называются такие связи или элементы, разрушение которых приводит к разрушению всей конструкции. Так, например, повреждение неподвижной опоры многоопорной балки (фиг. 12. 1, *ж*) приводит при наличии внешних сил, действующих в горизонтальном направлении, к сходу всей балки с катков. Неподвижная опора (точнее, одна из связей, представляемых этой опорой, именно — горизонтальная) является безусловно необходимой связью данной конструкции.

§ 3. Уравнения перемещений

Займемся определением усилий в лишних связях статически неопределимых систем. Основным методом расчета статически неопределимых систем является метод сил, который и рассматривается в настоящем параграфе. Второй метод — метод деформаций — в данной книге не рассматривается.

Идея метода сил заключается в следующем. Связи в системе, принимаемые за лишние, отбрасываются и вместо них прикладываются их усилия (которые, конечно, неизвестны). На полученную статически определимую систему, так называемую «основную систему», накладываются условия деформации заданной статически неопределимой системы. Эти условия выражаются уравнениями, называемыми уравнениями перемещений. Решая уравнения перемещений определяют искомые лишние неизвестные — усилия в лишних связях.

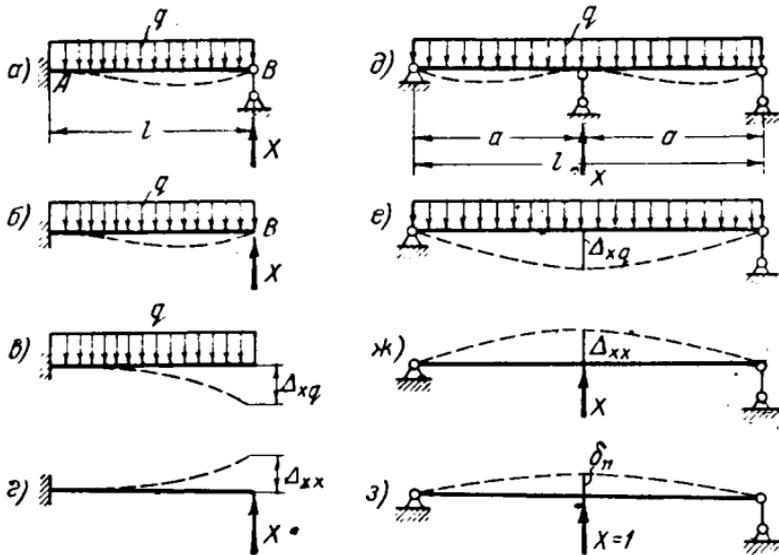
Покажем этот способ расчета на простых примерах.

Пример 1. Определить реакции опор балки постоянного сечения длиной l , заделанной одним концом и свободно опертой другим (фиг. 12. 5, *а*) и загруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q на всей длине балки.

Предложенная балка однажды статически неопределима, так как неизвестных реакций четыре: у заделки A — две реактивных силы и реактивный момент и у опоры B — реактивная сила. Взяв сумму проекций всех сил на горизонтальную ось и приравняв нулю, найдем, что горизонтальная составляющая реакции опоры A равна нулю. Теперь в нашем распоряжении остается два уравнения статики, а неизвестных реакций имеем три. Необходимо составить дополнительное уравнение, которое бы дало возможность определить одну лишнюю неизвестную реакцию.

За такую неизвестную примем реакцию опоры B , обозначим ее через X (выбор неизвестной, подлежащей определению из дополнительного уравнения, произволен и диктуется удобствами решения). Отбросим опору B , реакцию которой мы хотим опре-

делить. Получим статически определимую систему (фиг. 12.5,б), которую будем называть *основной системой*. Приложим к основной системе вместо отброшенной опоры ее реакцию X . Получим систему, нагруженную так же, как и исходная, заданная, статически неопределимая система. Очевидно, и деформируется она поэтому так же, как заданная (пунктиром на фиг. 12.5,а и б показан характер деформации балки). И хотя точка B — конец балки — теперь свободна от опоры, ее перемещение по вертика-



Фиг. 12.5. К составлению уравнения перемещений.

а — заданная система с одной лишней связью; б — одна связь отброшена и заменена ее реакцией X ; условия работы системы не изменились; в — нагрузка вызвала бы прогиб Δ_{xq} ; г — но сила X его аннулирует: $\Delta_{xx} = \Delta_{xq}$ (уравнение перемещений); д, е и ж — тот же ход рассуждений для трехопорной балки; з — к уравнению перемещений в канонической форме; δ_{11} — перемещение, вызываемое единичной силой.

ли равно нулю. Это обстоятельство и служит основанием для составления необходимого дополнительного уравнения. Запишем его:

$$\Delta_x = 0, \quad (1)$$

где Δ_x — перемещение по направлению X , т. е. перемещение точки B по вертикали.

Выразим Δ_x по принципу сложения (называемому иначе принципом независимости действия сил) как сумму перемещений от отдельных нагрузок.

На балку действуют две силы: нагрузка q и сила X . Если бы сила X отсутствовала, балка прогнулась бы вниз (фиг. 12.5,в). Обозначим перемещение точки B при этом через Δ_{xq} . Первый

индекс (x) при знаке перемещения Δ означает *место и направление* перемещения, второй индекс (q) — *причину* перемещения.

Если бы на балку действовала, наоборот, только сила X , а нагрузка q отсутствовала, то балка, очевидно, прогнулась бы вверх (фиг. 12.5,з). Придерживаясь прежнего принципа индексации, перемещение точки B при этом мы обозначим через Δ_{xx} . При совместном действии нагрузки q и силы X перемещение точки B запишется как алгебраическая сумма перемещений Δ_{xq} и Δ_{xx} . Но перемещение точки B , как выше указано [см. уравнение (1)], равно нулю. Следовательно,

$$\Delta_{xq} + \Delta_{xx} = 0. \quad (2)$$

Выше (см. гл. XI, § 3, пример 1) прогиб Δ_{xq} определялся. Имеем

$$\Delta_{xq} = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

Для Δ_{xx} найдем (см. задачу 1 в § 4 гл. XI) $\Delta_{xx} = -\frac{Xl^3}{3EJ}$. Знак минус учитывает другое направление перемещения Δ_{xx} по сравнению с перемещением Δ_{xq} . Подставляя полученные значения Δ_{xq} и Δ_{xx} в уравнение (2), найдем $\frac{ql^4}{8EJ} - \frac{Xl^3}{3EJ} = 0$, откуда искомая реакция опоры B

$$X = \frac{3}{8} ql.$$

Зная реакцию опоры B , нетрудно определить реакцию опоры A . Взяв сумму проекций всех сил на вертикаль и приравняв нулю, найдем вертикальную реакцию опоры A :

$$R_A = \frac{5}{8} ql^2.$$

Определим также и реактивный момент в заделке A :

$$M_A = ql \frac{l}{2} - \frac{3}{8} ql l = \frac{ql^2}{8}.$$

Пример 2. Определить реакции опор трехопорной балки (фиг. 12.5,д) с равными пролетами, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

Принимая за лишнюю неизвестную X реакцию средней опоры, будем иметь основную систему в виде балки на двух опорах. На основании предыдущего (гл. XI, § 4, пример 4) напишем

$$\Delta_{xq} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$

и также (там же, пример 3)

$$\Delta_{xx} = -\frac{Xl^3}{48EJ}.$$

Подставляя это в уравнение (2), получим

$$\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} - \frac{Xl^3}{48EJ} = 0,$$

откуда $X = \frac{5}{8} ql$ или $X = \frac{5}{4} qa$.

Теперь из уравнения проекций на вертикаль найдем, что каждая из остальных двух реакций равна $\frac{3}{8} qa$. Между прочим, эти же результаты можно было бы получить сразу на основании решения предыдущей задачи, замечая, что по симметрии балки и нагрузки угол поворота сечения балки, расположенного над средней опорой, равен нулю. На фиг. 12. 5, д характер деформации балки показан пунктиром. Таким образом каждый из пролетов можно рассматривать как бы заделанным в среднем сечении балки и свободно опертым другим концом, т. е. так, как это было в предыдущем примере, где мы получили реакцию опоры равной $\frac{3}{8} ql$.

Уравнение перемещений в канонической форме. Уравнение перемещений (2), которым мы уже дважды пользовались, обычно пишется в таком виде:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0. \quad (3)$$

Здесь

X_1 — неизвестное усилие отбрасываемой (лишней) связи, обозначаемое ранее просто X ; индекс 1 вводится в соответствии с общей системой индексации, более удобной при решении систем с несколькими лишними связями (см. далее § 6);

δ_{11} — перемещение по направлению силы X_1 от силы, равной единице и направленной по X_1 (см. фиг. 12. 5, з).

Таким образом первое слагаемое уравнения (3) выражает попрежнему перемещение, вызываемое лишней неизвестной в своем направлении, а второе слагаемое — Δ_{1p} — перемещение по направлению силы X_1 , вызываемое заданной внешней нагрузкой.

Уравнение (3) называется *уравнением перемещений в канонической форме* или просто *каноническим уравнением*. Оно применяется при расчете всех однажды статически неопределимых систем и попрежнему выражает условие, что перемещение по направлению неизвестной силы X_1 при совместном действии внешней нагрузки и силы X_1 равно нулю. При расчете многократно

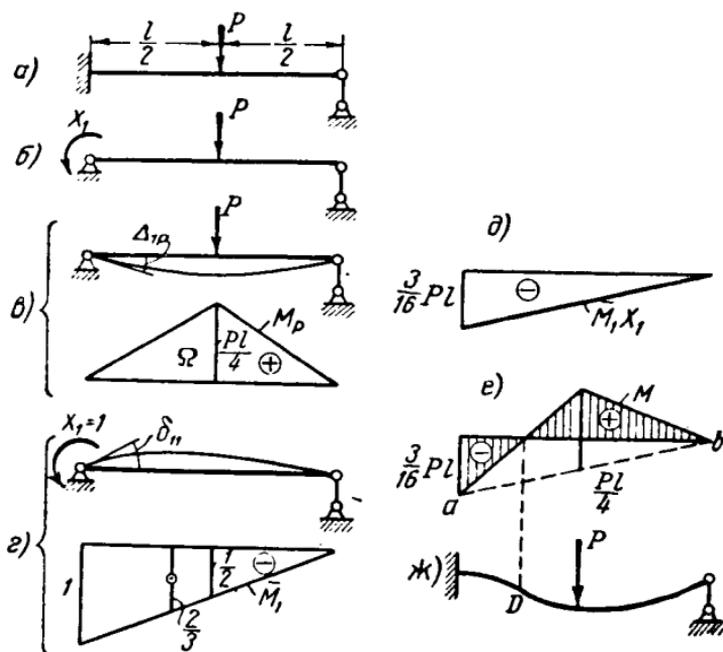
статически неопределимых систем составляются системы уравнений перемещений — см. далее § 6.

Индекс P в уравнении (3), указывающий внешнюю нагрузку, как причину перемещения, будем понимать условно и применять всегда независимо от характера нагрузки.

§ 4. Применение канонического уравнения к расчету статически неопределимых балок

Рассмотрим несколько примеров расчета однажды статически неопределимых балок при помощи канонического уравнения (3).

Пример 1. Построить эпюру изгибающих моментов для балки, заделанной одним концом и свободно опертой другим и нагруженной сосредоточенной силой P по середине (фиг. 12.6,а).



Фиг. 12.6. Порядок расчета статически неопределимой системы на примере балки с защемленным концом.

а — заданная система; б — основная система, ей эквивалентная, нагруженная внешней нагрузкой и «лишней» неизвестной X_1 ; в и г — «грузовое» и «единичное» состояния основной системы; д — эпюра изгибающих моментов от лишней неизвестной X_1 ; е — полная эпюра моментов; ж — характер деформации системы (в соответствии с полуэпюрой M).

Такая балка уже рассматривалась нами ранее (пример 1 предыдущего параграфа), но при иной нагрузке. Тогда мы приняли основную систему в виде консоли. Можно было бы принять ее и в виде балки. Приняв за лишнюю неизвестную X_1 момент в за-

делке, будем иметь основную систему в виде балки на двух опорах (фиг. 12.6,б). Момент X_1 найдется из канонического уравнения (3):

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}.$$

Здесь Δ_{1P} —перемещение, возникающее после отбрасывания лишней связи, по ее направлению, вызываемое заданной нагрузкой P , т. е. в данном случае угол поворота конца балки (фиг. 12.6,в), а δ_{11} —перемещение там же от момента, равного единице, приложенного в направлении X_1 (фиг. 12.6,г).

Перемещения Δ_{1P} и δ_{11} определим, пользуясь формулой (10) предыдущей главы,

$$\Delta_{1P} = \frac{\Sigma \bar{M}_1 M_P \Delta x}{EJ}, \quad (4)$$

$$\delta_{11} = \frac{\Sigma \bar{M}_1 \bar{M}_1 \Delta x}{EJ} = \frac{\Sigma \bar{M}_1^2 \Delta x}{EJ}, \quad (5)$$

где M_P —изгибающий момент в текущем сечении основной системы от заданной нагрузки P и \bar{M}_1 —изгибающий момент в том же сечении от пары с моментом, равным единице, действующей в направлении момента X_1 .

Для вычисления сумм (4) и (5) по правилу Верещагина нужно построить эпюры M_P и \bar{M}_1 . Эти эпюры показаны на фиг. 12.6, в и г. Чтобы вычислить Δ_{1P} , нужно „перемножить“, как видно из формулы (4), эпюры \bar{M}_1 и M_P . Умножая площадь $\Omega = \frac{Pl^2}{8}$ эпюры M_P на ординату $-\frac{1}{2}$, взятую из эпюры \bar{M}_1 , соответствующую центру тяжести площади Ω , и деля результат на EJ , найдем

$$\Delta_{1P} = \frac{Pl^2}{8} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{EJ} = -\frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Чтобы вычислить δ_{11} , умножаем площадь эпюры \bar{M}_1 на ординату из той же эпюры [см. формулу (5)], проходящую через центр тяжести ее, и результат делим на жесткость балки EJ :

$$\delta_{11} = \left(-\frac{1}{2} l_1 \right) \left(-\frac{2}{3} \right) \frac{1}{EJ} = \frac{l}{3EJ}.$$

Теперь можем определить значение момента X_1 :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{Pl^2}{16EJ}}{\frac{l}{3EJ}} = \frac{3}{16} Pl.$$

Искомую эпюру изгибающих моментов M получим по принципу сложения действия сил. На балку действуют две силы: нагрузка P и реактивный момент X_1 . Запишем полный изгибающий момент в некотором сечении балки как сумму моментов от каждого из двух названных факторов:

$$M = M_p + \bar{M}_1 X_1. \quad (6)$$

Для пояснения последнего слагаемого напомним, что \bar{M}_1 есть изгибающий момент от пары с моментом, равным единице, действующей в направлении X_1 , следовательно, чтобы получить момент от X_1 , нужно \bar{M}_1 умножить на X_1 .

Таким образом эпюру моментов M , которую требовалось построить, получим, складывая эпюру M_p с эпюрой \bar{M}_1 (фиг. 12. 6,з), все ординаты которой умножены на $X_1 = \frac{3}{16} Pl$. Первое слагаемое — эпюра M_p — уже построена ранее (фиг. 12. 6,в). Второе слагаемое — эпюра $\bar{M}_1 X_1$ — показано на фиг. 12. 6,д. При сложении эпюр учитываем их знаки. Отложим сперва прямолинейную эпюру $\bar{M}_1 X_1$ (фиг. 12. 6,е), затем от линии ab этой эпюры отложим вертикально вверх положительные ординаты эпюры M_p , которые будут взаимно уничтожаться с отрицательными ординатами эпюры $\bar{M}_1 X_1$ там, где будут накладываться на них. Результирующая эпюра заштрихована.

По эпюре моментов можно судить об общей картине деформации балки. На фиг. 12. 6,ж показан характер упругой линии балки. На участке, где эпюра моментов отрицательна (влево от точки D), ось балки изогнута выпуклостью кверху. На участке, где эпюра моментов положительна (вправо от точки D), ось балки изогнута выпуклостью книзу. Точка D , разделяющая эти участки, называется точкой перегиба упругой линии. В точке перегиба $M=0$.

Пример 2. Проверить прочность хромансильевой¹ трубы размерами 20×18 мм, длиной $l=2$ м, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q=30$ кг/м на всем протяжении (фиг. 12. 7,а). Концы балки зашпелены. Допускаемое напряжение $[\sigma]=4000$ кг/см².

Горизонтальные реакции опор H можно считать равными нулю. В подавляющем большинстве реальных конструкций они не вызывают значительных напряжений. Вертикальные реакции в данном случае одинаковы и равны каждой половине всей нагрузки:

$$V = \frac{ql}{2} = \frac{30 \cdot 2}{2} = 30 \text{ кг.}$$

¹ Хромансиль — специальная сталь высокой прочности.

Неизвестными являются только реактивные моменты X_1 , также вследствие симметрии конструкции и нагрузки, равные друг другу. Примем оба эти момента за лишнюю неизвестную X_1 , а за основную систему, следовательно, простую балку (фиг. 12.7,б).

Величина X_1 определится попержнему на основании канонического уравнения (3)

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

При этом Δ_{1P} означает сумму углов поворота обоих концов балки, вызываемых нагрузкой q , а δ_{11} — сумму углов, вызываемых одновременным действием двух единичных моментов $X_1=1$ (см. фиг. 12.7,з).

Указанная сумма углов равна, как очевидно, взаимному углу поворота концов балки друг относительно друга. В дальнейшем мы неоднократно будем применять уравнение перемещений к взаимным смещениям.

Значения Δ_{1P} и δ_{11} вычислим по правилу Верещагина. Построим для основной системы эпюры изгибающих моментов: M_P — от заданной нагрузки (фиг. 12.7,в) и \bar{M}_1 — от единичных моментов

Фиг. 12.7. Расчет балки с двумя защемленными концами при симметричной нагрузке. Моменты защемления X_1 одинаковы; поэтому задача однажды статически неопределима.

(фиг. 12.7,д). Пользуясь этими эпюрами, вычислим коэффициент канонического уравнения

$$\delta_{11} = (-1)(-1) \frac{1}{EJ} = \frac{l}{EJ}$$

и свободный член канонического уравнения

$$\Delta_{1P} = \left(\frac{2}{3} l \frac{ql^2}{8} \right) (-1) \frac{1}{EJ} = -\frac{ql^3}{12EJ}$$

Следовательно,

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql^2}{12}$$

¹ Индекс P применяем здесь (и в подобных случаях далее) условно. Этот индекс указывает, что причиной перемещения является внешняя нагрузка (хотя в данном случае она не является сосредоточенной силой).

Окончательную эпюру изгибающих моментов M построим по формуле (6) как сумму эпюр M_p и $\bar{M}_1 X_1$. Сперва отложим эпюру $M_1 X_1$ (прямоугольник на фиг. 12.7, *e* внизу). Наложив затем на эту отрицательную эпюру положительную эпюру M_p , как показано на рисунке, получаем окончательную эпюру моментов M , заштрихованную на чертеже. Как видим из эпюры M , наибольший изгибающий момент имеет место у заделки и равен

$$\frac{ql^2}{12} = \frac{30 \cdot 2^2}{12} = 10 \text{ кгм} = 1000 \text{ кг см.}$$

Момент сопротивления сечения трубы изгибу вычислим по формуле [см. гл. IX, § 4, формула (12')]:

$$W = 0,1 D^3 (1 - \alpha^4),$$

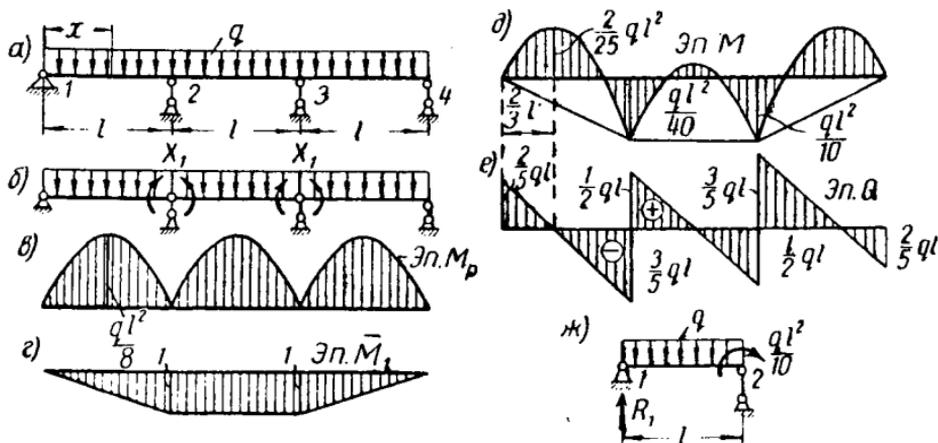
где D — внешний диаметр трубы, а $\alpha = \frac{d}{D}$ — отношение внутреннего диаметра к внешнему. Получим

$$W = 0,1 \cdot 2^3 (1 - 0,9^4) = 0,275 \text{ см}^3.$$

Следовательно, напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{1000}{0,275} = 3640 < 4000 \text{ кг/см}^2.$$

Максимальное напряжение в материале балки 3640 кг/см^2 меньше допускаемого, т. е. прочность балки обеспечена.



Фиг. 12.8. Симметричная трехпролетная балка при симметричной нагрузке также однажды статически неопределима.

Пример 3. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки на четырех опорах с равными пролетами (фиг. 12.8, *a*), загруженной равномерно распределенной нагрузкой на всем протяжении.

За лишнюю неизвестную X_1 примем изгибающие моменты в сечениях балки над опорами 2 и 3; вследствие симметрии они одинаковы. Соответственно основная система представляет собой балку, в которой над опорой 2 и 3 поставлены шарниры (см. фиг. 12. 8,б). На фиг. 12. 8,в и г показаны эпюры изгибающих моментов, построенные для основной системы от заданной нагрузки (M_p), и от единичных моментов $X_1=1$ (\bar{M}_1). Эпюра M_p представляется тремя одинаковыми параболами; максимальная ордината каждой из них равна $\frac{ql^2}{8}$, площадь $\frac{ql^3}{12}$. Эпюра \bar{M}_1 состоит из трех прямолинейных участков; при принятом направлении моментов X_1 она отрицательна. По формулам (4) и (5), пользуясь правилом Верещагина, найдем

$$\Delta_{1P} = \left[\frac{ql^3}{12} \left(-\frac{1}{2} \right) 2 + \frac{ql^3}{12} (-1) \right] \frac{1}{EJ} = -\frac{ql^3}{6EJ},$$

$$\delta_{11} = \left[\left(-\frac{1}{2} l \right) \left(-\frac{2}{3} \right) 2 + (-l)(-1) \right] \frac{1}{EJ} = \frac{5l}{3EJ}.$$

Таким образом [см. формулу (3)]

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{ql^3}{6EJ}}{\frac{5l}{3EJ}} = \frac{ql^2}{10}.$$

Имея значение X_1 , строим окончательную эпюру $M = M_p + M_1 X_1$, складывая, как и ранее, эпюры M_p и $M_1 X_1$. Эпюра M показана на фиг. 12. 8,д.

Чтобы построить эпюру поперечных сил, определим реакции опор. Рассмотрим первый пролет отдельно (фиг. 12. 8,ж). В месте разреза приложим изгибающий момент, который известен: $\frac{ql^2}{10}$. Напишем уравнение равновесия для отрезанного участка балки — сумму моментов относительно точки 2:

$$R_1 l - ql \frac{l}{2} + \frac{ql^2}{10} = 0.$$

Отсюда находим реакцию опоры 1:

$$R_1 = \frac{2}{5} ql.$$

Реакция опоры 4, очевидно, такая же.

Реакции средних опор $R_2 = R_3$ найдем, если напишем сумму проекций на вертикаль всех сил, действующих на балку, и приравняем ее нулю:

$$\frac{2}{5} ql \cdot 2 + R_2 + R_3 - 3ql = 0.$$

Отсюда $R_2 = R_3 = \frac{11}{10} ql$. Зная реакции всех опор, нетрудно определить поперечную силу Q в любом сечении балки на основании того, что поперечная сила равна сумме сил, действующих на балку по одну сторону от сечения. Например, поперечная сила у опоры 1 равна реакции этой опоры $\frac{2}{5} ql$. Поперечная сила Q_x в произвольном сечении первого пролета в расстоянии x от опоры 1 выражается уравнением

$$Q_x = \frac{2}{5} ql - qx.$$

Это — уравнение прямой. Положив $x = l$, найдем поперечную силу в конце первого пролета, т. е. вблизи опоры 2, левее ее. Она равна $\frac{2}{5} ql - ql = -\frac{3}{5} ql$. Эюра Q в первом пролете показана на фиг. 12.8, *e*. Там же показана эюра Q и в других пролетах. Так, для второго пролета, т. е. когда x больше l и меньше $2l$ (начало отсчета попрежнему на опоре 1), будем иметь уравнение для поперечной силы

$$Q_x = R_1 + R_2 - qx = \frac{2}{5} ql + \frac{11}{10} ql - qx = 1,5ql - qx.$$

Из этого уравнения при $x = l$ (т. е. в начале второго пролета — вблизи опоры 2, правее ее) получим $Q = \frac{1}{2} ql$ и при $x = 2l$ (т. е. в конце второго пролета — вблизи опоры 3, левее ее) получим $Q = -\frac{1}{2} ql$, что и показано на эюре. Аналогично строим эюру и для третьего пролета.

Как видно из эюры Q , поперечная сила в первом пролете равна нулю в сечении, отстоящем от опоры 1 на расстоянии $\frac{2}{5} l$. В этом сечении, как мы знаем (см. гл. VIII), изгибающий момент может иметь наибольшее значение. Вычислим его, пользуясь непосредственно тем, что изгибающий момент численно равен сумме моментов односторонних сил относительно сечения. Рассматривая силы слева от сечения, напишем

$$M_{\max} = R_1 \frac{2}{5} l - \frac{2}{5} l q \frac{\frac{2}{5} l}{2}.$$

Подставим сюда $R_1 = \frac{2}{5} ql$, как найдено выше; будем иметь

$$M_{\max} = \frac{2}{25} ql^2.$$

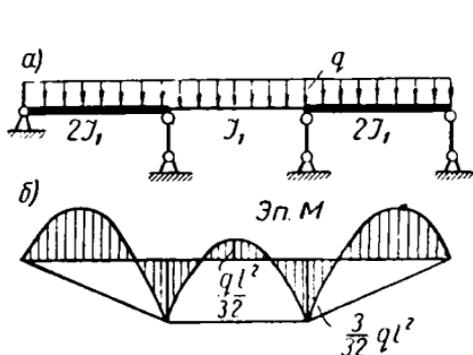
Момент в середине второго пролета определяется при самом построении эпюры M как разность $\frac{ql^2}{8} - \frac{ql^2}{10} = \frac{ql^2}{40}$. Итак, видим, что наибольший изгибающий момент (по абсолютной величине) равен $\frac{ql^2}{10}$.

Пример 4. Решить предыдущую задачу при условии, что момент инерции сечения балки в крайних пролетах вдвое больше, чем в среднем (фиг. 12.9, а). Ход решения остается прежним, но числовые значения Δ_{1P} и δ_{11} изменяются:

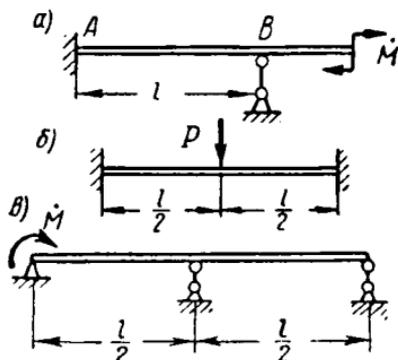
$$\Delta_{1P} = \frac{ql^3}{12} \left(-\frac{1}{2} \right) 2 - \frac{1}{E2J_1} + \frac{ql^3}{12} (-1) \frac{1}{EJ_1} = -\frac{ql^3}{8EJ_1};$$

$$\delta_{11} = \left(-\frac{1}{2} l \right) \left(-\frac{2}{3} \right) 2 - \frac{1}{E2J_1} + (-l)(-1) \frac{1}{EJ_1} = \frac{4l}{3EJ_1}.$$

Отсюда $X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{3ql^3}{32}$. Соответствующая эпюра моментов показана на фиг. 12.9, б (ср. с фиг. 12.8, д).



Фиг. 12.9. Соотношение жесткостей элементов статической неопределимой системы влияет на распределение внутренних сил. Эпюра M в данном примере отличается от эпюры M в предыдущем примере.



Фиг. 12.10.

Задачи. 1. Определить реакцию опоры B (фиг. 12.10, а) у балки, нагруженной сосредоточенной парой M на конце. Построить также эпюру изгибающих моментов.

Ответ: $R_B = \frac{3}{2} \frac{M}{l}$.

2. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, показанной на фиг. 12.10, б. **Ответ:** $M_{\max} = \frac{Pl}{8}$, $Q_{\max} = \frac{P}{2}$.

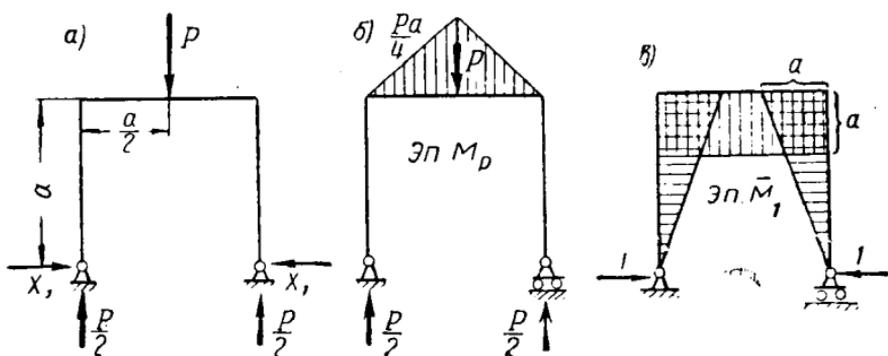
3. То же для балки, показанной на фиг. 12.10, в, нагруженной сосредоточенной парой M на левом конце. **Ответ:** изгибающий момент над второй опорой равен $-\frac{M}{4}$.

4. Решить задачу, рассмотренную в примере 3, при условии, что балка в среднем пролете имеет весьма большую жесткость. *Указание:* при вычислении Δ_{1P} и δ_{11} вторыми слагаемыми можно пренебречь, так как они в знаменателе содержат весьма большие числа и, следовательно, весьма малы. *Ответ:* $X_1 = \frac{ql^2}{8}$ (следовательно, изгибающий момент по середине балки равен нулю).

§ 5. Статически неопределимые рамы

В настоящем параграфе рассмотрим примеры применения канонического уравнения [см. уравнение (3) в § 3] к расчету статически неопределимых рам. Смысл и порядок рассуждений остаются совершенно такими же, как и при расчете статически неопределимых балок.

Пример 1. Определить распор (горизонтальные составляющие опорных реакций) П-образной рамы с шарнирно опертыми концами, несущей сосредоточенный груз P по середине (фиг. 12.11). Высота и ширина рамы одинаковы и равны a . Поперечное сечение рамы постоянно.



Фиг. 12.11. К определению распора двухопорной рамы.

a — заданная рама, нагрузка и реакции опор; б и в — «грузовая» и «единичная» эпюры изгибающих моментов для основной системы.

Обе опоры рамы неподвижны. Следовательно, каждая из них дает две составляющие реакции: вертикальную и горизонтальную. Вертикальные составляющие реакций обеих опор одинаковы вследствие симметрии и равны каждая $\frac{P}{2}$. Горизонтальные составляющие реакций также одинаковы, они уравнивают так называемый распор рамы. Величина распора статически неопределима. Обозначим ее и, следовательно, горизонтальные реакции опор через X_1 и примем последние за лишнюю неизвестную.

Отбросив одну из горизонтальных связей, получим систему без распора — основную систему. На фиг. 12. 11, б и в изображены эпюры изгибающих моментов для основной системы от нагрузки P — эпюра M_P и от горизонтальных единичных сил — эпюра \bar{M}_1 . Эпюры отложены с той стороны бруса, которая при данной изгибающей нагрузке сжата, как говорят, со стороны сжатых волокон. Например, при действии силы P в поперечине рамы сверху образуется сжатая зона, а снизу — растянутая — эпюра M расположена сверху. При действии единичных сил сжатые волокна находятся внутри рамы — эпюра \bar{M}_1 расположена внутри; стойкам соответствуют треугольные эпюры, поперечине — прямоугольная; на чертеже эти эпюры частично перекрывают одна другую.

„Перемножая“, как и ранее, полученные эпюры M_P и \bar{M}_1 [см. формулу (4)] по Верещагину, найдем свободный член Δ_{1P} канонического уравнения (3). Площадь треугольника эпюры M_P равна $\frac{1}{2} a \frac{Pa}{4} = \frac{Pa^2}{8}$. Соответствующая ордината из эпюры \bar{M}_1 равна a . При перемножении учтем, что эпюры M и \bar{M}_1 различных знаков и, следовательно, произведение будет отрицательным. Получим

$$\Delta_{1P} = -\frac{Pa^2}{8} a \frac{1}{EJ} = -\frac{Pa^3}{8EJ}.$$

Для определения δ_{11} „умножаем“ эпюру M_1 на самое себя [см. формулу (5)]:

$$\delta_{11} = \left(\frac{1}{2} a a \frac{2}{3} a 2 + a a a \right) \frac{1}{EJ} = \frac{5}{3} \frac{a^3}{EJ}.$$

Теперь можем определить искомую величину распора:

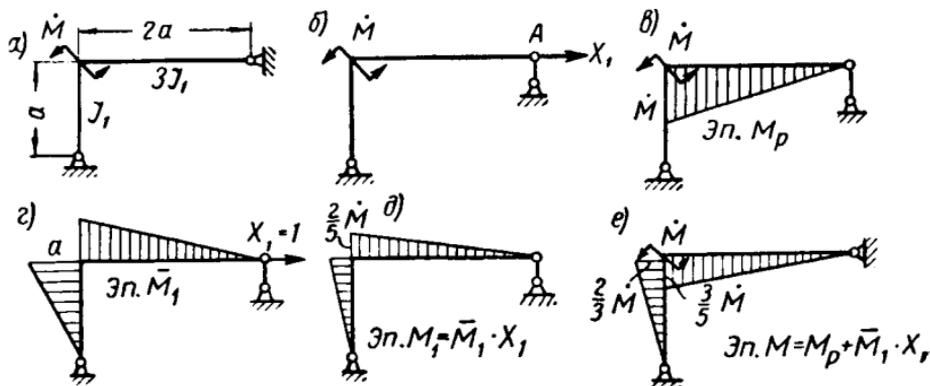
$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{Pa^3}{8EJ}}{\frac{5}{3} \frac{a^3}{EJ}} = \frac{3}{40} P.$$

Пример 2. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы (фиг. 12. 12, а), состоящей из двух стержней, сваренных под прямым углом. Поперечные сечения стержней различны. Момент инерции сечения вертикального стержня равен J_1 , а горизонтального — $3J_1$. Нагрузкой является сосредоточенный момент M , приложенный в узле. Прикрепление рамы к опорам осуществляется неподвижными шарнирами, которые можно считать идеальными (т. е. трением в шарнирах можно пренебречь).

Каждая из неподвижных шарнирных опор представляет собой две связи. Следовательно, система однажды статически неопреде-

лима. Отбросив одну связь, например, так, как показано на фиг. 12. 12, б, получим статически определимую основную систему. Отброшенную связь заменим ее реакцией X_1 . Неизвестную величину найдем, как всегда, из канонического уравнения (3).

Чтобы вычислить Δ_{1P} и δ_{11} , построим эпюры изгибающих моментов M_P и \bar{M}_1 от внешней нагрузки — момента \dot{M} и 1 от



Фиг. 12. 12. Порядок расчета рамы.

а — данная однажды статически неопределимая рама; б — основная система, эквивалентная данной; в и г — «грузовая» и «единичная» эпюры моментов; д — эпюра моментов от лишней неизвестной; е — полная эпюра моментов.

единичной нагрузки, соответствующей силе X_1 (см. фигуру 12. 12, в и г). По формулам (4) и (5) найдем

$$\Delta_{1P} = -\frac{\dot{M}2a}{2} \frac{2}{3} a \frac{1}{E3J_1} = -\frac{2}{9} \frac{\dot{M}a^2}{EJ_1},$$

$$\delta_{11} = \frac{a}{2} \frac{a}{3} \frac{2}{EJ_1} + \frac{a2a}{2} \frac{2}{3} a \frac{1}{E3J_1} = \frac{5}{9} \frac{a^3}{EJ_1}.$$

Следовательно,

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{2}{5} \frac{\dot{M}}{a}.$$

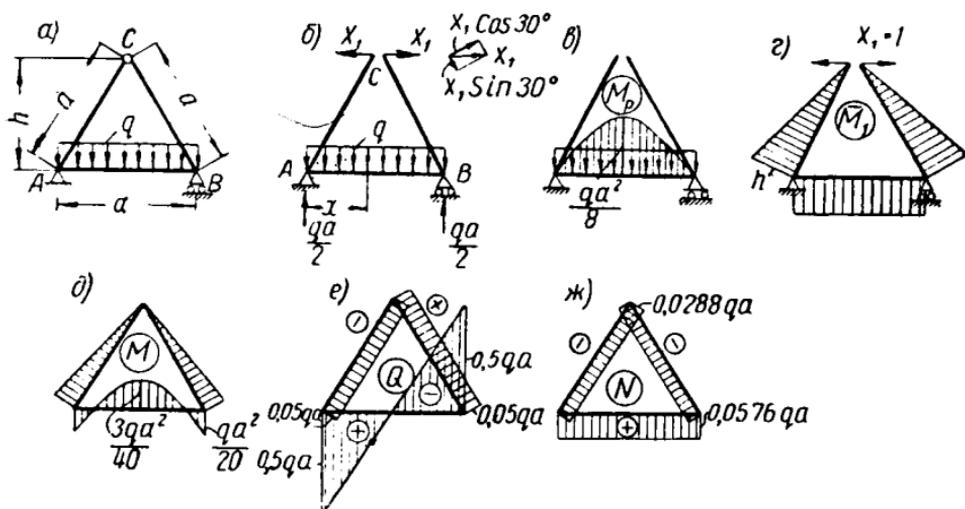
Умножая эпюру \bar{M}_1 , построенную от единичной нагрузки, на $\frac{2}{5} \frac{\dot{M}}{a}$, получим эпюру M_1 , показанную на фиг. 12. 12, д.

Сумма этой эпюры с эпюрой M_P дает искомую эпюру M (фиг. 12. 12, е) изгибающих моментов для заданной рамы.

Пример 3. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных сил и продольных сил для рамы, показанной на фиг. 12. 13. Рама представляет собой равносторонний треугольник, два узла которого (А и В) жестки, а один (С) шарнирен. Поперечное се-

чение стержней рамы постоянно. Нагрузка интенсивностью q равномерно распределена по горизонтальному стержню рамы.

Рассматриваемая рама содержит две «лишних» связи (см. § 1), но при данной симметричной нагрузке направление сил взаимодействия в шарнире известно и рама однажды статически неопределима. Разрезая раму в шарнире, получим статически определимую раму, которую примем за основную систему. Силы взаимодействия в шарнире заменим силами X_1 . Других сил в шарнире возникнуть не может в силу симметрии системы и нагрузки. На фиг. 12.13,б показана полученная система, эквивалентная заданной.



Фиг. 12.13. Эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для симметричной треугольной рамы с шарниром. За лишнюю неизвестную X_1 принят распор в шарнире С.

Эпюры моментов M_p и \bar{M}_1 от нагрузки q и от единичной нагрузки, необходимые для вычисления коэффициента δ_{11} и свободного члена Δ_{1P} канонического уравнения, показаны на фиг. 12.13,в и г. Вычисляя, как и ранее, находим

$$\delta_{11} = \left(\frac{ah}{2} \frac{2}{3} h^2 + ah h \right) \frac{1}{EJ} = \frac{5}{3} \frac{ah^2}{EJ},$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{2}{3} a \frac{qa^2}{8} h \frac{1}{EJ} = -\frac{qa^3h}{12EJ}.$$

Отсюда

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{qa^2}{20h}$$

или, учитывая, что $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a = 0,867a$, найдем $X_1 = 0,0576qa$.

Окончательную эпюру изгибающих моментов M получим, складывая попрежнему эпюру M_p (от заданной нагрузки) с эпюрой \bar{M}_1 от единичной нагрузки, умноженной на $X_1 = \frac{qa^2}{20h}$ [см. формулу (6)]. На фиг. 12.13, δ показана эпюра M .

На построении эпюр поперечных сил Q и продольных сил N остановимся подробнее. Выше, в гл. VIII, были рассмотрены примеры построения эпюр Q и N для статически определимых брусев. Точно так же построим эти эпюры для нашей основной системы с учетом сил X_1 (фиг. 21.13,б), и, поскольку такая система эквивалентна заданной, эти эпюры и будут искомыми.

Определим значения Q и N в наклонных стержнях рамы. Разложим силу X_1 на две составляющие, как показано на фиг. 12.13,б, одну, направленную вдоль стержня, и другую, — перпендикулярную к нему. Первая составляющая равна $X_1 \sin 30^\circ = X_1 \frac{1}{2} = 0,0288 qa$. Она является сжимающей силой

для стержня. Таким образом продольная сила в наклонных стержнях CA и CB (фиг. 12.13,а) $N_{CA} = N_{CB} = -0,0288 qa$. Вторая составляющая силы X_1 , равная $X_1 \cos 30^\circ = X_1 0,867 = 0,05 qa$, является поперечной силой в наклонном стержне рамы. В соответствии с правилом знаков для поперечной силы, принятым в гл. VIII, поперечная сила в стержне CB положительна, а в стержне CA отрицательна:

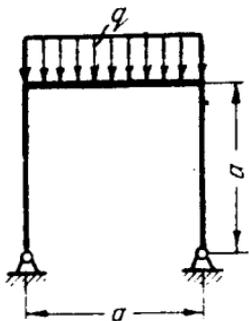
$$Q_{CB} = 0,05 qa, \quad Q_{CA} = -0,05 qa.$$

Обратимся к горизонтальному стержню AB рамы. Проведя произвольное сечение в расстоянии x от левой опоры и проектируя на направление сечения все силы, действующие на раму слева от сечения, получим $Q_{AB} = \frac{qa}{2} - qx$. При $x=0$

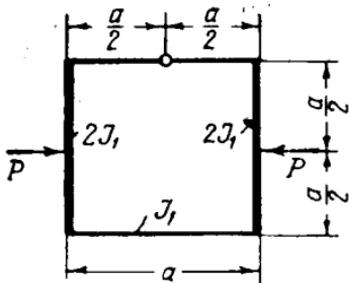
отсюда имеем $\frac{qa}{2}$ и при $x=a$ находим $-\frac{qa}{2}$ (см. эпюру на фиг. 12.13, e). Чтобы получить продольную силу, спроектируем те же силы на нормаль к сечению. Находим $N_{AB} = X_1 = 0,0576 qa$. Эпюра продольных сил N показана на фиг. 12.13, $ж$.

Задачи. 1. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы, рассмотренной в примере 1, но при равномерной распределенной нагрузке (фиг. 12.14). *Ответ:* $M_{\max} = \frac{3}{40} qa^2$.

2. Построить эпюры M , Q и N для рамы, показанной на фиг. 12.15. *Ответ:* $M_{\max} = \frac{53}{252} Pa$.



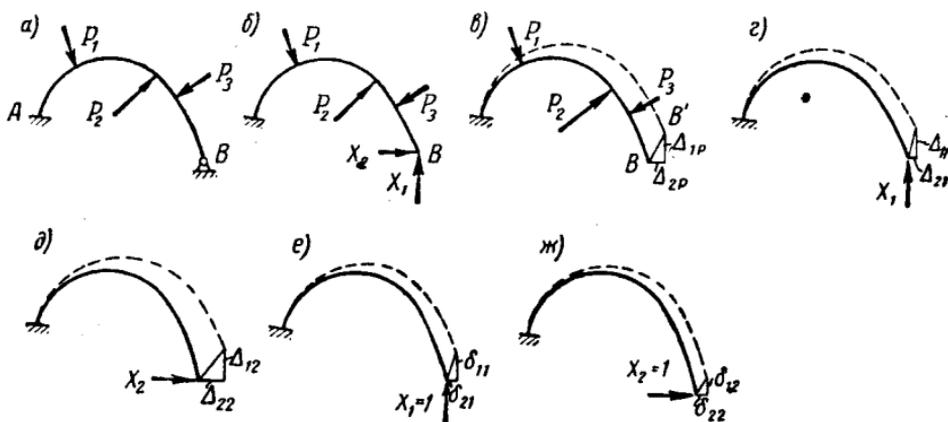
Фиг. 12. 14.



Фиг. 12. 15.

§ 6. Система уравнений перемещений

В случае многократно статически неопределимой балки или рамы приходится составлять систему уравнений перемещений. Пусть, например, требуется рассчитать раму произвольного очертания (фиг. 12. 16). Один конец рамы жестко заделан, другой—



Фиг. 12. 16. К составлению системы уравнений перемещений.

a — данная дважды статически неопределимая рама. За лишние неизвестные взяты реакции опоры *B*; *б* — система, эквивалентная данной (точка *B* не перемещается); *в*, *г* и *д* — перемещения основной системы, вызываемые отдельно внешней нагрузкой и каждой из лишних неизвестных; *е* и *ж* — перемещения от единичных сил.

шарнирно оперт. Такая система дважды статически неопределима. В самом деле, отбросив шарнирную опору, мы отбрасываем две связи, причем система превращается в статически определимую — консоль.

Обозначим вертикальную и горизонтальную составляющие реакции шарнирной опоры *B* через X_1 и X_2 и примем их за лишние неизвестные. Отбросив опору *B*, приложим внешние силы X_1 и X_2 , равные неизвестным реакциям опоры *B* (фиг. 12. 16, б). Полу

чим систему, эквивалентную заданной, так как хотя опора и отброшена, но ее действие заменено силами X_1 и X_2 . Поэтому система, показанная на фиг. 12. 16,б, деформируется так же, как и заданная система (фиг. 12. 16,а). Точка B останется попрежнему неподвижной.

Рассмотрим отдельно действие нагрузки (P_1 , P_2 и P_3) и лишних неизвестных (X_1 и X_2). Пусть под действием внешней нагрузки (P_1 , P_2 и P_3) система, лишенная опоры B (наша основная система), деформируется, как показано на фиг. 12. 16,в. Точка B при этом перемещается в положение B' . Обозначим составляющую перемещения точки B , соответствующую направлению силы X_1 , через Δ_{1P} , а составляющую, соответствующую направлению X_2 , через Δ_{2P} . В этих обозначениях попрежнему первый индекс показывает направление перемещения. Цифра 1 указывает, что данная составляющая перемещения совпадает по направлению с силой X_1 , т. е. в рассматриваемом случае вертикальна; цифра 2 означает перемещение, совпадающее по направлению с силой X_2 , в рассматриваемом случае — горизонтальное. Второй индекс — P , как и ранее, выражает причину перемещений, т. е. внешнюю нагрузку — в данном случае совокупность P_1 , P_2 и P_3 .

Теперь рассмотрим действие сил X_1 и X_2 . Пусть под влиянием силы X_1 наша основная система деформируется, как показано на фиг. 12. 16,г, а под влиянием только силы X_2 — как изображено на фиг. 12. 16,д. Соответствующие перемещения точки B показаны на рисунках в принятых обозначениях; так Δ_{12} означает перемещение по направлению силы X_1 (т. е. вертикальное) от силы X_2 ; Δ_{11} означает перемещение в направлении силы X_1 от самой же силы X_1 и т. п.

При совместном действии внешней нагрузки (P_1 , P_2 и P_3) и лишних неизвестных X_1 и X_2 перемещение точки B , как мы отметили выше, равно нулю как по направлению X_1 , так и по направлению X_2 , т. е.

$$\Delta_{1P} + \Delta_{11} + \Delta_{12} = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{2P} + \Delta_{21} + \Delta_{22} = 0. \quad (7)$$

Обозначим через δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} и δ_{22} перемещения от единичных сил, соответствующих силам X_1 и X_2 , как показано на фиг. 12. 16,е и ж. Тогда будет

$$\Delta_{11} = \delta_{11}X_1; \quad \Delta_{21} = \delta_{21}X_1; \quad \Delta_{12} = \delta_{12}X_2; \quad \Delta_{22} = \delta_{22}X_2,$$

и уравнения перемещений (7) запишутся в таком виде:

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1P} = 0; \quad X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{2P} = 0. \quad (8)$$

Уравнения (8) называются *каноническими уравнениями*. Коэффициенты уравнений δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} и δ_{22} , а также свободные члены Δ_{1P} и Δ_{2P} представляют собой, как мы видели, перемещения и могут быть вычислены по формуле (10) предыдущей главы при помощи правила Верещагина [см. там же формулу (15)].

Так, например, $\delta_{11} = \sum \frac{\bar{M}_1^2 \Delta s}{EJ}$, где \bar{M}_1 — изгибающий момент в основной системе от силы X_1 , равной единице. Чтобы вычислить значение δ_{11} по Верещагину, нужно построить эпюру \bar{M}_1 и „умножить“ ее на себя же. Аналогично вычисляется $\delta_{22} = \sum \frac{\bar{M}_2^2 \Delta s}{EJ}$, где \bar{M}_2 — изгибающий момент в основной системе от $X_2 = 1$. Коэффициенты δ_{11} и δ_{22} с одинаковыми индексами называются *главными*. Они всегда положительны.

Коэффициенты с неодинаковыми индексами называются *побочными*. Они вычисляются путем „перемножения“ двух различных эпюр и могут быть как положительными, так и отрицательными (и, следовательно, равными нулю) в зависимости от знаков „перемножаемых“ эпюр. Так, чтобы вычислить $\delta_{21} = \sum \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_1 \Delta s}{EJ}$, нужно „перемножить“ эпюры \bar{M}_2 и \bar{M}_1 .

Коэффициент $\delta_{12} = \sum \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 \Delta s}{EJ}$, очевидно, равен коэффициенту δ_{21} , так как определяется „произведением“ тех же эпюр. Таким образом делаем важное заключение: *коэффициенты с одинаковыми, но переставленными индексами равны между собой*¹.

Свободные члены Δ_{1P} и Δ_{2P} канонических уравнений выражаются так:

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\bar{M}_1 M_P \Delta s}{EJ}, \quad \Delta_{2P} = \sum \frac{\bar{M}_2 M_P \Delta s}{EJ},$$

где M_P — изгибающий момент в основной системе от заданной внешней нагрузки. Чтобы вычислить, например, Δ_{1P} , нужно „перемножить“ эпюры \bar{M}_1 и M_P .

Зная коэффициенты δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} и свободные члены Δ_{1P} и Δ_{2P} канонических уравнений (8), можем определить из них неизвестные X_1 и X_2 . Этим самым, как говорят, раскрывается статическая неопределимость. Теперь возможно при помощи уравнений статики найти реакции левой опоры и также определить изгибающий момент, поперечную силу и продольную силу в каждом сечении рамы. При этом удобно воспользоваться результатами, уже полученными в процессе решения. Так, пользуясь принципом сложения, как это мы делали и раньше, мы можем выразить полный изгибающий момент в сечении рамы как сумму изгибающих моментов отдельно от заданной нагрузки и от лишних неизвестных X_1 и X_2 . Получим такую формулу [аналогичную формуле (6)]:

$$M = M_P + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2. \quad (9)$$

¹ Это положение носит название теоремы взаимности перемещений.

Далее на примере показано построение эпюры изгибающих моментов для дважды статически неопределимой рамы.

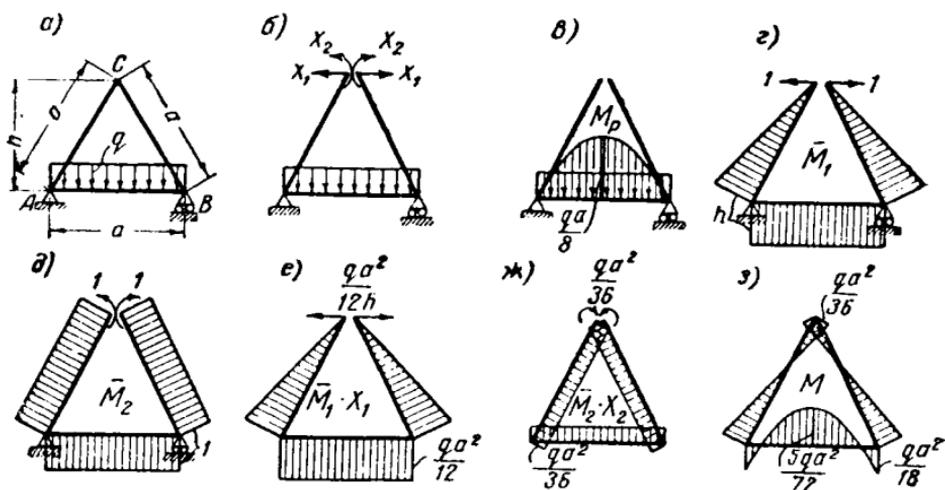
В случае трижды статически неопределимой системы состав- ляются таким же путем три канонических уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1P} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2P} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В случае четырежды статически неопределимой системы состав- ляются четыре уравнения и т. д.

§ 7. Примеры расчета многократно статически неопределимых систем

Пример 1. Построим эпюру изгибающих моментов для замкнутой рамы (фиг. 12. 17) постоянного сечения, имеющей вид равностороннего треугольника, как выше в примере 3 § 5. Но тогда



Фиг. 12. 17. Симметричная треугольная рама. При симметричной нагрузке дважды статически неопределима; за лишние неизвестные принимаем распор и изгибающий момент в узле С.

a и *б* — заданная и эквивалентная ей системы; *в*, *г* и *д* — основная система в «грузовом» и «единичных» состояниях; *з* — окончательная эпюра моментов — сумма эпюры M_p с эпюрами от лишних неизвестных (фиг. *е* и *ж*).

узел С предполагался шарнирным, и для решения задачи при симметричной нагрузке достаточно было составить одно уравнение перемещений. В данном случае в узле С, кроме распора, имеется изгибающий момент. Разрезая раму попержнему по оси симметрии — в узле С (фиг. 12. 17, б), мы должны для получе-

ния состояния, эквивалентного действительному, приложить рас-
пор X_1 и изгибающий момент X_2 .

Поперечная сила в этом сечении вследствие симметрии равна нулю, и таким образом данная замкнутая рама (система, содержащая три лишних связи — см. § 1) является в данном случае симметричной нагрузки только дважды статически неопределимой¹.

Неизвестные X_1 и X_2 найдем из системы канонических уравнений (8). Для вычисления коэффициентов δ_{11} , δ_{12} , δ_{22} и свободных членов Δ_{1P} и Δ_{2P} уравнений построим эпюры M_P , \bar{M}_1 и \bar{M}_2 изгибающих моментов для основной системы от внешней нагрузки и от $X_1=1$ и $X_2=1$. Основной системой у нас является незамкнутая рама (с разрезом в узле С). Эпюры M_P и \bar{M}_1 (фиг. 12.17, в и г) совпадают с уже построенными ранее (см. эпюры M_P и \bar{M}_1 на фиг. 12.17, в и г). Эпюра \bar{M}_2 показана на фиг. 12.17, д.

Из предыдущего решения имеем $\delta_{11} = \frac{5}{3} \frac{ah^2}{EJ}$ и $\Delta_{1P} = -\frac{qa^3h}{12EJ}$. Чтобы вычислить δ_{12} , „перемножим“ по Верещагину эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 . Беря площади Ω из эпюры \bar{M}_1 , а ординаты t из эпюры \bar{M}_2 , получим

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \left[\left(\frac{1}{2} ah1 \right) 2 + ah1 \right] \frac{1}{EJ} = \frac{2ah}{EJ}.$$

Далее, пользуясь эпюрой M_2 , вычисляем $\delta_{22} = a1 \cdot 1 \cdot 3 \frac{1}{EJ} = \frac{3a}{EJ}$ и при помощи эпюр \bar{M}_2 и M_P находим $\Delta_{2P} = -\frac{qa^3}{12} 1 \frac{1}{EJ} = -\frac{qa^3}{12EJ}$.

Подставляя полученные значения δ_{11} , δ_{22} , $\delta_{12} = \delta_{21}$, Δ_{1P} и Δ_{2P} в систему канонических уравнений (8), получим такие два уравнения:

$$X_1 \frac{5}{3} \frac{ah^2}{EJ} + X_2 \frac{2ah}{EJ} - \frac{qa^3h}{12EJ} = 0;$$

$$X_1 \frac{2ah}{EJ} + X_2 \frac{3a}{EJ} - \frac{qa^3}{12EJ} = 0$$

или после сокращения

$$20hX_1 + 24X_2 - qa^2 = 0; \quad 24hX_1 + 30X_2 - qa^2 = 0.$$

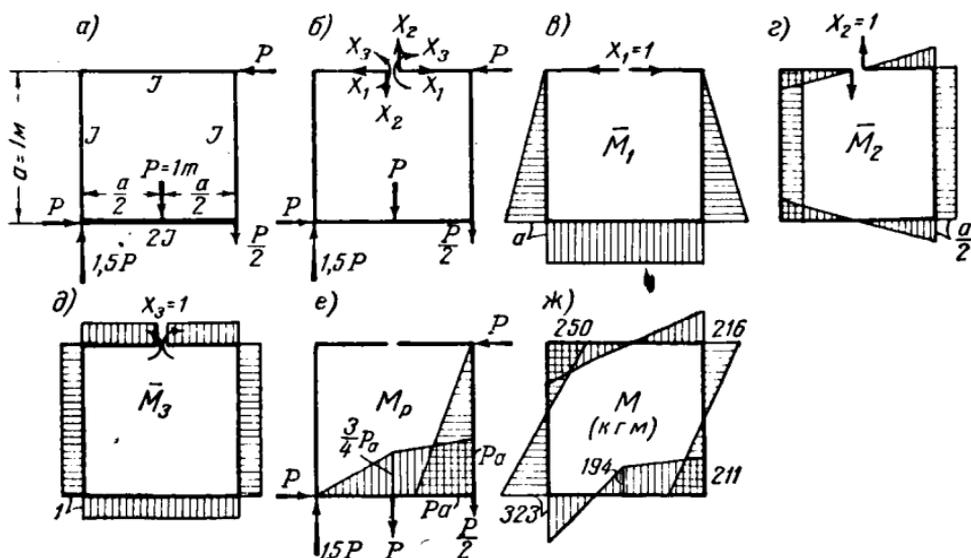
¹ Пример расчета замкнутой рамы при несимметричной нагрузке дается на следующей странице.

Решая эту систему уравнений относительно X_1 и X_2 , найдем

$$X_1 = \frac{qa^2}{12h} \quad \text{и} \quad X_2 = \frac{qa^2}{36}.$$

Эпюру моментов получим на основании формулы (9). Предварительно построим эпюры $\bar{M}_1 X_1$ и $\bar{M}_2 X_2$ (см. фиг. 12.17, е и ж), пользуясь найденными значениями X_1 и X_2 . Необходимо учесть при этом, что X_2 имеет отрицательный знак. Затем сложим эти эпюры с эпюрой M_p . Чтобы выполнить это сложение графически наиболее просто, следует сперва отложить наиболее простую эпюру, например, $\bar{M}_2 X_2$, далее пристроить к ней (с учетом знаков) эпюру $\bar{M}_1 X_1$ (прямолинейную) и, наконец, добавить в последнюю очередь криволинейную эпюру M_p . Полученная суммарная эпюра M , которую и требовалось построить, показана на фиг. 12.17, з.

Пример 2. Рассмотрим более сложный пример. Пусть требуется построить эпюру изгибающих моментов для замкнутой квад-



Фиг. 12.18. Замкнутая рама.

a и *б* — данная рама симметрична; основную систему выбираем также симметричной; *в*, *г*, *д* и *е* — «единичные» и «грузовое» состояния основной системы и соответствующие эпюры изгибающих моментов; *ж* — окончательная эпюра моментов.

ратной рамы при несимметричной нагрузке (фиг. 12.18, а). Нагрузка, действующая на раму в виде пяти сосредоточенных сил, уравнивается сама. Поэтому опоры рамы не показаны или они вообще отсутствуют. Длина каждой стороны рамы равна $a=1$ м. Момент инерции сечения нижнего горизонтального стержня рамы вдвое превышает моменты инерции сечений остальных стержней рамы.

Система трижды статически неопределима. Решение сокращенно показано на фиг. 12. 18. Разрезая раму, например, так, как изображено на фиг. 12. 18, б, получим статически определимую основную систему. Прилагая в разрезе неизвестные — продольную силу X_1 , поперечную силу X_2 и изгибающий момент X_3 , будем иметь систему, эквивалентную заданной. Неизвестные X_1 , X_2 и X_3 определяются из системы канонических уравнений 10. На фиг. 12. 18, в, г, д и е изображены соответственно эпюры изгибающих моментов от единичных нагрузок $X_1=1$, $X_2=1$, $X_3=1$ и от заданной внешней нагрузки для основной системы, при помощи которых могут быть найдены по правилу Верещагина коэффициенты и свободные члены канонических уравнений 10.

Решая систему канонических уравнений, получим: $X_1 = 0,573P$, $X_2 = 0,466P$, $X_3 = -0,017Pa$. Зная X_1 , X_2 и X_3 , можем построить искомую эпюру изгибающих моментов, складывая, как всегда, эпюру M_P от заданной внешней нагрузки с „единичными“ эпюрами \bar{M}_1 , \bar{M}_2 , ... умноженными предварительно на полученные значения X_1 , X_2 , ..., т. е. в данном случае:

$$M = M_P + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3.$$

На фиг. 12. 18, ж показана окончательная полученная таким образом эпюра M . Значения M на эпюре даны в кгм.

Задача. Определить реакции X_1 и X_2 опоры B рамы, показанной на фиг. 12. 19, и проверить прочность балки AC , выполненной из стандартного стального двутавра № 10. Момент инерции сечения стойки в три раза меньше момента инерции сечения балки. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$.

Ответ: реакции опор $X_1 = 700 \text{ кг}$, $X_2 = 50 \text{ кг}$; максимальный изгибающий момент в балке (у заделки) равен 700 кгм ; напряжение $\sigma = \frac{70000}{49} = 1430 \text{ кг/см}^2$ пренебрежимо мало превышает допускаемое, прочность обеспечена.

§ 8. Пространственное нагружение плоской рамы

В предыдущих параграфах настоящей главы мы рассматривали плоские рамы, нагруженные и, следовательно, деформирующиеся только в своей плоскости. Обратимся к случаю, когда направление действия нагрузки не лежит в плоскости оси рамы.

На фиг. 12. 20 показана плоская рама, нагруженная силой R . Составляющие S и T этой силы лежат в плоскости рамы, расчет рамы на такие силы, лежащие в плоскости рамы, и рассматривался выше. Третья составляющая силы R , обозначенная буквой P ,

перпендикулярна к плоскости рамы. В настоящем параграфе рассмотрим расчет плоской рамы на нагрузку, перпендикулярную к плоскости рамы. По отношению к этой плоскости такая нагрузка является обратно симметричной; следовательно, она не вызывает изгиба стержней рамы в плоскости рамы, а вызывает изгиб их только в направлении, перпендикулярном к плоскости рамы; кроме того, может вызывать закручивание стержней рамы.

Наличие крутящих моментов должно быть учтено при вычислении коэффициентов и свободных членов уравнений перемещений. Пренебрегая попрежнему влиянием поперечных сил, вместо формулы (10) главы XI для вычисления перемещений в данном случае будем иметь такую формулу:

$$\delta = \sum \frac{M\bar{M}\Delta x}{EJ} + \sum \frac{M_k\bar{M}_k\Delta x}{GJ_k}. \quad (11)$$

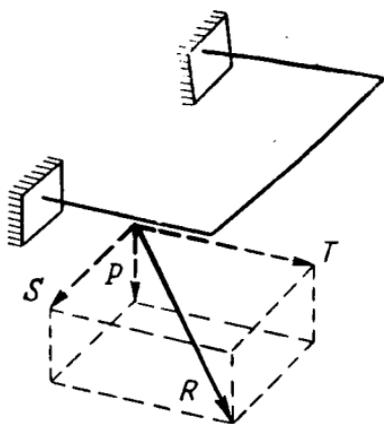
Эта формула отличается от формулы (10) главы XI вторым слагаемым, содержащим крутящие моменты M_k и \bar{M}_k , которое мы даем здесь без доказательства по аналогии с первым слагаемым. Знаменатель GJ_k во втором слагаемом представляет собой известную нам из главы VI жесткость стержня при кручении. M_k и \bar{M}_k — соответственно крутящие моменты, вызываемые приложенной нагрузкой и единичной силой.

Первое слагаемое в формуле (11) учитывает попрежнему изгибающие моменты, которые в данном случае направлены перпендикулярно к плоскости рамы (соответственно произведение EJ есть жесткость стержня рамы при изгибе его в направлении, перпендикулярном к плоскости рамы).

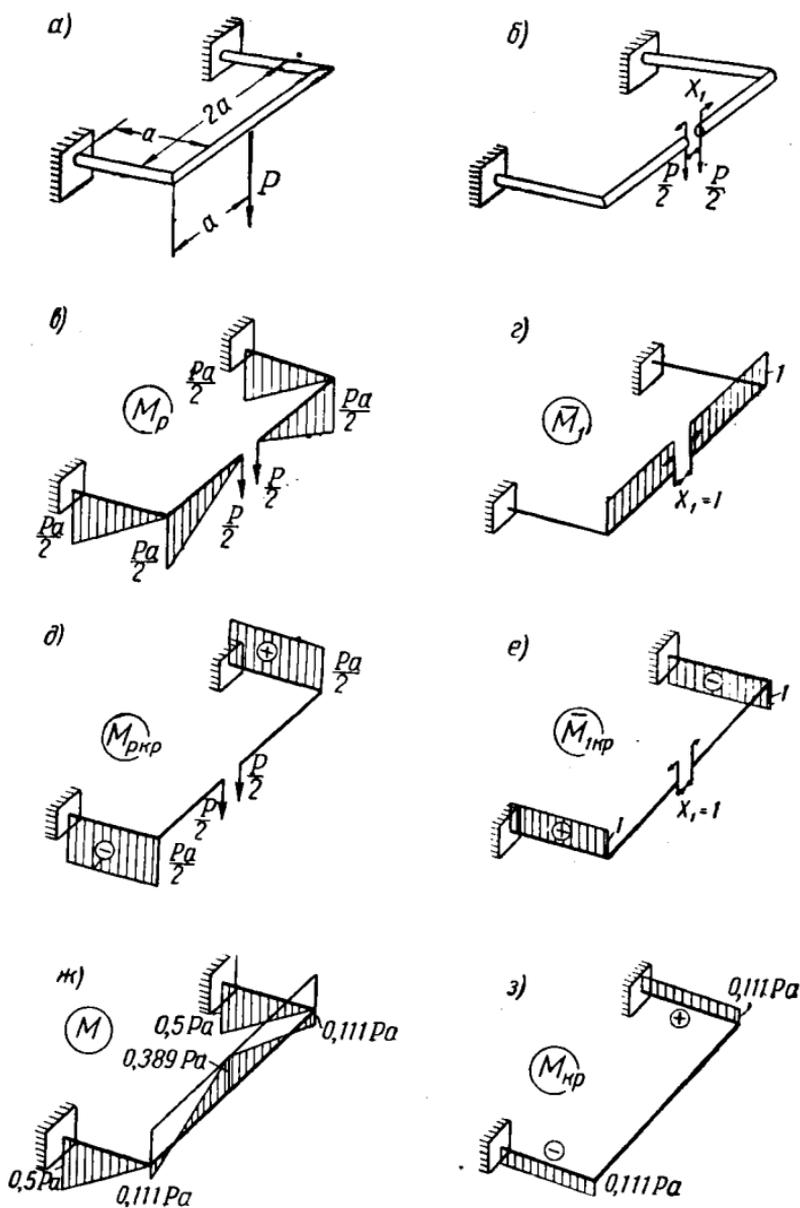
Второе слагаемое формулы (11) может быть вычислено по правилу Верещагина так же, как и первое.

Порядок расчета рамы на пространственную нагрузку поясним на примере. Пусть дана горизонтальная рама постоянного круглого сечения, заделанная двумя концами (фиг. 12.21,а) и нагруженная вертикальной силой P в плоскости симметрии рамы. Требуется построить эпюры изгибающих и крутящих моментов рамы. Отношение модулей $\frac{G}{E} = 0,4$.

Разрежем раму по середине, как показано на фиг. 12.21,б. Получим статически определимую основную систему. Теперь приложим в разрезе моменты X_1 , заменяющие внутренние усилия в данном сечении, имевшиеся там до разрезания. Моменты X_1



Фиг. 12.20. Составляющая P нагрузки, перпендикулярная к плоскости рамы, не вызывает деформации рамы в ее плоскости.



Фиг. 12. 21. Пример расчета плоской рамы на пространственную нагрузку.

a — заданная система. Сила P направлена перпендикулярно к плоскости рамы; б) — система, эквивалентная заданной; в) и г) — основная система — эпюры изгибающих и крутящих моментов от заданной нагрузки; д) и е) — основная система — эпюры изгибающих и крутящих моментов от единичной нагрузки; ж) и з) — окончательные эпюры изгибающих и крутящих моментов.

представляют собой изгибающий момент. Крутящий момент и поперечная сила в данном сечении вследствие симметрии отсутствуют. Продольные силы при данной нагрузке, направленной перпендикулярно к плоскости рамы, отсутствуют в каждом сечении рамы.

Таким образом изгибающий момент X_1 в среднем сечении рамы является единственной лишней неизвестной, т. е. данная рама при данной нагрузке и выбранной основной системе однажды статически неопределима и требует, следовательно, для раскрытия ее статической неопределимости решения одного уравнения перемещений $X_1\delta_{11} + \Delta_{1P} = 0$.

Здесь в соответствии с формулой (11)

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum \frac{M_P \bar{M}_1 \Delta x}{EJ} + \sum \frac{M_{P\kappa} \bar{M}_{1\kappa} \Delta x}{GJ_P}, \\ \delta_{11} &= \sum \frac{\bar{M}_1^2 \Delta x}{EJ} + \sum \frac{\bar{M}_{1\kappa}^2 \Delta x}{GJ_P}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Эпюры M_P , \bar{M}_1 , $M_{P\kappa}$ и $\bar{M}_{1\kappa}$ показаны на фиг. 12. 21, в—е. Эпюры изгибающих моментов M_P и \bar{M}_1 отложены, как всегда, на стороне сжатых волокон. Эпюры крутящих моментов $M_{P\kappa}$ и $\bar{M}_{1\kappa}$ расположены произвольно, но на эпюрах проставлены знаки моментов в соответствии с правилом знаков, принятым в главе VI.

Вычисление значений Δ_{1P} и δ_{11} произведем по Верещагину. Для вычисления Δ_{1P} придется, как видно из первой формулы (12), «перемножить» эпюру M_P с эпюрой \bar{M}_1 и эпюру $M_{P\kappa}$ с эпюрой $\bar{M}_{1\kappa}$. Получим

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{2} a \frac{Pa}{2} \cdot 1 \frac{1}{EJ} \cdot 2 - a \frac{Pa}{2} \cdot 1 \frac{1}{GJ_P} \cdot 2 = -\frac{Pa^2}{2EJ} - \frac{Pa^2}{GJ_P}.$$

Для вычисления δ_{11} нужно „умножить“ эпюру \bar{M}_1 саму на себя и с эпюрой $\bar{M}_{1\kappa}$ поступить так же. Найдем

$$\delta_{11} = 2a \cdot 1 \cdot 1 \frac{1}{EJ} + a \cdot 1 \cdot 1 \frac{1}{GJ_P} \cdot 2 = \frac{2a}{EJ} + \frac{2a}{GJ_P}.$$

Учитывая, что $J_P = 2J$ (см. гл. IX, § 4), а $G = 0,4E$ и, следовательно, $GJ_P = 0,8EJ$, окончательно значения Δ_{1P} и δ_{11} будем иметь в таком виде:

$$\Delta_{1P} = -1,75 \frac{Pa^2}{EJ} \quad \text{и} \quad \delta_{11} = 4,5 \frac{a}{EJ}.$$

Из уравнения перемещений получим X_1 :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = 0,389Pa.$$

Теперь можем построить искомые эпюры M и M_k . Эпюру изгибающих моментов M построим, как всегда, суммируя эпюры M_p и $\overline{M}_1 X_1$:

$$M = M_p + \overline{M}_1 X_1.$$

Эпюра M показана на фиг. 12.14, *ж*.

Эпюру крутящих моментов M_k аналогично найдем, как сумму M_{p_k} и $\overline{M}_{1_k} X_1$:

$$M_k = M_{p_k} + \overline{M}_{1_k} X_1.$$

Эпюра M_k изображена на фиг. 12.21, *з*.

Проверка прочности бруса, испытывающего одновременно изгиб и кручение, рассматривается далее, в главе XIII, где даны примеры расчета коленчатого вала, стойки шасси и др.

§ 9. Статически неопределимые фермы

Если количество стержней в ферме превышает необходимое, то ферма является статически неопределимой. Необходимое количество стержней в ферме нами было установлено в главе II, где мы получили формулы [см. формулы (1) и (2) в § 2], выражающие количество необходимых стержней в зависимости от числа узлов для свободной и прикрепленной плоской фермы.

Так, для прикрепленной фермы мы получили зависимость $s = 2n$, где s — количество стержней, а n — количество узлов. Для каждого узла плоской фермы можно составить, как мы знаем, два уравнения статики, следовательно, всего для прикрепленной плоской фермы можно составить $2n$ уравнений равновесия, из которых определяются все $s = 2n$ усилий в стержнях фермы. Если же прикрепленная ферма содержит больше чем $2n$ стержней, то уравнений статики нехватает для определения усилий в стержнях — ферма является статически неопределимой.

Степень статической неопределимости равна количеству лишних стержней. Так, прикрепленная ферма, содержащая $2n + 1$ стержней, однажды статически неопределима.

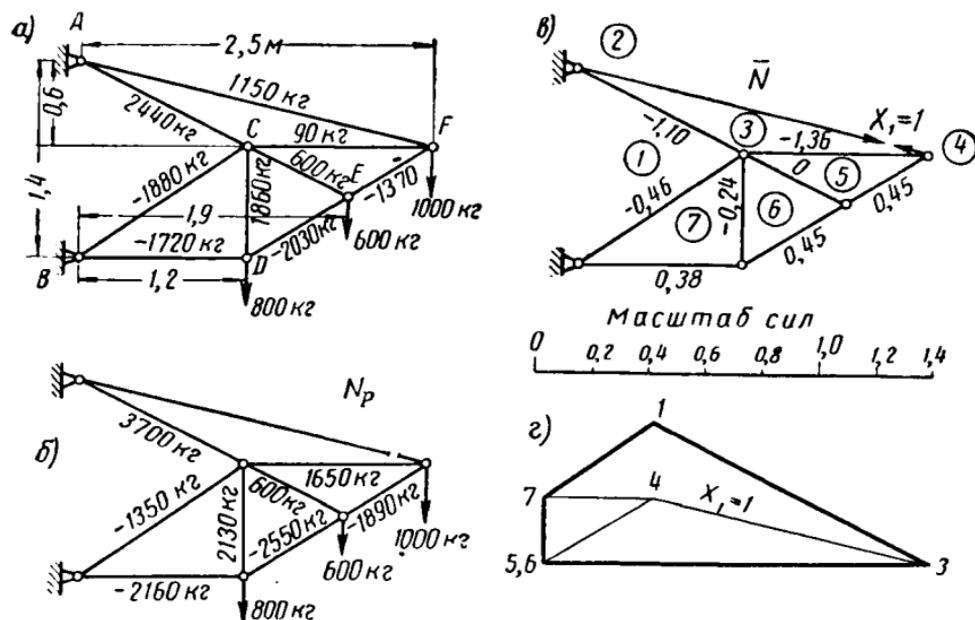
Свободная плоская ферма, содержащая $2n - 2$ стержней, также однажды статически неопределима, так как необходимое количество стержней свободной фермы равно $2n - 3$.

Изложенный в настоящей главе метод расчета статически неопределимых балок и рам применим и к расчету статически неопределимых ферм, с той разницей, что коэффициенты и свободные члены уравнений перемещений должны вычисляться по формуле для ферм — см. формулу (21) в § 7 главы XI. В случае если все стержни фермы сделаны из одного и того же материала, вычисление ведется по формуле (22).

Покажем пример расчета однажды статически неопределимой фермы.

Пример. Требуется определить усилия в стержнях фермы, изображенной на фиг. 12. 22, а. Длины l стержней могут быть измерены на чертеже, значения их приведены во второй колонке табл. 11. Площади F поперечных сечений стержней даны в третьей колонке таблицы. Материал всех стержней один и тот же.

Предложенная ферма однажды статически неопределима. В самом деле, количество необходимых стержней равно $s=2n=2 \cdot 4=8$. Данная же ферма содержит девять стержней.



Фиг. 12. 22. Пример расчета статически неопределимой фермы.

a — ферма содержит один лишний стержень. Разрезаем один из стержней — получаем основную систему (см. фиг. б и в); *б* — усилия N_p в стержнях основной системы от заданной нагрузки; *в* — усилия N в стержнях основной системы от единичной силы (диаграмма усилий N дана на фиг. з).

В качестве лишней неизвестной X_1 примем усилие в каком-либо из стержней, например, в стержне AF . Разрежем этот стержень, приложим в разрезе силы X_1 и выразим условие отсутствия взаимного смещения сечений в разрезе, как всегда, в виде уравнения перемещений

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0,$$

где

$$\delta_{11} = \frac{1}{E} \sum_s \frac{\bar{N}^2 l}{F} \quad \text{и} \quad \Delta_{1P} = \frac{1}{E} \sum_s \frac{\bar{N} N_P l}{F}.$$

Здесь N_p — усилия в стержнях основной системы, вызываемые действием нагрузки;

\bar{N} — усилия, вызываемые силой $X_1 = 1$.

Разрезая стержень AF (см. фиг. 12.22,б), получим статически определимую ферму. Примем ее как основную систему. Выше, в главе II (§ 7), в задаче было предложено определить усилия в стержнях такой фермы при той же нагрузке. Если эти усилия определить, например, путем построения диаграммы усилий, то получим значения усилий, приведенные в четвертой колонке табл. 11 — усилия N_p . Разрезанный стержень AF при этом, конечно, не работает.

Теперь рассмотрим действие единичной силы $X_1 = 1$. Приложив в разрезе силы, равные единице (фиг. 12.22,в), определим вызываемые ими усилия в стержнях основной системы. Начиная с правого конца фермы, без затруднений построим диаграмму усилий для всей системы, она показана на фиг. 12.22,г, где приведен и масштаб сил. Жирными линиями в диаграмме показаны усилия сжатия, тонкими — усилия растяжения. Значения полученных усилий \bar{N} , измеренные на диаграмме, приведены в пятом столбце таблицы.

Теперь вычисляем значения $\frac{N_p \bar{N} l}{F}$ и $\frac{\bar{N}^2 l}{F}$ для каждого стержня и их суммы — см. шестую и седьмую колонки табл. 11.

Будем иметь

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E} \sum_s \frac{\bar{N} N_p l}{F} = \frac{1}{E} (-455\,100);$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{E} \sum \frac{\bar{N}^2 l}{F} = \frac{1}{E} 396,8.$$

Искомое усилие

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-455\,100}{396,8} = 1150 \text{ кг.}$$

Мы нашли усилие в стержне AF . Усилия во всех остальных стержнях заданной фермы могут быть найдены как суммы усилий N_p (фиг. 12.22,б) и усилий \bar{N} (фиг. 12.22,в), умноженных на X_1 (так как усилия \bar{N} определялись при $X_1 = 1$):

$$N = N_p + \bar{N} X_1.$$

Эта формула аналогична формуле (6) (§ 4), применявшейся для вычисления изгибающего момента в статически неопределимых балках и рамах.

В последних двух столбцах табл. 11 проведено вычисление окончательных усилий N в стержнях фермы.

Таблица 11

Наименование стержня	Длина стержня l см	Площадь сечения стержня F см ²	Усилия в основной системе		$\frac{\bar{N}N_{Pl}}{F}$ кг/см	$\frac{\bar{N}^2 l}{F}$ $\frac{1}{см}$	$X_1 \bar{N}$ кг	Окончательное усилие $N = N_P + X_1 \bar{N}$
			от заданной нагрузки N_P , кг	от силы единицы \bar{N}				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
AC	134	3,08	3700	-1,10	-177 000	52,6	-1260	2440
BC	143	1,69	-1350	-0,46	52 500	17,9	-530	-1880
CF	130	1,35	1650	-1,36	-216 000	178,0	-1560	90
CD	80	1,77	2130	-0,24	-23 100	2,6	-270	1860
CE	80	0,50	600	0	0	0	0	600
BD	120	2,70	-2160	0,38	-36 500	6,4	440	-1720
DE	83	3,19	-2550	0,45	-29 800	5,3	520	-2030
EF	70	2,36	-1890	0,45	-25 200	6,0	520	-1370
AF	256	2,00	0	1	0	128,0	1150	1150
					-455 100	396,8		

Полученные значения усилий N выписаны на фиг. 12.22,а.
Задача. Решить эту же задачу, разрезая не стержень AF а какой-нибудь другой, например, BC .

Контрольные вопросы

1. Какие конструкции называются статически неопределимыми?
2. Зависит ли степень статической неопределимости конструкции от характера распределения нагрузки?
3. Перечислите особенности статически неопределимых систем.
4. Что называется основной системой?
5. В чем смысл уравнения перемещений (какое условие деформации системы оно выражает)?
6. Как вычисляются коэффициенты и свободные члены уравнений перемещений?
7. Как понимается знак плюс (или минус) у значений неизвестных, определяемых из уравнений перемещений?
8. Как строится окончательная эпюра изгибающих моментов балки или рамы после определения лишних неизвестных?
9. Изложите порядок расчета статически неопределимой фермы.

Глава XIII

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

§ 1. Общие положения

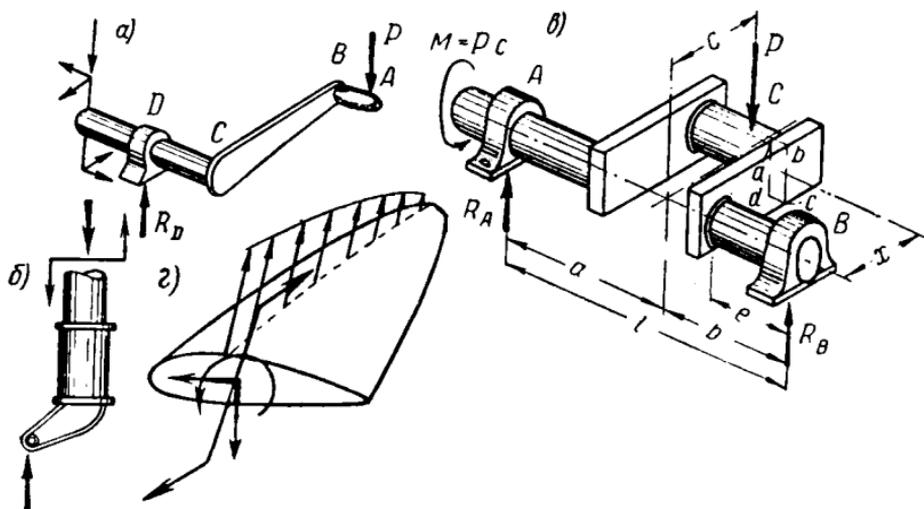
В предыдущих главах мы исследовали различные виды деформации стержня: 1) растяжение или сжатие прямого стержня силами, действующими по оси стержня, 2) сдвиг силами, перпендикулярными к оси стержня, 3) кручение парами, лежащими в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня, и 4) изгиб парами или силами, лежащими в главной плоскости стержня, т. е. в плоскости, проходящей через главные центральные оси инерции сечений стержня (у призматического стержня таких плоскостей, как известно, две). Перечисленные случаи деформации стержня будем называть простыми случаями деформации и соответствующие нагрузки — простыми нагрузками. Всякое совместное действие двух или нескольких простых нагрузок будем называть случаем сложной деформации или, как говорят, сложного сопротивления стержня.

Сложное сопротивление часто имеет место в практике, чаще, чем простые случаи деформации. Так, стержни, из которых составлены фермы фюзеляжа или крыла, работающие на растяжение или сжатие, всегда в какой-то мере изгибаются вследствие жесткого их присоединения к узлам. Валы, работающие на кручение, также терпят изгиб, вызываемый неизбежными поперечными нагрузками — собственным весом, весом шкивов, силами натяжения ремней, силами инерции и т. п. Крыло и фюзеляж самолета работают на изгиб и кручение.

На фиг. 13. 1,а показана рукоять и часть оси ворота. Очевидно, рукоять *BC* и вал работают на изгиб и кручение. Костыль, нагруженный внеосевой силой (фиг. 13. 1,б), будет работать не только на сжатие, но и на изгиб. На фиг. 13. 1,в изображен коленчатый вал. Стрелками показаны силы, действующие на вал в некоторый момент его работы. Как видим, шейка и щеки вала, а также сам вал одновременно изгибаются и скручиваются и также работают на сдвиг. На фиг. 13. 1,г представлена консольная часть крыла самолета. Крыло в полете претерпевает одновременно изгиб в двух направлениях (от дей-

ствия лобового сопротивления воздуха и подъемной силы) и кручение, так как равнодействующая внешних сил, действующих на отсеченную часть крыла, как правило, не проходит через центр изгиба сечения. Таким образом два последних случая более сложны, чем два предыдущие, ибо представляют собой совместное действие не двух, а трех простых нагрузок.

Примеров сложного сопротивления можно было бы привести очень много. Расчет на сложное сопротивление основан на принципе независимости действия сил, называемом иначе принципом сложения или наложения и уже неоднократно применяв-



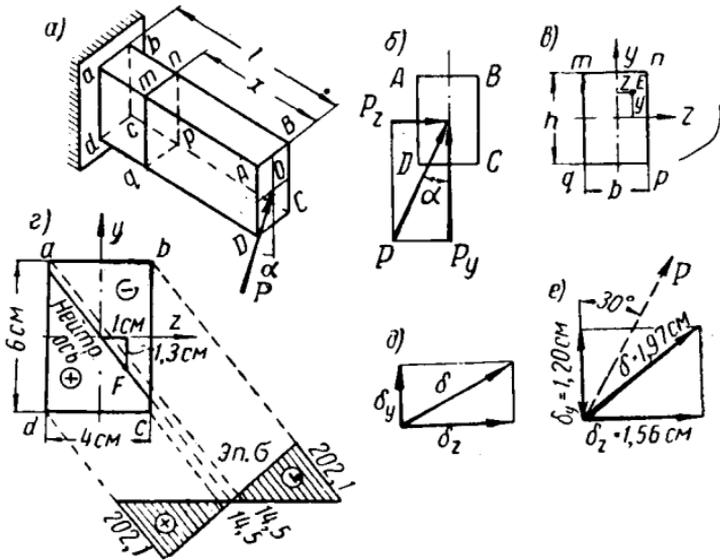
Фиг. 13.1. Примеры сложного сопротивления.

a — вал ворота работает одновременно на изгиб и кручение; *б* — стойка костыля испытывает совместное действие осевого сжатия и изгиба; *в* — коленчатый вал работает на изгиб и кручение; *г* — крыло самолета воспринимает изгибающие нагрузки и крутящий момент.

шемся нами: если на некоторую упругую систему (балку, вал) действует несколько внешних нагрузок, сил или пар, и нас интересует эффект действия этих сил, выражающийся в деформации системы и сопровождающих ее напряжениях в материале, то полное перемещение какой-нибудь точки системы равно сумме перемещений ее, вызываемых каждой из внешних сил или пар в отдельности, и полное напряжение в какой-нибудь точке системы равно сумме напряжений, вызываемых каждой из сил в отдельности. Суммарный эффект (перемещение или напряжение), вызываемый данной группой сил, не зависит от порядка приложения этих сил к системе. Так, например, прикладывая одновременно несколько сил к балке, мы деформируем ее точно так же, как если бы мы приложили эти силы последовательно одна за другой в произвольном порядке. Отметим еще раз, что принцип сложения справедлив лишь в пределах малых упругих деформаций.

§ 2. Косой изгиб

В качестве первого случая сложного сопротивления рассмотрим так называемый косой изгиб. В предыдущих главах нами рассматривался, как уже отмечено, изгиб бруса в его главной плоскости. Такой изгиб именуется обычно прямым. Здесь рассмотрим изгиб прямого бруса силами, не лежащими ни в одной из двух главных плоскостей бруса.



Фиг. 13. 2. Косой изгиб.

a — сила P не лежит ни в одной из главных плоскостей балки: консоль испытывает косой изгиб; *b* — каждая из составляющих P_y и P_z силы P вызывает в отдельности прямой изгиб; *в* — напряжение в некоторой точке E сечения зависит от ее координат y и z ; *г* — эпюра нормальных напряжений; нормальное напряжение σ пропорционально расстоянию от нейтральной оси; *д* — полный прогиб δ складывается из прогибов δ_y и δ_z в главных плоскостях балки; *е* — направление прогиба δ при косом изгибе не совпадает с направлением действия силы P .

На фиг. 13. 2, *a* изображена консоль прямоугольного сечения, нагруженная сосредоточенной силой P , направленной перпендикулярно к оси консоли под углом α к вертикали. На фиг. 13. 2, *б* показан торец балки $ABCD$, в плоскости которого лежит сила P . Проведем оси симметрии площади $ABCD$, являющиеся ее главными осями. Если провести мысленно через эти оси продольные плоскости вдоль всей балки, то это и будут главные плоскости балки. Разложим силу P на составляющие P_z и P_y , как показано на фигуре. Очевидно, $P_z = P \sin \alpha$ и $P_y =$

$=P \cos \alpha$. Будем рассматривать действие каждой из составляющих отдельно. Если бы сила P_z отсутствовала, то мы имели бы обычный прямой изгиб в вертикальной плоскости силой P_y , которая совпадает с одной главной плоскостью балки. И, наоборот, при отсутствии силы P_y одна сила P_z вызывала бы также прямой изгиб в другой главной плоскости.

Определение напряжений. Исследуем сперва вопрос о напряжениях. Пусть требуется определить нормальное напряжение в некотором произвольно взятом поперечном сечении нашей консоли (например, в сечении $mnpq$ — фиг. 13.2,а) в некоторой произвольно взятой точке E с координатами z и y (см. фиг. 13.2,б).

Нормальное напряжение в поперечном сечении балки при прямом изгибе определяется, как мы знаем, по формуле (гл. IX)

$$\sigma = \frac{M}{J} y, \quad (1)$$

где M — изгибающий момент в данном сечении балки, J — момент инерции сечения относительно нейтральной оси и y — расстояние от нейтральной оси до той точки в сечении, где требуется определить напряжение σ .

В данном случае в сечении балки действуют, как мы уже отметили выше, два изгибающих момента: момент, изгибающий в вертикальной плоскости, и момент, изгибающий в горизонтальной плоскости. Первый вызывается силой P_y относительно оси z сечения $mnpq$ — обозначим этот момент через M_z ; второй, вызываемый силой P_z относительно оси y сечения, — обозначим через M_y . Очевидно, что $M_z = P_y \cdot x$ и $M_y = P_z \cdot x$, где x — расстояние до рассматриваемого сечения (см. фиг. 13.2,а). Обозначим напряжение в выбранной точке E от первого момента через σ' , а от второго через σ'' . Полное напряжение σ , очевидно, равно сумме $\sigma' + \sigma''$.

Каждое из напряжений σ' и σ'' определим по формуле (1), так как каждый из моментов M_z и M_y вызывает обычный прямой изгиб. Получим

$$\sigma' = -\frac{M_z}{J_z} y \quad \text{и} \quad \sigma'' = -\frac{M_y}{J_y} z.$$

Здесь $J_z = \frac{bh^3}{12}$ — момент инерции сечения (см. фиг. 13.2, в)

относительно оси z , которая является нейтральной осью при изгибе балки моментом M_z ; $J_y = \frac{hb^3}{12}$ — момент инерции сечения

относительно оси y , которая является нейтральной осью при изгибе балки моментом M_y . Знаки минус поставлены потому, что при данных направлениях сил P_y и P_z напряже-

ние в выбранной точке E — сжимающее. Следовательно, полное напряжение

$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z}y - \frac{M_y}{J_y}z. \quad (2)$$

Правило знаков для изгибающих моментов в соответствии с направлением нагрузки, принятым при выводе, сформулируем так: изгибающий момент M_z положителен (как всегда), когда он изгибает балку выпуклостью вниз, т. е. против направления оси y ; момент M_y , действующий в горизонтальной плоскости, положителен, когда изгибаемая им балка выпуклостью обращена налево, т. е. против направления оси z . Если какой-либо из моментов M_z и M_y имеет обратное направление, то его следует подставлять в формулу (2) со знаком минус.

Все изложенные рассуждения можно было бы повторить для балки произвольного сечения. Таким образом полученная формула справедлива не только для прямоугольного сечения, а и для произвольного сечения, но следует помнить, что J_z и J_y в формуле (2) — главные центральные моменты инерции сечения.

Опасные сечения и опасные точки. Точка в поперечном сечении балки, где имеет место наибольшее напряжение, называется опасной точкой, а сечение — опасным сечением. В рассмотренном выше примере опасное сечение — сечение у заделки ($abcd$), опасная точка, — b или d (в зависимости от того, каким усилиям — растяжения или сжатия — хуже сопротивляется данный материал). Не всегда можно сразу определить опасное сечение и опасную точку: из формулы (2) видно, что напряжение зависит от многих факторов — изгибающих моментов M_y и M_z и размеров сечения. Приходится рассматривать и сравнивать несколько сечений, представляющихся опасными.

Пример 1. Возьмем числовой пример. Пусть сила P (фиг. 13.2) равна 30 кг, угол α равен 30° . Длина консоли $l=1$ м. Размеры поперечного сечения: $b=4$ см, $h=6$ см. Требуется определить наибольшее нормальное напряжение.

Вспользуемся формулой (2). Предварительно вычислим моменты инерции $J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ см}^4$ и $J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ см}^4$ и составляющие силы P , параллельные осям y и z : $P_y = P \cos \alpha = 30 \cdot \cos 30^\circ = 30 \cdot 0,867 = 26 \text{ кг}$ и $P_z = P \sin \alpha = 30 \sin 30^\circ = 30 \cdot 0,5 = 15 \text{ кг}$. Опасным сечением в данном примере является, как уже упомянуто, сечение $abcd$ у заделки, так как здесь изгибающие моменты M_z и M_y имеют наибольшие значения: $M_z = P_y l = 26 \cdot 100 = 2600 \text{ кгсм}$ и $M_y = P_z l = 15 \cdot 100 = 1500 \text{ кгсм}$. По формуле (2) получим

$$\sigma = -\frac{2600}{72}y - \frac{1500}{32}z = -36,1y - 46,9z.$$

Подставляя сюда координаты y и z любой точки в сечении, можем вычислить напряжение в любой точке. Опасными точками в нашем случае являются точки b и d , где обе координаты y и z имеют наибольшие значения (см. фиг. 13.2, в).

Координаты точки b : $y = \frac{h}{2} = 3$ см и $z = \frac{b}{2} = 2$ см. Следовательно, напряжение в этой точке $\sigma_b = -36,1 \cdot 3 - 46,9 \cdot 2 = -108,3 - 93,8 = -202,1$ кг/см². В точке d найдем $\sigma_d = 202,1$ кг/см². Полученные знаки напряжений в точках b и d соответствуют заданному направлению силы P (см. фигуру 13.2, а)—вверху имеем сжатую зону, внизу—растянутую.

Определим для сравнения напряжения в точках a и c . Координаты точки a : $y = 3$ см, $z = -2$ см. Поэтому $\sigma_a = -36,1 \cdot 3 - 46,9 \cdot (-2) = -108,3 + 93,8 = -14,5$ кг/см².

В точке c получим $\sigma_c = 14,5$ кг/см². На фиг. 13.2, г показана эпюра напряжений σ в сечении $abcd$, построенная в боковой проекции.

Определение перемещений. Пусть требуется также определить максимальный прогиб δ данной консоли (т. е. поступательное перемещение сечения $ABCD$).

Прогиб консоли, нагруженной сосредоточенной силой на конце, при прямом изгибе (см. задачу 1 в § 4 гл. XI) $y_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI}$. Пользуясь этой формулой, можем найти отдельно прогиб δ_y в вертикальной плоскости (от силы P_y) и прогиб δ_z в горизонтальной плоскости (от силы P_z):

$$\delta_y = \frac{P_y l^3}{3EI} \quad \text{и} \quad \delta_z = \frac{P_z l^3}{3EI}.$$

Складывая полученные прогибы геометрически (по правилу сложения двух движений), см. фиг. 13.2, д, получим полный прогиб δ на основании теоремы Пифагора (направление его видно из чертежа):

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2}. \quad (3)$$

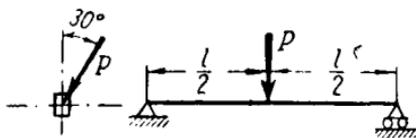
Подставляя числовые данные и принимая модуль упругости E равным $100\,000$ кг/см² (сосна), найдем

$$\delta_y = \frac{26 \cdot 100^3}{3 \cdot 100\,000 \cdot 72} = 1,20 \text{ см}, \quad \delta_z = \frac{15 \cdot 100^3}{3 \cdot 100\,000 \cdot 32} = 1,56 \text{ см}.$$

Прогиб в вертикальной плоскости δ_y меньше прогиба в горизонтальной плоскости δ_z , хотя вертикальная составляющая P_y нагрузки больше горизонтальной составляющей P_z . Объясняется это тем, что жесткость балки на изгиб (определяемая моментом инерции) в вертикальной плоскости значительно больше жесткости ее в горизонтальном направлении. Полученные значения δ_y и δ_z отложены на фиг. 13.2, е в масштабе. Полный прогиб

$\delta = 1,20^2 + 1,56^2 = 1,97$ см. Пунктиром показано направление действия силы P (под углом 30° к вертикали). Как видим, направление прогиба не совпадает с направлением действия изгибающей силы P . Именно этой физической стороной явления косоуго изгиба и объясняется его название.

Формула (3) справедлива для любого сечения балки. Она справедлива также для балки любой формы сечения, если оси y и z — главные центральные оси сечения.



Фиг. 13.3.

Задача. 1. Определить наибольшее напряжение и полный наибольший прогиб для балки, лежащей на двух опорах и нагруженной силой $P = 30$ кг, приложенной по середине (фиг. 13.3). Сечение балки прямоугольное: $h \times b$. Размеры: $l = 1$ м, $b = 4$ см, $h = 6$ см. Модуль $E = 10^5$ кг/см². Ответ: $\sigma_{\max} = 50,5$ кг/см², $\delta = 0,123$ см.

Случай круглого сечения. При определении напряжений в стержне круглого сечения, у которого косоуго изгиба быть не может, удобно пользоваться полным изгибающим моментом [а не его составляющими M_z и M_y , как в формуле (2)]. Рассмотрим снова случай консоли, нагруженной силой P на конце. Полный изгибающий момент M в сечении x равен Px . Но $P = \sqrt{P_y^2 + P_z^2}$ (см. фиг. 13.2, б). Следовательно, $M = x \sqrt{P_y^2 + P_z^2} = \sqrt{(P_y x)^2 + (P_z x)^2}$. Выше было обозначено $P_y x = M_z$ и $P_z x = M_y$. Таким образом полный изгибающий момент M может быть выражен по абсолютной величине формулой

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}, \quad (4)$$

где M_z и M_y — изгибающие моменты в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Пример 2. Воспользуемся формулой (4) для решения следующей задачи. Дана консоль круглого сечения $d = 2$ см, нагруженная, как показано на фиг. 13.4, двумя сосредоточенными силами, направленными перпендикулярно к оси консоли, сила 50 кг — вертикально и сила 20 кг — горизонтально. Требуется определить наибольшее напряжение.

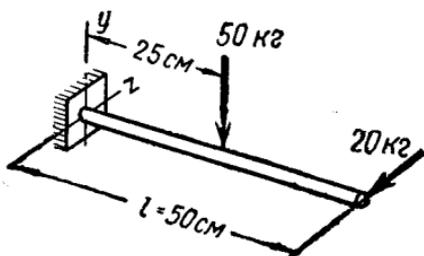
Наибольшее напряжение, очевидно, будет у заделки. Определим полный изгибающий момент в этом сечении консоли. Изгибающий момент относительно оси z сечения равен $M_z = -50 \cdot 25 = -1250$ кгсм. Относительно оси y момент $M_y = -20 \cdot 50 = -1000$ кгсм. Полный изгибающий момент по формуле (4)

$$M = \sqrt{1250^2 + 1000^2} = 1600 \text{ кгсм.}$$

Теперь можем определить напряжение в опасных точках по обычной формуле $\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$ независимо от направления M , так как в круглом сечении любая ось является главной. Момент сопротивления круглого сечения, как известно, равен $W \approx 0,1 d^3$. Получим

$$W = 0,1 \cdot 2^3 = 0,8 \text{ см}^3 \text{ и } \sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{1600}{0,8} = 2000 \text{ кг/см}^2.$$

Нейтральная ось. Нейтральной осью сечения балки мы назвали (гл. VIII) прямую, разделяющую сжатую и растянутую зоны балки (см. фиг. 13. 2, з). Нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения. В точках сечения, расположенных на нейтральной оси, нормальное напряжение равно нулю; наибольшее нормальное напряжение имеет место в точке, наиболее удаленной от нейтральной оси. При косом изгибе нейтральная ось в общем случае не совпадает ни с одной из главных осей инерции сечения. Положение ее можно определить, пользуясь формулой (2). Если мы предположим, что точка E (фиг. 13. 2, в) (координаты которой равны z и y) находится на нейтральной оси, то напряжение в ней будет равно нулю, т. е. для точки, лежащей на нейтральной оси, из уравнения (2) получаем



Фиг. 13. 4.

$0 = -\frac{M_z}{J_z} y - \frac{M_y}{J_y} z.$

Определив отсюда y , найдем

$$y = -\frac{J_z}{J_y} \frac{M_y}{M_z} z. \quad (5)$$

Мы получили уравнение прямой — искомой нейтральной оси.

Положив абсциссу z равной какому-нибудь определенному числу, вычислим по формуле (5) соответствующее ей значение ординаты y (так как J_z , J_y , M_z и M_y известны); будем иметь координаты z и y некоторой точки, лежащей на нейтральной оси. Этого достаточно, чтобы построить нейтральную ось, так как она проходит через центр тяжести сечения [последнее обстоятельство усматривается также непосредственно из уравнения (5): положив $z=0$, получим $y=0$, а точка с такими координатами есть начало координат, совпадающее у нас с центром тяжести сечения].

Пример 3. Покажем пример пользования нейтральной осью для определения опасной точки. Возьмем рассмотренную нами выше консоль (фиг. 13.2). Мы имели $J_z=72 \text{ см}^4$, $J_y=32 \text{ см}^4$, $M_z=2600 \text{ кгсм}$, $M_y=1500 \text{ кгсм}$.

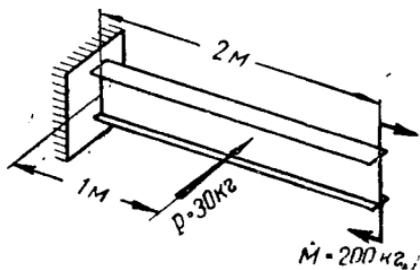
Уравнение нейтральной оси (5) в данном случае получает вид

$$y = -\frac{72}{32} \frac{1500}{2600} z$$

или $y = -1,3z$.

Пользуясь этим уравнением, найдем хотя бы одну точку, принадлежащую нейтральной оси. Задав произвольно значение z , пусть $z=1 \text{ см}$, находим из уравнения $y = -1,3 \text{ см}$. Нанесем на чертеж соответствующую точку F на фиг. 13.2,г (отрицательное значение y отложено вниз). Проведя через нее и через центр тяжести сечения прямую, получим нейтральную ось. По одну сторону от нейтральной оси располагается зона сжатия, по другую — растяжения. Наиболее удаленные точки от нейтральной оси, как видим, точки b и d ; следовательно, в этих точках будут наибольшие нормальные напряжения (значения напряжений были вычислены выше). Таким образом, зная положение нейтральной оси, мы одновременно знаем и положение опасных точек.

Задача 2. Построить нейтральную ось и определить наибольшее нормальное напряжение в консоли длиной 2 м, выполненной из стального двутавра стандартного профиля № 10 (фиг. 13.5). Моменты инерции сечения $J_z=245 \text{ см}^4$, $J_y=33 \text{ см}^4$. Консоль нагружена сосредоточенной парой $M=200 \text{ кгм}$ на конце, действующей в вертикальной плоскости, и горизонтальной силой $P=30 \text{ кг}$, приложенной на расстоянии 1 м от заделки. Определить также прогиб на конце консоли (модуль упругости принять

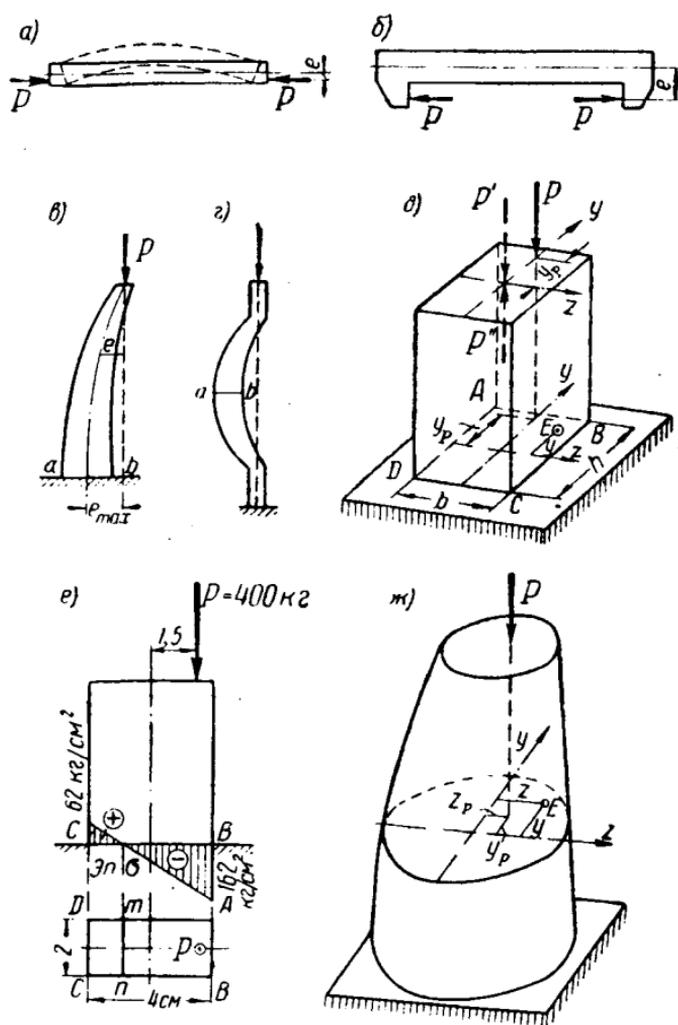


Фиг. 13.5.

$E=2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$). **Ответ:** 1) уравнение нейтральной оси: $y=1,11z$; 2) наибольшее напряжение равно 717 кг/см^2 ; 3) прогиб $\delta_{\max}=0,9 \text{ см}$.

§ 3. Внецентренное растяжение и сжатие

На фиг. 13.6,а показан пример внецентренного или внеосевого сжатия. Силы P приложены не по оси бруска, а на некотором расстоянии e от оси. Это расстояние называется эксцентриситетом нагрузки. Если бы силы P были приложены по оси бруска, то мы имели бы обычное центральное (или осевое) сжа-



Фиг. 13.6. Внецентренное сжатие и растяжение.

а — внецентренное сжатие; б — внецентренное растяжение; в и г — внецентренное сжатие криволинейных стержней. В сечении *ab* — наибольший изгибающий момент; д и е — внецентренное сжатие, дающее изгиб в одной из главных плоскостей бруса; ж — общий случай внецентренного сжатия.

тие, при котором нормальные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению бруска и брусок претерпевает только деформацию сжатия — укорачивается (если напряжение не превышает так называемого критического значения, о котором речь будет в следующей главе). В данном же случае вследствие внецентренности приложения сил P возникает изгибающий момент, равный произведению Pe , и брусок получает, кроме сжатия, также деформацию изгиба — см. пунктир.

Таким образом видим, что внецентренное сжатие представляет собой совместное действие сжатия и изгиба. При внецентренном растяжении (см. пример на фиг. 13.6,б) имеем совместное действие растяжения стержня и изгиба его.

В случае стержня непрямолинейного изгибающий момент изменяется по длине стержня, так как изменяется эксцентриситет e (см., например, фиг. 13.6,в); наибольший изгибающий момент в данном примере имеет место у заделки, где эксцентриситет e имеет наибольшее значение. У стержня, показанного на фиг. 13.6,г, наибольший изгибающий момент — в сечении ab ; в сечении у заделки в данном случае изгибающий момент равен нулю, так как эксцентриситет нагрузки здесь равен нулю, и, следовательно, в этом сечении будет равномерное сжатие. На фиг. 13.1,б также показан пример внецентренного сжатия.

О п р е д е л е н и е н а п р я ж е н и й. Пусть имеем брус прямоугольного сечения. Рассмотрим случай, когда сжимающая сила P проходит в одной из главных плоскостей стержня, пусть в плоскости y , на расстоянии y_p от другой главной плоскости z (см. фиг. 13.6,д). Следовательно, y_p представляет собой эксцентриситет силы P . В центре тяжести верхнего сечения бруса мысленно приложим дополнительно две одинаковые силы P' и P'' , равные заданной силе P (показанные пунктиром) и направленные навстречу друг другу. Такие две силы можно представить себе в любой точке бруса, они не вносят никаких изменений в состояние бруса, так как взаимно уравнивают друг друга. Следовательно, имеющаяся теперь система трех сил P , P' и P'' эквивалентна одной заданной силе P .

Из трех названных сил сила P' является центральной сжимающей силой, а силы P и P'' образуют пару, изгибающую брус в плоскости y . Момент M_z этой пары равен $P y_p$. Определим нормальное напряжение в некоторой произвольной точке E в основании нашего бруса отдельно от сжимающей силы P' и от изгибающего момента $M_z = P y_p$. Это нетрудно сделать по известным нам формулам.

Напряжение от сжимающей силы $\sigma' = -\frac{P'}{F}$, где F — пло-

щадь поперечного сечения бруса (в данном случае она равна bh — см. фиг. 13.6,д).

Напряжение от изгибающего момента (как видно из чертежа, оно также отрицательно)

$$\sigma'' = -\frac{M_z}{J_z}y = -\frac{Py_p}{J_z}y,$$

где J_z — момент инерции сечения относительно оси z , которая в данном случае является нейтральной осью при изгибе (в нашем случае $J_z = \frac{bh^3}{12}$), y — расстояние точки E от оси.

Полное напряжение на основании принципа сложения равно сумме σ' и σ'' . Учитывая, что по условию $P' = P$, напомним

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{Py_p}{J_z}y. \quad (6)$$

Наибольшее сжимающее напряжение имеем, как видно из формулы (6), при наибольшем y , т. е. в рассматриваемом примере при $y = \frac{h}{2}$ — на линии AB :

$$\sigma_{AB} = -\frac{P}{F} - \frac{Py_p}{J_z} \frac{h}{2} = -\frac{P}{F} - \frac{Py_p}{W_z}, \quad (7)$$

где W_z — известный нам из предыдущего момент (или модуль) сопротивления сечения, равный для прямоугольного сечения $\frac{bh^2}{6}$.

Напряжение на другом крае сечения— на линии CD — найдем, подставляя в формулу (6) значение $y = -\frac{h}{2}$:

$$\sigma_{CD} = -\frac{P}{F} - \frac{Py_p}{J_z} \left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{P}{F} + \frac{Py_p}{W}. \quad (8)$$

Зная напряжения на краях сечения, нетрудно построить и всю эпюру напряжений.

Формула (6) справедлива при любой форме бруса и его сечения, если сила P проходит через главную центральную ось y того сечения, где определяется напряжение σ . Если бы сила P проходила через ось z , то мы получили бы

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{Pz_p}{J_y}z,$$

где z_p — эксцентриситет силы P относительно оси y ;
 J_y — момент инерции данного сечения бруса относительно оси y (в случае прямоугольного сечения— фигура 13.6, d — $J_y = \frac{hb^3}{12}$);

z — расстояние от оси y до точки (E), где определяется напряжение.

Пример 1. Пусть требуется построить эпюру напряжений в сечении $ABCD$ (фиг. 13.6, д) при следующих данных: $P = 400$ кг, $y_p = 1,5$ см, $b = 2$ см, $h = 4$ см.

Вычислим предварительно $W_z = \frac{2 \cdot 4^2}{6} = 5,33$ см³. По формулам (7) и (8) получим $\sigma_{AB} = -\frac{400}{8} - \frac{400 \cdot 1,5}{5,33} = -50 - 112 = -162$ кг/см², $\sigma_{CD} = -50 + 112 = 62$ кг/см². На фиг. 13.6, е показан вид бруса сбоку и вид сверху на его основание $ABCD$. Там же изображена эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении бруса, построенная по полученным данным. Как видим, нейтральная (или, как ее еще называют, нулевая) линия mn не проходит через центр тяжести сечения. Это и понятно, так как, кроме изгиба, имеется равномерное сжатие. Чем меньше эксцентриситет нагрузки, следовательно, чем меньше изгибающий момент, тем дальше от центра располагается нулевая линия.

Задача 1. Построить эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении круглого бруска (фиг. 13.6, а) диаметром 2 см, внецентренно сжатого силой 1 т. Эксцентриситет приложения силы равен 0,5 см. *Ответ:* наибольшее сжимающее напряжение равно -956 кг/см², наибольшее растягивающее напряжение 318 кг/см².

Общий случай. Выше мы рассмотрели внецентренное сжатие и растяжение силами, проходящими через одну из главных осей сечения. Теперь рассмотрим общий случай. Сила P (фиг. 13.6, ж) не проходит через какую-либо из главных осей сечения y и z . Линия действия силы проходит в расстоянии y_p от оси z и в расстоянии z_p от оси y . Таким образом сила P вызывает изгиб не только относительно оси z , как было в предыдущем случае, а также и относительно оси y . Момент силы P относительно оси y равен Pz_p . Формула для определения напряжения будет содержать еще одно слагаемое дополнительно к выражению (6), зависящее от изгибающего момента Pz_p :

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{Py_p}{J_z} y - \frac{Pz_p}{J_y} z. \quad (9)$$

Здесь y и z — координаты произвольной точки (точка E на фиг. 13.6, ж) в данном поперечном сечении бруса, в которой требуется определить напряжение σ . Пользование формулой (9) показано ниже — в примере 2.

Как видим, явление внецентренного сжатия (или растяжения) в общем случае является более сложным явлением, чем косо́й изгиб, так как содержит три компонента: осевое сжатие (или растяжение) и изгиб относительно оси z и относительно оси y . Можно сказать, что внецентренное сжатие в общем случае есть осевое сжатие плюс косо́й изгиб.

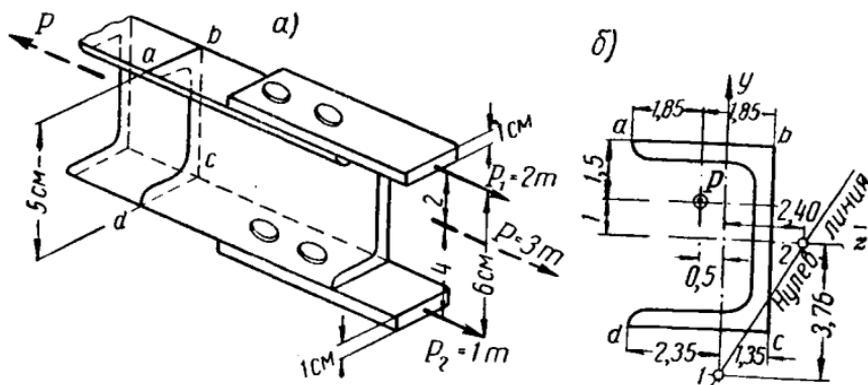
Нулевая линия. В практике нас чаще всего интересует только наибольшее напряжение. Если сразу можно видеть, в какой точке сечения имеет место наибольшее напряжение, то остается подставить координаты этой точки y и z в формулу (9) и вычислить напряжение. Если же опасная точка сразу не очевидна, то приходится вычислять напряжения в нескольких точках, либо строить нулевую (нейтральную) линию. Опасная точка в сечении определится как наиболее удаленная от нулевой линии.

Уравнение нулевой линии найдем попрежнему на том основании, что напряжения в точках, расположенных на нулевой линии, равны нулю. Если предположить, что координаты y и z , входящие в формулу (9), принадлежат точке, находящейся на нулевой линии, то σ будет равно нулю. Получим $0 = -\frac{P}{F} - \frac{P y_P}{J_z} y - \frac{P z_P}{J_y} z$. Умножив все члены этого уравнения на $\frac{F}{P}$ и перенеся второй и третий члены в левую часть, найдем уравнение нулевой линии в таком более удобном виде:

$$\frac{F y_P}{J_z} y + \frac{F z_P}{J_y} z = -1. \quad (10)$$

Пользование этим уравнением показано далее в примере 2.

Пример 2. К полкам стального швеллера № 5 прикрепаны накладки толщиной 1 см, к которым центрально приложены



Фиг. 13.7. Пример внецентренного растяжения.

a — к накладкам приложены силы P_1 и P_2 , равнодействующая P которых не проходит через центр тяжести сечения швеллера (см. фиг. б); b — нулевая линия. По одну сторону от нулевой линии расположена растянутая зона, по другую — сжатая. Наибольшее напряжение σ — в точке a сечения.

растягивающие силы (фиг. 13.7,а). К верхней накладке приложена сила $P_1=2$ т, к нижней — $P_2=1$ т. Требуется определить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напря-

жение в швеллере. Швеллер № 5 имеет следующие размеры (см. табл. 9 в гл. IX): высота профиля 5 см, ширина полки 3,7 см, расстояние от стенки до центра тяжести сечения 1,35 см (см. фиг. 13.7,б). Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей: $J_y=8,3 \text{ см}^4$, $J_z=26,0 \text{ см}^4$. Площадь сечения $F=6,93 \text{ см}^2$.

Приведем нагрузку к одной силе. Силы P_1 и P_2 в сумме дают равнодействующую $P=P_1+P_2$, проходящую, как показано на фиг. 13.7,а, между силами P_1 и P_2 , причем ближе к большей силе P_1 . Так как сила P_1 вдвое больше силы P_2 , ее расстояние от равнодействующей P будет вдвое меньше расстояния силы P_2 . Следовательно, эти расстояния будут соответственно 2 и 4 см (общее расстояние между центрами накладок равно 6 см). Таким образом найдена линия действия суммарной растягивающей силы P . Другой конец швеллера не показан на чертеже. Он может быть либо нагружен так же, либо закреплен.

Рассмотрим некоторое поперечное сечение $abcd$ нашего стержня (фиг. 13.7,б). Линия действия силы P пересекает плоскость сечения в так называемой силовой точке, обозначенной на фигуре буквой P . Координаты силовой точки в главных осях y и z видны из фигуры: $z_p=-0,5 \text{ см}$, $y_p=1 \text{ см}$. Составим уравнение нулевой линии [см. формулу (10)]:

$$\frac{6,93 \cdot 1}{26,0} y + \frac{6,93(-0,5)}{8,3} z = -1$$

или после вычислений $0,266y - 0,418z = -1$.

В этом уравнении y и z — координаты точек, лежащих на нулевой линии. Чтобы построить нулевую линию, достаточно найти две ее точки. Задавая произвольно одну из координат какой-нибудь точки, другую координату ее найдем из уравнения. Удобнее всего найти точки пересечения нулевой линии с осями координат. Одна из координат такой точки всегда равна нулю.

Положим $z=0$. Из уравнения найдем $y = \frac{-1}{0,266} = -3,76 \text{ см}$. По-

ложим $y=0$. Из уравнения найдем $z = \frac{-1}{-0,418} = 2,40 \text{ см}$. Таким

образом имеем две точки: 1) $z=0$, $y=-3,76$ и 2) $z=2,40$, $y=0$, принадлежащие нулевой линии. Нанесем эти точки на чертеж — см. точки 1 и 2. Проводя через эти точки прямую, имеем нулевую линию.

Наиболее удаленная от нулевой линии и, следовательно, опасная точка сечения есть, как видим, точка a . Вычислим напряжение в точке a . Воспользуемся формулой (9). Подставим туда координаты точки a : $z=-2,35 \text{ см}$, $y=2,5 \text{ см}$. Значение силы P подставим со знаком минус: -3000 кг , так как формула (9) выводилась для сжимающей силы, а в данном случае имеем рас-

тягивающую силу P . Получим искомое наибольшее растягивающее напряжение

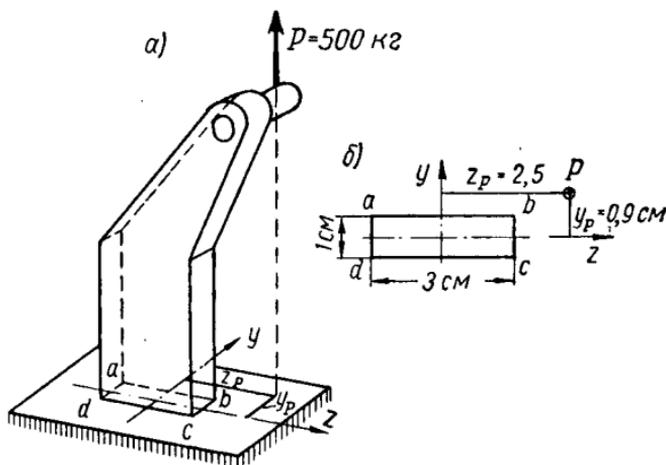
$$\sigma_a = \sigma_{\max} = -\frac{-3000}{6,93} - \frac{-3000 \cdot 1}{26,0} 2,5 - \frac{-3000(-0,5)}{8,3} (-2,35) = 1145 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее сжимающее напряжение будет по другую сторону нулевой линии также в наиболее удаленной точке, именно в точке c . Координаты этой точки: $z=1,35 \text{ см}$, $y=2,5 \text{ см}$. Пользуясь снова формулой (9), найдем $\sigma_c = -100 \text{ кг/см}^2$.

Как видим, почти весь материал стержня работает на растяжение и лишь малая часть — на сжатие. Это объясняется тем, что эксцентриситет нагрузки невелик. Если бы сила P проходила еще ближе к центру тяжести сечения, то нулевая линия могла бы находиться за пределами сечения и сжимающих напряжений не было бы вовсе. При отсутствии эксцентриситета мы имели бы обыкновенное осевое растяжение при равномерном напряжении $\frac{3000}{6,93} = 432 \text{ кг/см}^2$.

Сравнивая это напряжение с полученным выше напряжением 1145 кг/см^2 , видим, насколько сильно может увеличить напряжение даже малый эксцентриситет нагрузки.

Задача 2. На ось, закрепленную в кронштейне (фиг. 13.8,а), действует сила $P=500 \text{ кг}$. Построить нулевую линию и опреде-



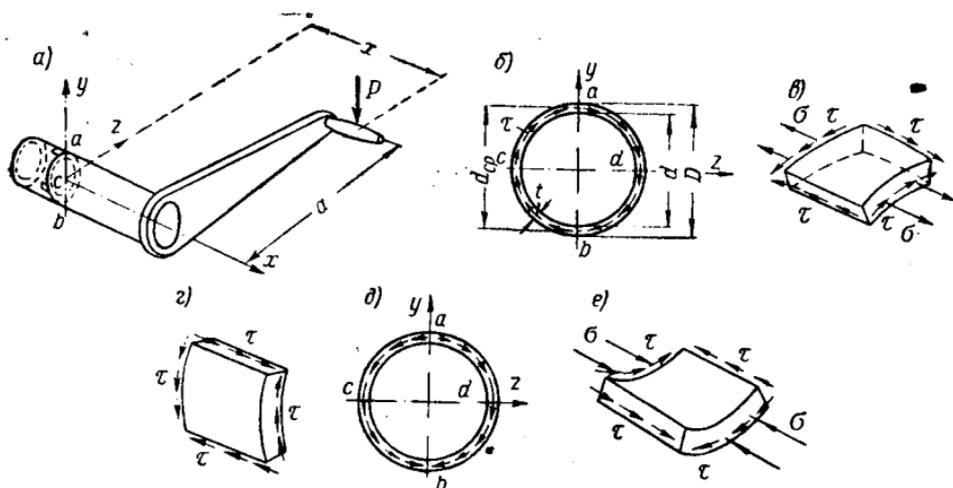
Фиг. 13.8.

лить наибольшее нормальное напряжение в основании $abcd$ кронштейна, если координаты z_p и y_p силовой точки в плоскости основания равны соответственно (см. фиг. 13.8,б) 2,5 и 0,9 см. Сечение кронштейна прямоугольное. Размеры основания $1 \times 3 \text{ см}$.

Ответ: отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат, $z = -0,3$ см, $y = -0,092$ см. Наибольшее растягивающее напряжение (в точке b) $\sigma_b = 1900$ кг/см². Наибольшее сжимающее напряжение (в точке d) $\sigma_d = -1566$ кг/см².

§ 4. Изгиб с кручением

Выше, на фиг. 13.1, a , b и z , были показаны примеры изгиба совместно с кручением. Рассмотрим напряжения в некотором поперечном сечении вала ворота — фиг. 13.1, a на участке CD .



Фиг. 13.9. Кручение и изгиб круглого вала.

a — изгибающий момент в сечении abc трубчатой оси ворота равен Px , крутящий момент — Pa ; b — касательные напряжения в сечении, вызываемые крутящим моментом; c — напряженное состояние в точке a (фиг. a) — растяжение и сдвиг; d — напряженное состояние в точке c — сдвиг; e — касательные напряжения в сечении, вызываемые поперечной силой; e — напряженное состояние в точке b — сжатие и сдвиг.

Будем считать, что вал полый. Пусть плоскость рассматриваемого сечения находится на расстоянии x от линии действия силы P , как показано на фиг. 13.9, a . Тогда изгибающий момент M_z силы P относительно оси z рассматриваемого сечения равен Px . Момент относительно оси y равен нулю, так как сила P параллельна оси y . Крутящий момент в рассматриваемом сечении найдем, проведя нормаль к сечению — ось x ; плечо силы P относительно оси x равно длине рукоятки a (положение рукоятки предполагается горизонтальным), искомый крутящий момент $M_k = M_x = Pa$.

Опасные точки. Итак, в исследуемом сечении вала мы имеем изгибающий момент $M_{изг} = M_z = Px$ и крутящий момент $M_k = Pa$. Рассмотрим отдельно влияние каждого из этих факторов. Изгибающий момент $M_{изг}$ вызывает в верхней части сечения при данном направлении нагрузки напряжения растяжения, в

нижней части — напряжения сжатия. Ось z явится нейтральной осью сечения. Наибольшее напряжение (в точках a и b) определится по формуле $\sigma = \frac{M_{изг}}{W}$.

Крутящий момент M_k вызывает в поперечном сечении касательные напряжения, направленные при данной нагрузке так, как показано на фиг. 13.9,б. Эти напряжения одинаковы по окружности. Наибольшие касательные напряжения (у поверхности вала) определяются по формуле $\tau = \frac{M_k}{W_p}$ (см. гл. VI).

Сопоставляя обе указанные системы напряжений (изгиба и кручения), видим, что наиболее напряженными точками в сечении являются точки a и b . Элемент вала, находящийся вблизи точки a (изображен крупно на фиг. 13.9,в), нагружен как нормальными, так и касательными напряжениями. Элемент же вблизи точки c (см. фиг. 13.9,а и б) нагружен только касательными напряжениями (фиг. 13.9,г), так как в точке a , находящейся на нейтральной оси, нормальные напряжения в поперечном сечении вала равны нулю.

Учет касательных напряжений изгиба. В наших рассуждениях мы не учитываем касательных напряжений, вызываемых поперечной силой (определяемых по формуле $\tau = \frac{QS}{J_b}$, гл. IX), так как они обычно малы. Если же они значительны, что может иметь место при коротких тонкостенных валах, то их следует учитывать вблизи нейтральной оси — в нашем случае у точек c и d (фиг. 13.9,б), где они имеют наибольшее значение. В данном случае (сила действует сверху вниз) касательные напряжения, вызываемые поперечной силой, направлены сверху вниз (фиг. 13.9,д). Как видим, в точке d касательные напряжения от крутящего момента (фиг. 13.9,б) и от поперечной силы одинаково направлены и, следовательно, сложатся. В точке c , наоборот, напряжения от поперечной силы действуют против напряжений кручения и, следовательно, уменьшают их. Более напряженной явится точка d .

Расчетное напряжение. Продолжим наши рассуждения, предполагая, что касательные напряжения, вызываемые поперечной силой, малы и не учитываются. В качестве опасных точек у нас были установлены точки a или b . Следовательно, прочность вала в данном сечении обуславливается прочностью материала в этих точках. Напряженное состояние в точке b изображено на фиг. 13.9,е. Оно отличается от состояния в точке a (фиг. 13.9,в) только тем, что напряжения σ здесь не растягивающие, а сжимающие, так как точка b при данной нагрузке находится в сжатой зоне. Если материал вала одинаково сопротивляется растяжению и сжатию (как, например, сталь и дуралюмин), то состояния в точках a и b равноопасны. В противном случае решающей является какая-либо одна из названных

точек. Например, если бы вал был чугунным, то прочность его определялась бы прочностью в точке a , так как чугун сопротивляется растяжению хуже, чем сжатию.

Сразу отметим принципиальное различие между напряженными состояниями в данном случае и во всех ранее рассмотренных случаях сложного сопротивления. При определении напряжений в случаях косоугольного изгиба и внецентренного сжатия или растяжения приходилось иметь дело только с нормальными напряжениями, действующими в одном направлении, параллельном оси бруса, т. е. с простым (линейным) напряженным состоянием в каждой точке бруса. В данном случае имеются также касательные напряжения, т. е. имеем одно из сложных напряженных состояний, и, следовательно, проверку прочности придется производить на основании той или иной теории прочности.

Напряженное состояние в нашем случае есть плоское напряженное состояние, так как все напряжения σ и τ , действующие на малый элемент, лежат в одной плоскости (рассматриваемый элемент вала мал, и его приближенно можно считать плоским). В обеих опасных точках (в точке a и в точке b) имеем частный случай плоского напряженного состояния, когда одно из нормальных напряжений равно нулю. Главные нормальные напряжения σ_1 и σ_3 в этом случае определяются по формулам [см. гл. IV, формулы (10)]

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (11)$$

Применяя эти выражения, можем найти расчетные напряжения, пользуясь теориями прочности. Например, по третьей теории прочности расчетное напряжение (которое нужно сравнивать с допускаемым) выражается так (см. гл. IV, § 4):

$$\sigma_{\text{расч}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (12)$$

Подставляя сюда выражения σ_1 и σ_3 , по формулам (11) найдем

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (13)$$

При пользовании формулой (13) следует не забывать, что σ и τ относятся к одной и той же точке бруса.

Подставим значения σ и τ в нашем случае: $\sigma = \frac{M_{\text{изг}}}{W}$ и $\tau = \frac{M_k}{W_p}$. При этом учтем соотношение, существующее между моментом сопротивления изгибу W и моментом сопротивления кручению W_p в случае круглого сечения (см. гл. IX):

$$W_p = 2W. \quad (14)$$

Получим

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{изг}}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{2W}\right)^2} = \frac{1}{W} \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_k^2} = \frac{M_{\text{расч}}}{W}, \quad (15)$$

где обозначено

$$\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{к}}^2} = M_{\text{расч}} \quad (16)$$

Напряжение $\sigma_{\text{расч}}$, найденное по формуле (15), следует сравнивать с допусковым. Условие прочности имеет вид $\sigma_{\text{расч}} \leq [\sigma]$, где $[\sigma]$ — допусковое напряжение на растяжение или сжатие.

Момент сопротивления W , входящий в выражение (15), определяется по формулам (гл. IX):

1) для вала сплошного сечения

$$W \approx 0,1d^3; \quad (17)$$

2) для полого вала (фиг. 13.9, б)

$$W \approx 0,1D^3(1 - \alpha^4), \quad (18)$$

где $\alpha = \frac{d}{D}$,

3) для полого тонкостенного вала

$$W \approx \frac{1}{4} \pi d_{\text{ср}}^2 t, \quad (19)$$

где t — толщина стенки вала и $d_{\text{ср}} = D - t$ — диаметр средней линии стенки (см. фиг. 13.9, б).

Последней формулой можно пользоваться, если $\frac{D}{t} > 20$; ошибка в этом случае не превысит 2,3% (правда, в сторону уменьшения прочности). При $\frac{D}{t} = 10$ ошибка составляет 5,6%.

При пользовании формулами (15) и (16) нужно помнить, что изгибающий момент $M_{\text{изг}}$ и крутящий момент $M_{\text{к}}$, входящие в эти формулы, относятся к одному и тому же сечению вала.

Пример 1. Примем числовые значения для рассмотренного выше примера. Пусть длина рукоятки $a = 30$ см. Расстояние до опасного сечения D (фиг. 13.1, а) (где изгибающий момент достигает наибольшего значения) $x = 25$ см. Сила $P = 40$ кг. Диаметр вала (внешний) $D = 4$ см. Толщина стенки вала $t = 2$ мм. Определить расчетное напряжение по третьей теории прочности.

Вычисляем изгибающий и крутящий моменты: $M_{\text{изг}} = 40 \cdot 25 = 1000$ кгсм, $M_{\text{к}} = 40 \cdot 30 = 1200$ кгсм. Отсюда расчетный момент по формуле (16) $M_{\text{расч}} = \sqrt{1000^2 + 1200^2} = 1560$ кгсм. Момент сопротивления W определим по формуле (19) (отноше-

ние $\frac{D}{t} = \frac{40}{2} = 20$):

$$W = \frac{1}{4} \pi 3,8^2 \cdot 0,2 = 2,26 \text{ см}^3.$$

Здесь 3,8 см — средний диаметр вала. Напряжение по формуле (15):

$$\sigma_{\text{расч}} = \frac{1560}{2,26} = 690 \text{ кг/см}^2.$$

Пример 2. Выше был дан пример проверки прочности. Здесь покажем пример расчета диаметра вала по заданному допускаемому напряжению. Пусть требуется определить диаметр шейки коленчатого вала (фиг. 13. 1, в). Размеры: $a=25$ см, $b=20$ см, $c=30$ см. Сила P , передаваемая на шейку перпендикулярно к плоскости щек, как показано на фигуре, равна 2 т. Допускаемое напряжение $[\sigma]=1000$ кг/см².

Реакции R_A и R_B опор определяются по правилу рычага (величины реакций R_A и R_B обратно пропорциональны их плечам a и b): $R_A = \frac{Pb}{l}$, $R_B = \frac{Pa}{l}$, т. е.

$$R_B = \frac{2000 \cdot 25}{45} = 1110 \text{ кг.}$$

Расчетным сечением шейки является среднее сечение C , где приложена сила P , так как здесь имеет место наибольший изгибающий момент

$$M_{\text{изг}} = R_B b = 1110 \cdot 20 = 22\,200 \text{ кгсм.}$$

Крутящий момент в том же сечении

$$M_k = R_B c = 1110 \cdot 30 = 33\,300 \text{ кгсм.}$$

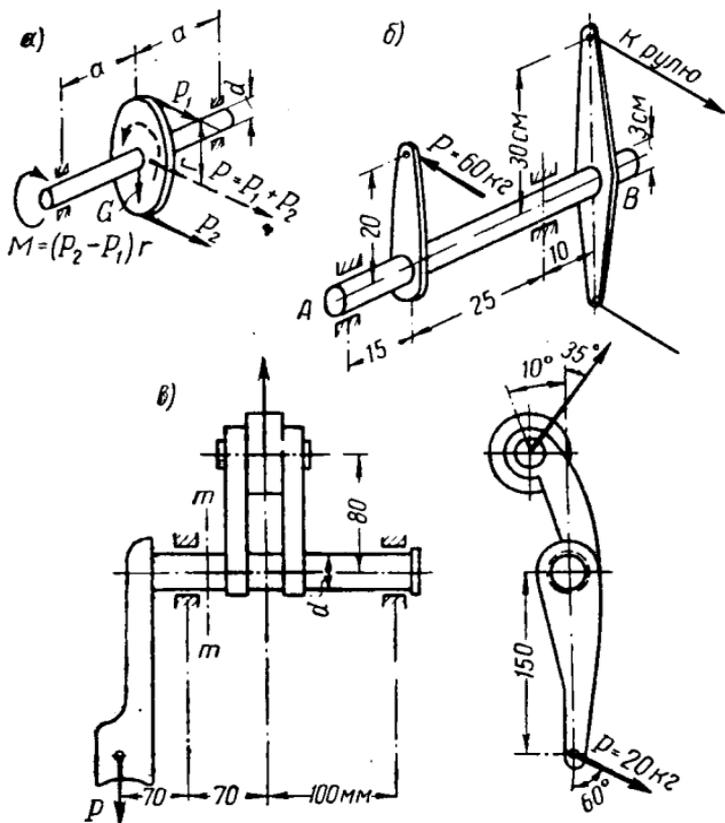
Расчетный момент по третьей теории прочности [формула (16)]

$$M_{\text{расч}} = \sqrt{22\,200^2 + 33\,300^2} = 40\,000 \text{ кгсм.}$$

Искомый диаметр определим из условия, что расчетное напряжение $\sigma_{\text{расч}}$ равно допускаемому $[\sigma]$. Подставляя в формулу (15) значение $\sigma_{\text{расч}} = [\sigma] = 1000$ кг/см² и $M_{\text{расч}} = 40\,000$ кгсм, получим $1000 = \frac{40\,000}{W}$. Отсюда необходимый момент сопротивления сечения шейки $W = \frac{40\,000}{1000} = 40$ см³, т. е. [см. формулу (17)] $0,1d^3 = 40$, откуда диаметр шейки $d = 7,37$ см.

Задачи. 1. Пользуясь третьей теорией прочности, определить диаметр d вала, свободно лежащего в двух подшипниках (фиг. 13. 10, а), передающего момент $M=10$ кгм на шкив с горизонтальной ременной передачей. Шкив имеет вес $G=5$ кг и расположен по середине между подшипниками. Расстояние между подшипниками $2a=40$ см. Радиус шкива $r=15$ см. Принять, что натяжение P_2 ведущего ремня втрое больше натяжения P_1 ведомого. Допускаемое напряжение материала $[\sigma] = 900$ кг/см². Указание. Силы P_1 и P_2 вызывают изгиб и круче-

ние, как показано на фиг. 13.10,а пунктиром. Момент сил P_1 и P_2 относительно оси вала равен $P_2r - P_1r = (P_2 - P_1)r$. Он и уравновешивает приложенный крутящий момент M . Следовательно, $M = (P_2 - P_1)r$ и $P_2 - P_1 = \frac{M}{r}$. Отсюда можно определить P_1 и P_2 , учитывая условие $P_2 = 3P_1$. Полную изгибающую силу найдем геометрически, как $\sqrt{P_2^2 + G^2}$. Ответ: $d = 2,65$ см.



Фиг. 13.10.

2. Проверить прочность горизонтальной трубы AB рулевого управления самолета (фиг. 13.10,б), если поводок ножной педали передает усилие $P = 60$ кг. Наружный и внутренний диаметры трубы 30 и 24 мм. Применить третью теорию прочности. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 1000$ кг/см². Ответ: $\sigma_{\text{расч}} = 880$ кг/см².

3. Рассчитать по сечению mm диаметр d валика коленчатого коромысла авиамотора (фиг. 13.10,в). Расчет вести по третьей теории прочности, принимая $[\sigma] = 700$ кг/см². Считать, что в подшипниках вал свободно оперт. Ответ: $d = 1,4$ см.

Расчет по другим теориям прочности. Выше мы пользовались третьей теорией прочности, которая имеет на-

большее распространение из теорий, указанных в гл. IV. Если бы мы воспользовались первой теорией прочности, то, рассуждая прежним путем, получили бы [см. формулу (15)]:

$$M_{\text{расч}} = \frac{1}{2} \left(M_{\text{изг}} + \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{к}}^2} \right).$$

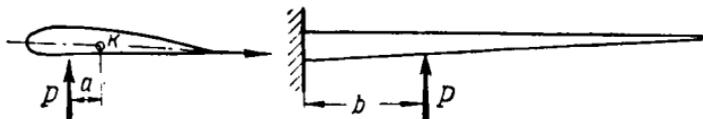
Первая теория применяется при хрупких материалах (чугун). По второй теории прочности мы получили бы

$$M_{\text{расч}} = 0,35M_{\text{изг}} + 0,65 \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{к}}^2}.$$

По четвертой теории $M_{\text{расч}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}$.

Случай стержня некруглого сечения. Валы наиболее часто имеют круглое сечение, как и предполагалось выше. Однако часто в практике имеет место также кручение с изгибом стержней некруглого профиля. В таких случаях нужно пользоваться непосредственно формулой (13) (если расчет ведется по третьей теории прочности). Рассмотрим примеры.

Пример 3. Определить напряжения в обшивке крыла моноблок вблизи корня (опасное сечение) под действием подъемной силы, равнодействующая которой $P=3 \text{ т}$ (фиг. 13. 11) проходит, как показано на фигуре, в расстоянии $b=1,2 \text{ м}$ от корневого сечения и в расстоянии $a=0,3 \text{ м}$ от вертикали, проведенной через



Фиг. 13. 11. Подъемная сила P крыла самолета вызывает изгиб и кручение крыла. Изгибающий момент у корня равен Pb . Крутящий момент — Pa (K — центр изгиба сечения крыла).

центр изгиба сечения K . Момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси ¹ $W_z=500 \text{ см}^3$. Площадь, ограниченная контуром сечения, равна 3000 см^2 . Толщина обшивки $1,5 \text{ мм}$.

Имеем крутящий момент $M_{\text{кр}}=Pa=3000 \cdot 30=90 \text{ 000 кгсм}$ и изгибающий момент $M_{\text{изг}}=P \cdot b=3000 \cdot 120=360 \text{ 000 кгсм}$.

Отыщем опасную точку в сечении. Она и в данном случае определяется напряжениями изгиба, так как напряжения кручения одинаковы во всех точках сечения. Напряжение изгиба будет наибольшим в точке, наиболее удаленной от оси z , являющейся в данном случае нейтральной осью (если бы имелась также нагрузка, изгибающая крыло в горизонтальной плоскости, то опасную точку следовало бы отыскать по правилам расчета

¹ С достаточной точностью можно принять за нейтральную ось горизонталь, проходящую через ц. т. сечения.

при косом изгибе — см. § 2 настоящей главы). Вычислим напряжения кручения [см. гл. VII, § 3, формула (7)]

$$\tau = \frac{M_k}{\omega_k f} = \frac{90\,000}{2 \cdot 3000 \cdot 0,15} = 100 \text{ кг/см}^2 \text{ и изгиба}$$

$$\sigma = \frac{M_{изг}}{W} = \frac{360\,000}{500} = 720 \text{ кг/см}^2.$$

Подставляя эти значения в формулу (13), получим расчетное напряжение по третьей теории прочности:

$$\sigma_{расч} = \sqrt{720^2 + 4 \cdot 100^2} = 750 \text{ кг/см}^2.$$

Пример 4. Проверить прочность щеки коленчатого вала (фиг. 13.1, в), пользуясь третьей теорией прочности, в сечении, взятом на расстоянии $x=27$ см от опоры B (сечение $abcd$). Нагрузки и допускаемое напряжение взять, как в примере 2. Расстояние от опоры до оси щеки $e=12$ см. Размеры сечения щеки 3×9 см.

Рассматриваемое сечение $abcd$ щеки вала показано на фиг. 13.12. Сечение нагружено изгибающим моментом относительно оси z : $M_z = R_B x$ (см. фиг. 13.1, в) и крутящим моментом $M_k = R_B e$. Значение реакции $R_B = 1110$ кг было определено в примере 2. Таким образом $M_z = 1110 \cdot 27 = 30\,000$ кгсм и $M_k = 1110 \cdot 12 = 13\,300$ кгсм.

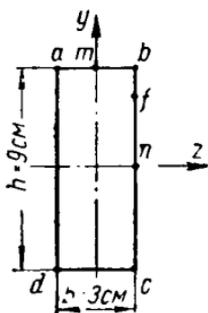
Выясним опасную точку в сечении. Она находится, как всегда, у края сечения (где-то у поверхности щеки), так как максимальные напряжения изгиба и кручения имеют место у краев сечения. Наметим в качестве опасных точки n , m и одну из угловых (a , b , c или d) и выявим из них наиболее опасную.

Рассматривая напряжения в точке n , замечаем, что нормальные напряжения здесь равны нулю (ось z , на которой лежит точка n , является в данном случае нейтральной осью сечения), а касательные напряжения изгиба имеют наибольшее значение и в данном случае равны [см. гл. IX, § 8, формулу (18)]:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} = \frac{3}{2} \frac{1110}{9 \cdot 3} = 55 \text{ кг/см}^2.$$

Касательные напряжения кручения также имеют наибольшее значение в точке n и вычисляются по формуле [гл. VII, § 1, формулы (1) и (2)] $\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}$, где $W_k = \alpha h b^2 = 0,267 \cdot 9 \cdot 3^2 =$

$= 21,7 \text{ см}^3$ (значение $\alpha = 0,267$ взято из табл. 6 в гл. VII в зависимости от отношения сторон сечения $\frac{h}{b}$, которое в нашем случае равно $\frac{9}{3} = 3$), т. е. $\tau_{max} = \frac{13\,300}{21,7} = 610 \text{ кг/см}^2$. Таким об-



Фиг. 13.12.

разом суммарное касательное напряжение в точке n от изгиба и кручения вместе равно $55 + 610 = 665 \text{ кг/см}^2$. По формуле (13) найдем расчетное напряжение в точке n :

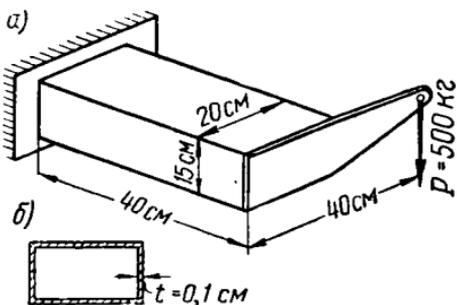
$$\sigma_{\text{расч}}^n = \sqrt{0^2 + 4 \cdot 665^2} = 1330 \text{ кг/см}^2.$$

Обратимся к точкам a и m . Эти точки равноудалены от оси z , следовательно, нормальные напряжения изгиба в этих точках одинаковы

$$\sigma^a = \sigma^m = \frac{M_z}{W_z}.$$

Касательные напряжения изгиба здесь равны нулю. Напряжения же кручения в точках a и m неодинаковы. Как мы знаем (гл. VII), в угловых точках (a, b, c и d) напряжения кручения равны нулю, а в точке m оно не равно нулю и определяется по формуле $\tau = \tau_{\text{max}} \gamma$. Таким образом из двух сравниваемых точек a и m опаснее точка m . Вычислим напряжения в этой точке. Нормальное напряжение $\sigma = \frac{M_z}{W_z} = \frac{30000}{40,5} = 740 \text{ кг/см}^2$ (момент сопротивления W_z найден по формуле $W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{3 \cdot 9^3}{6} = 40,5 \text{ см}^3$), касательное напряжение $\tau = \tau_{\text{max}} \gamma = 610 \cdot 0,7533 = 459 \text{ кг/см}^2$ (значение $\gamma = 0,7533$ взято из табл. 6 в гл. VII). Следовательно, расчетное напряжение для точки m $\sigma_{\text{расч}}^m = \sqrt{740^2 + 4 \cdot 459^2} = 1180 \text{ кг/см}^2$.

Таким образом наибольшее расчетное напряжение имеет место в точке n . Оно превышает допускаемое напряжение на $\frac{1330 - 1000}{1000} \cdot 100 = 33\%$. заключаем,



Фиг. 13. 13.

что прочность щеки недостаточна.

Следует заметить, что не всегда наиболее опасные точки в сплошном прямоугольном сечении находятся по середине сторон сечения, как предположили мы. Более подробные расчеты показывают, что расчетное напряжение в некоторой промежуточной точке (фиг. 13. 9) может оказаться больше,

чем в какой-либо из названных выше точек. В сомнительных случаях следует проверить несколько точек.

Задача 2. Определить наибольшее расчетное напряжение, пользуясь третьей теорией прочности, для тонкостенной консоли замкнутого прямоугольного сечения (фиг. 13. 13), нагруженной, как показано на фигуре. *Ответ:* 730 кг/см^2 .

§ 5. Другие случаи сложного сопротивления

На практике возможны более сложные случаи нагружения стержня, нежели рассмотренные выше. Методика проверки прочности во всех случаях подобна вышеизложенной: устанавливается *опасное сечение* и в нем опасная точка, в этой точке выясняется напряженное состояние и определяется расчетное напряжение по той или иной теории прочности.

Рассмотрим, например, случай работы костыля под действием сил V и H , параллельной и перпендикулярной оси стойки — фиг. 13.14 (реактивные силы в верхней части стойки на фигуре не показаны). Пусть требуется проверить прочность стойки в некотором сечении ее, взятом на расстоянии x от точки приложения сил. Данный случай сложного сопротивления состоит из следующих простых составляющих: 1) осевое сжатие — сжимающая сила равна V , 2) изгиб относительно оси z — изгибающий момент $M_z = Va$, 3) изгиб относительно оси y — изгибающий момент $M_y = Hx$ и 4) кручение — крутящий момент $M_k = Ha$. Сдвигающим действием поперечной силы пренебрежем. Видим, что опасное сечение будет там, где момент M_y имеет наибольшее значение.

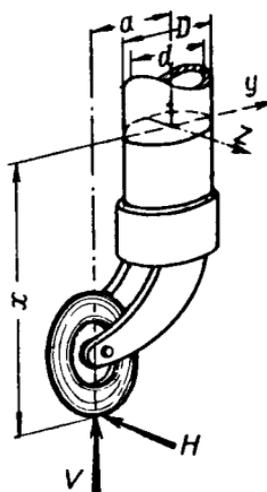
Установим опасную точку в сечении. Как уже указывалось, эту точку следует искать у поверхности бруса, т. е. по внешнему краю сечения. Напряжения кручения постоянны по окружности, а напряжения от осевого сжатия вообще постоянны в сечении и равны $\frac{V}{F}$. Следовательно, опасная точка будет там, где будет иметь место наибольшее напряжение изгиба и именно сжимающее напряжение изгиба, так как оно здесь сложится со сжимающим напряжением от осевой силы.

Полный изгибающий момент найдем, как и ранее [см. формулу (4)], складывая геометрически моменты M_z и M_y :

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Наибольшее нормальное напряжение изгиба определится по известной формуле

$$\sigma_{\text{изг}} = \frac{M_{\text{изг}}}{W}$$



Фиг. 13.14. Сила V вызывает сжатие стойки и изгиб относительно оси z сечения. Сила H вызывает изгиб относительно оси y и кручение.

и суммарное нормальное напряжение в опасной точке от изгиба и сжатия:

$$\sigma = -\frac{M_{\text{изг}}}{W} - \frac{V}{F}.$$

Напряжение кручения $\tau = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{P}}}$. Подставляя полученные значения σ и τ в формулу (13), найдем расчетное напряжение по третьей теории прочности.

Задача. Чтобы усвоить предложенный ход решения, предлагаем рассмотреть приведенный выше пример при следующих числовых значениях и произвести вычисления. Сила $V=2$ т, сила $H=0,5$ т, $x=50$ см, $a=12$ см, размеры сечения стойки: $D=8$ см, $d=7,2$ см. *Ответ:* Расчетное напряжение по третьей теории прочности равно 2000 кг/см².

Контрольные вопросы

1. Какие случаи деформации бруса называются сложным сопротивлением?
2. В чем состоит принцип независимости действия сил? Когда он применим?
3. Что называется косым изгибом? Почему он так называется?
4. Как определяется напряжение (и деформация) при косом изгибе?
5. Как помогает расчету нейтральная или нулевая линия?
6. Как определяется полный изгибающий момент в сечении бруса при косом изгибе?
7. Что называется внецентренным растяжением или сжатием?
8. Для каких осей z и y составлена формула (9) для определения напряжений при внецентренном сжатии?
9. Что означает выход нулевой линии за пределы сечения?
10. Почему проверка прочности при совместном действии кручения и изгиба основывается всегда на той или иной теории прочности?
11. Как определяется условный расчетный изгибающий момент для круглого вала при совместных кручении и изгибе по третьей теории прочности?
12. Как определяется расчетное напряжение по третьей теории прочности в случае изгиба и кручения бруса некруглого сечения?
13. Изложите порядок расчета при проверке прочности бруса в случае сложного сопротивления.

Глава XIV

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН

§ 1. Общие понятия

Продольный изгиб. В предыдущих главах мы в качестве признака неразрушаемости конструкции или ее детали пользовались понятием прочности, определяемой напряжениями в опасной точке. Если наибольшее — расчетное — напряжение не превышало допускаемого, то мы считали рассматриваемую деталь прочной, т. е. способной выдерживать данную нагрузку. В настоящей главе мы познакомимся со случаями, когда прочность материала не является достаточным признаком способности конструкции выдерживать заданную нагрузку.

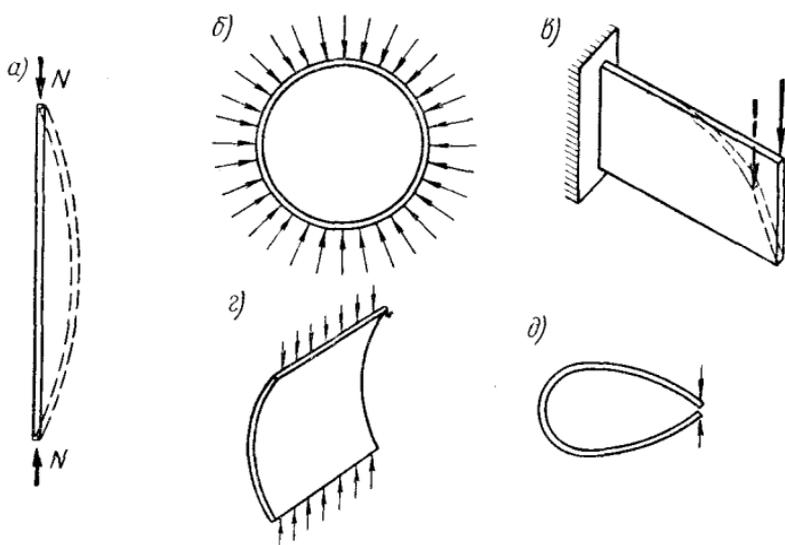
Нагружая, например, длинный стержень сжимающими осевыми силами (фиг. 14.1а), мы обнаружим, что он изогнется при напряжениях в нем, значительно меньших предела прочности данного материала — произойдет так называемый *продольный изгиб* стержня. В начале опыта — при малом значении продольных сил — прямолинейная форма стержня является *устойчивой*: если стержень в это время слегка изогнуть поперечной нагрузкой, то он после удаления поперечной нагрузки снова становится прямым. С увеличением продольной нагрузки стержень становится менее устойчивым: не так быстро возвращается к прямолинейной форме после отклонения. И, наконец, при некотором значении продольной сжимающей силы, называемом *критическим* ($N_{кр}$), равновесие стержня становится безразличным, а при дальнейшем возрастании нагрузки — *неустойчивым*, стержень полностью теряет устойчивость прямолинейной формы, при этом и наблюдается явление продольного изгиба.

Решение задачи об устойчивости сжатого стержня (колонны, стойки) дал в XVIII веке Л. Эйлер, член Российской академии наук. Но работа Эйлера очень долгое время не получала практического применения. О ней вспомнили лишь в XIX веке в связи с развитием металлического мостостроения.

Переход прямолинейного состояния стержня в изогнутое, если стержень строго прямолинейен и сжимающая сила точно

центрирована по оси стержня, происходит внезапно. Стержень остается прямым вплоть до критической нагрузки, после чего он может потерять устойчивость — изогнуться и сделаться неспособным нести нагрузку. Практически всегда имеется некоторый начальный прогиб стержня и эксцентриситет сжимающей силы. Эти обстоятельства «сглаживают» появление продольного изгиба; изгиб стержня в этом случае имеет место и при нагрузке, меньшей критической, но на величину критической силы, при которой происходят большие деформации, указанные обстоятельства влияют мало.

Потеря устойчивости стержнем во многих случаях так же опасна, как и недостаточная прочность материала, ибо также может привести к разрушению. Для длинных стержней, нагру-



Фиг. 14.1. Примеры потери устойчивости первоначальной формы равновесия.

a — продольный изгиб стержня; *б* — тонкое кольцо (или цилиндр) может потерять устойчивость под действием внешнего давления; *в* — потеря устойчивости плоской формы изгиба; *г* — потеря устойчивости пластиной при сжатии; *д* — потерявший устойчивость стержень (или пластина) не может сопротивляться действующим нагрузкам.

женных сжатием, приходится поэтому снижать допускаемое напряжение по сравнению с обычным допускаемым напряжением на сжатие данного материала, устанавливаемым для коротких стержней. Вопросу о степени такого снижения и будет посвящена в основном настоящая глава.

Инженеры впервые столкнулись с частыми случаями потери устойчивости при сооружении и эксплуатации больших мостов,

где с целью уменьшения веса пролетного строения стержням старались придать минимальные размеры поперечного сечения. Произошел ряд катастроф из-за того, что сжатые стержни ферм, рассчитанные на прочность, не обладали достаточной устойчивостью. В авиации проблема веса конструкции имеет еще большее значение. Вследствие этого самолет содержит много тонких и, следовательно, гибких элементов. Такие элементы часто подлежат расчету на устойчивость.

Другие примеры потери устойчивости. Продольный изгиб стержня, описанный здесь, является только одним из случаев потери устойчивости. Можно привести еще много примеров явления потери устойчивости, когда конструкция разрушается или становится неработоспособной вследствие утраты устойчивости своей формы, причем это может произойти и без разрушения материала конструкции.

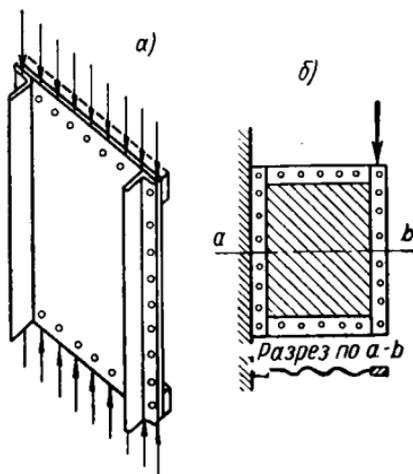
Так, сжатый тонкостенный стержень, имеющий в поперечном сечении открытый профиль, при некотором значении нагрузки, как показывает опыт, закручивается. Тонкое кольцо, нагруженное внешним давлением (фиг. 14.1,б) и находящееся в состоянии сжатия, может потерять устойчивость своей круговой формы даже при небольших напряжениях в материале. Тонкостенная труба может сплющиться под влиянием внешнего давления. Тонкая высокая балка (фиг. 14.1,в) может потерять устойчивость плоской формы изгиба, как показано на рисунке, даже при небольших напряжениях

$\sigma = \frac{M}{W}$ изгиба. Тонкие оболочки,

например, обшивка крыла или фюзеляжа самолета, также могут потерять устойчивость под действием сжимающих сил.

Обшивка тем легче теряет устойчивость, чем более она приближается к плоской. Плоский лист, так называемая *пластина*, например, лист фанеры, легко согнуть сжимающими усилиями (фиг. 14.1,е). Тонкий лист может быть согнут в трубу (фиг. 14.1,д) без нарушения прочности самого материала и даже без остаточных деформаций — после снятия нагрузки лист снова распрямляется.

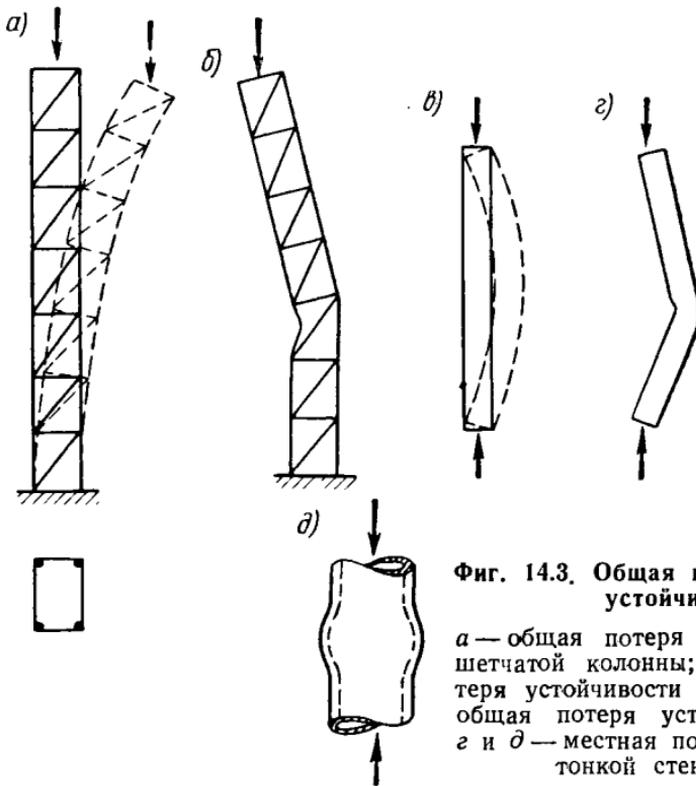
В инженерной конструкции пластина почти всегда прикреплена к тому или иному каркасу. Каркас, обрамляющий пласти-



Фиг. 14.2. Подкрепленные пластины могут работать и после потери устойчивости.

a — сжатая панель; благодаря окантовке выпучившаяся пластина продолжает нести нагрузку; *b* — панель, работающая на сдвиг; потерявшая устойчивость пластина имеет волнообразный вид.

ну, обеспечивает работоспособность ее и после потери устойчивости. Пусть имеем пластину, подкрепленную по краям угольниками или планками (фиг. 14.2,а), так называемую панель. При некоторой сжимающей нагрузке пластина потеряет устойчивость, т. е. выпучится, но панель в целом не разрушается, если угольники не теряют устойчивости. При увеличении нагрузки на панель увеличиваются напряжения и в пластине. Таким образом подкрепленная пластина способна работать и при напряжениях, больших критического. Стержень же, как мы уже указывали, при критических напряжениях $\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{F}$ перестает воспринимать возрастание нагрузки. Если подкрепленная



Фиг. 14.3. Общая и местная потеря устойчивости.

а — общая потеря устойчивости решетчатой колонны; б — местная потеря устойчивости в колонне; в — общая потеря устойчивости трубы; г и д — местная потеря устойчивости тонкой стенки трубы.

пластина работает на сдвиг, то потеря устойчивости характеризуется появлением косых волн (фиг. 14.2,б).

Общая и местная потеря устойчивости. Различают два вида потери устойчивости конструкцией: общую и местную. Различие между ними поясним на примерах. Пусть имеем решетчатую колонну (фиг. 14.3,а), нагруженную продольной сжимающей силой. Если эта сила больше критического ее значения (о вычислении критической силы речь идет в следующих параграфах), то произойдет потеря устойчивости. Если при этом изогнется вся колонна целиком (см. пунктир), то потеря

устойчивости называется *общей*; при этом отдельные стержни фермы устойчивости не теряют, т. е. самостоятельно не изгибаются — поперечное сечение колонны не деформируется нигде на всем протяжении стержня. Если же теряет устойчивость один какой-либо стержень фермы (фиг. 14.3,б), то потеря устойчивости называется *местной*. Иногда одновременно теряют устойчивость несколько стержней. Местная потеря устойчивости для стержневой системы, содержащей только необходимое число связей, так же опасна, как и общая потеря устойчивости. Система же с избыточным количеством связей может не разрушиться при местной потере устойчивости (см. в гл. XII соображения о живучести систем с лишними связями).

Подобный же пример показан на фиг. 14.3,в и г — тонкостенная труба, нагруженная продольной силой, теряет устойчивость либо целиком (см. пунктир), причем поперечные сечения трубы не деформируются, либо тонкая стенка трубы теряет устойчивость на небольшом участке, где образуется вмятина (фиг. 14.3,г). Первая форма потери устойчивости является общей, вторая — местной. Для тонкостенной сжатой трубы возможна также местная потеря устойчивости в форме, показанной на фиг. 14.3,д.

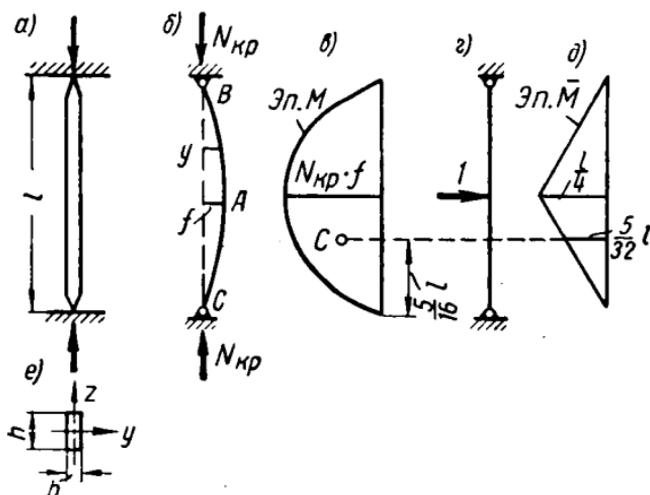
Общей и местной потерей устойчивости соответствуют вообще различные значения критической силы и решающей при расчете является меньшая из них. При проектировании конструкций, для которых общая и местная потери устойчивости одинаково опасны, стараются добиться равноустойчивости отдельных элементов конструкции и всей конструкции целиком, т. е. чтобы значения критической силы, соответствующие общей и местной потере устойчивости, были одинаковы.

Запас устойчивости. Критическая сила при продольном изгибе стержня является, как уже указано, разрушающей силой и поэтому не может быть допущена в реальных конструкциях. Действительные сжимающие усилия в стержнях должны быть всегда меньше критических. Отношение $k = \frac{N_{кр}}{N}$ критиче-

ской силы стержня к действительному усилию называется *коэффициентом запаса устойчивости* или просто *запасом устойчивости*. Величина его задается нормами; она зависит от характера сооружения и нагрузки. Коэффициент запаса устойчивости при продольном изгибе колеблется в стальных конструкциях обычно в пределах от 1,8 до 3,0. Это вызывается влиянием неизбежной в реальных условиях внецентренности сжимающей силы, начальной кривизны стержня (отклонения от идеальной прямолинейности) и неоднородности материала. Все эти обстоятельства в случае продольного изгиба влияют на деформацию стержня в значительно большей степени, чем в других случаях нагружения.

§ 2. Формула Эйлера

Рассмотрим условия, при которых может произойти описанное в предыдущем параграфе явление изгиба прямого стержня при сжатии его продольными силами — продольный изгиб. На фиг. 14.4,а показан случай свободного опирания стержня. Оно



Фиг. 14.4. К выводу формулы Эйлера $N_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

равносильно закреплению концов стержня при помощи шарниров (фиг. 14.4,б). Этот случай закрепления стержня будем называть основным. Концы стержня в данном случае поворачиваются свободно при его выпучивании. Выведем зависимость между критической силой $N_{кр}$, размерами стержня и модулем упругости материала для указанного случая закрепления стержня.

Предположим, что сжатый стержень, будучи выведен из прямолинейной формы равновесия, остался изогнутым (фиг. 14.4,б). Это означает, что сжимающая сила имеет критическое значение $N_{кр}$. Пусть прогиб стержня в некотором произвольном сечении равен y . Тогда изгибающий момент в этом сечении равен $N_{кр} y$, т. е. изгибающий момент в сечении пропорционален его прогибу y ; это значит, что упругая линия стержня может одновременно представлять собой и эпюру изгибающих моментов в некотором масштабе. На фиг. 14.4,в эта эпюра изображена более крупно. Если наибольший прогиб обозначить через f , то наибольший момент будет равен $N_{кр} f$.

Пользуясь эпюрой моментов, можно было бы известным нам методом единичной силы (гл. XI) найти прогиб f , если бы была известна форма эпюры. Но форма упругой линии и, следова-

тельно, эпюры M неизвестна. Допустим приближенно, что упругая линия и эпюра M изображаются квадратной параболой. Тогда площадь эпюры M будет равна $\frac{2}{3} l N_{кр} f$. Эпюру \bar{M} построим, приложив единичную силу по середине стержня, где определяется прогиб (фиг. 14. 2, з и д). «Переменная» эпюры M и \bar{M} по Верещагину, найдем искомый максимальный прогиб:

$$f = \frac{\sum Qm}{EJ} = \frac{1}{EJ} 2 \left[\left(\frac{1}{2} \frac{2}{3} l N_{кр} f \right) \frac{5}{32} l \right] = \frac{5l^2 N_{кр} f}{48EJ};$$

отсюда

$$N_{кр} = 9,6 \frac{EJ}{l^2}.$$

Мы получили приближенную формулу, так как форму упругой линии мы приняли произвольно параболической. В действительности она является синусоидальной, как показал Эйлер, получивший (при помощи высшей математики) в рассматриваемом случае формулу

$$N_{кр} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} = 9,87 \frac{EJ}{l^2}. \quad (1)$$

Как видим, приближенный результат отличается от точного на 2,70%.

Опыты на продольный изгиб производились еще до Эйлера. Этими опытами было установлено, что критическая нагрузка стержня зависит от его длины, причем обратно пропорциональна квадрату длины. Так, если длину стержня увеличить вдвое, то он потеряет устойчивость при нагрузке, вчетверо меньшей; если длину стержня увеличить втрое, то, чтобы вызвать потерю его устойчивости, потребуется в девять раз меньшая сжимающая сила, чем первоначально и т. д., при условии что поперечное сечение стержня остается неизменным. Как видим, это согласуется с формулой Эйлера.

С другой стороны, ясно, что устойчивость стержня зависит от размеров его поперечного сечения и также от материала. Формула Эйлера указывает на пропорциональность между критической силой и жесткостью EJ стержня. Следовательно, например, дуралюминовый стержень выдержит втрое меньшую сжимающую силу, чем стальной стержень таких же размеров, так как модуль упругости дуралюмина втрое меньше модуля упругости стали.

Пределы применимости формулы Эйлера. При выводе формулы Эйлера мы пользовались формулой для нахождения перемещений, полученной при условии пропорцио-

нальности между нагрузкой и деформацией. Следовательно, формулой Эйлера можно пользоваться лишь в том случае, когда напряжение в стержне в момент потери устойчивости не превышает предела пропорциональности данного материала. При достижении нагрузкой критического значения стержень можно считать прямым и, следовательно, напряжение в поперечном сечении стержня равномерным:

$$\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{F}. \quad (2)$$

Это напряжение будем называть *критическим напряжением* по аналогии с критической силой. Подставляя в формулу (2) выражение $N_{кр}$ по формуле (1), получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2 F}. \quad (3)$$

Введем обозначение

$$\sqrt{\frac{J}{F}} = i. \quad (4)$$

Величина i имеет размерность длины. Эта величина называется *радиусом инерции* сечения стержня. Возводя равенство (4) в квадрат, получим $\frac{J}{F} = i^2$. Тогда формула (3) переписется так:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2}.$$

Отношение $\frac{l}{i}$ длины стержня к радиусу инерции называется *гибкостью* стержня и обозначается буквой λ . Применяя это обозначение, получаем

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (5)$$

Найденное соотношение часто называется вторым видом формулы Эйлера.

Сформулированное выше условие применимости формулы Эйлера выражается так:

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц},$$

где $\sigma_{пц}$ — предел пропорциональности. Подставим сюда значение $\sigma_{кр}$ по формуле (5). Получим

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}.$$

Отсюда

$$\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}} \leq \lambda^2$$

или

$$\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} \leq \lambda.$$

Обозначим

$$\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \lambda_{\text{пред}} \quad (6)$$

и окончательно условие применимости формулы Эйлера запишется так:

$$\lambda_{\text{пред}} \leq \lambda \text{ или } \lambda \geq \lambda_{\text{пред}}. \quad (7)$$

Оно читается следующим образом: формула Эйлера применима, если гибкость λ стержня больше предельного ее значения $\lambda_{\text{пред}}$ (или, в крайнем случае, равна ей).

Величина $\lambda_{\text{пред}}$ зависит, как видим из формулы (6), только от материала стержня. Вычислим, например, значение $\lambda_{\text{пред}}$ для мягкой стали. Модуль упругости E мягкой стали равен, как мы знаем, $2\,000\,000 \text{ кг/см}^2$, а предел пропорциональности—около 2000 кг/см^2 . Подставляя эти числа в формулу (6), получим

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2\,000\,000}{2000}} \approx 100.$$

Следовательно, для нахождения критической сжимающей силы в случае стержня из мягкой стали можно применять формулу Эйлера, если гибкость стержня λ больше (или равна) 100.

Пример 1. Определить критическую силу для свободно опертого стержня круглого сечения диаметром $d=2 \text{ см}$, длиной $l=60 \text{ см}$, изготовленного из мягкой стали.

Прежде всего найдем гибкость стержня. Для этого вычислим предварительно радиус инерции сечения стержня $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$. Момент инерции круглого сечения, как мы знаем, равен $\frac{\pi d^4}{64}$, а площадь сечения равна $\frac{\pi d^2}{4}$. Следовательно, радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4}}} = \frac{d}{4}, \quad (8)$$

т. е. $i = \frac{2}{4} = 0,5$ см. Гибкость нашего стержня $\lambda = \frac{l}{i} = \frac{60}{0,5} = 120$ больше 100, следовательно, формулу Эйлера можно применить.

Воспользуемся формулой (5):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2\,000\,000}{120^2} = 1370 \text{ кг/см}^2.$$

Умножая полученное критическое напряжение на площадь

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 2^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2$$

сечения стержня, имеем искомую критическую силу

$$N_{кр} = \sigma_{кр} F = 1370 \cdot 3,14 = 4300 \text{ кг}.$$

Обращаем внимание на то, что найденное критическое напряжение 1370 кг/см^2 не только значительно меньше предела прочности мягкой стали ($4000\text{—}4500 \text{ кг/см}^2$), но даже меньше предела текучести ее ($2300\text{—}2500 \text{ кг/см}^2$).

Пример 2. Определить критическую силу для свободно опертого стержня квадратного сечения 1×1 см, длиной 25 см, изготовленного из легированной стали, модуль упругости которой — $2\,200\,000 \text{ кг/см}^2$, а предел пропорциональности — 8000 кг/см^2 .

Сперва найдем предельное значение гибкости стержня $\lambda_{пред}$, при котором еще справедлива формула Эйлера для данного материала. По формуле (6) имеем

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2\,200\,000}{8000}} = 52.$$

Вычислим гибкость нашего стержня. Момент инерции сечения

$$J = \frac{1 \cdot 1^3}{12} = 0,0833 \text{ см}^4.$$

Площадь сечения

$$F = 1 \cdot 1 = 1 \text{ см}^2.$$

Следовательно, радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{0,0833}{1}} = 0,288 \text{ см}.$$

Отсюда гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{25}{0,288} = 87.$$

Таким образом гибкость заданного стержня больше предельной гибкости $\lambda_{\text{пред}} = 52$ для данного материала. Формулу Эйлера можем применить. Находим

$$N_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 2\,200\,000 \cdot 0,0833}{25^2} = 2900 \text{ кг.}$$

Приводим значения $\lambda_{\text{пред}}$ для некоторых материалов.

Наименование материала	Значение $\lambda_{\text{пред}}$
Сталь мягкая (сталь 3)	100
Сталь легированная высококачественная	50
Дуралюмин	60
Сосна	100

Плоскость изгиба. В рассмотренных примерах стержней круглого и квадратного сечения плоскость изгиба стержня при потере устойчивости является неопределенной. Поскольку моменты инерции таких сечений одинаковы относительно всех центральных осей, жесткость стержня также одинакова во всех плоскостях, проходящих через ось стержня. Поэтому нельзя заранее предусмотреть, в каком направлении будет выгибаться стержень при потере устойчивости. Если же главные моменты инерции сечения неодинаковы, как, например, в случае прямоугольного сечения, как показано на фиг. 14.4,е, то плоскостью изгиба свободного стержня будет плоскость наименьшей жесткости стержня. Пусть $h > b$; тогда $J_z = J_{\text{min}}$ и $J_y = J_{\text{max}}$ и, следовательно, плоскость y есть плоскость наименьшей жесткости, а плоскость z — плоскость наибольшей жесткости стержня. Таким образом если перемещения стержня в направлении оси y не стеснены, то прогиб его при потере устойчивости от продольной силы будет происходить именно в направлении оси y . Потеря устойчивости произойдет при значении сжимающей нагрузки

$$N_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{l^2}. \quad (9)$$

Соответственно гибкость стержня будет определяться как

$$\lambda = \frac{l}{i_{\text{min}}}, \quad \text{где } i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{F}}. \quad (10)$$

И только в том случае, если изгиб стержня в плоскости наименьшей жесткости невозможен, стержень будет выпучиваться в ином направлении, но этому будет соответствовать большая критическая сила.

Пример 3. Определить допускаемую сжимающую силу для свободного стержня, выполненного из стандартного прокатного равнобокого стального угольника № 5 (фиг. 14.5). Минимальный момент инерции сечения стержня $J_z = J_{\min} = 4,61 \text{ см}^4$. Площадь сечения $4,80 \text{ см}^2$. Минимальный радиус инерции $i_z = i_{\min} = 0,98 \text{ см}$. Длина стержня $l = 1 \text{ м}$. Требуемый запас устойчивости $k = 2$.

Определим гибкость стержня по формуле (10):

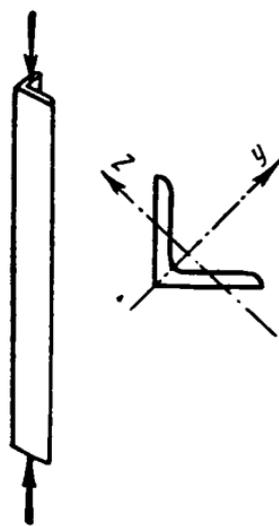
$$\lambda = \frac{l}{i_{\min}} = \frac{100}{0,98} = 102.$$

Гибкость стержня позволяет применить формулу Эйлера для вычисления критической силы. По формуле (9) находим

$$N_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2\,000\,000 \cdot 4,61}{100^2} = 9100 \text{ кг.}$$

Следовательно, допускаемая сила

$$N = \frac{N_{\text{кр}}}{k} = \frac{9100}{2} = 4550 \text{ кг.}$$



Фиг. 14.5. Продольный изгиб стержня произойдет в направлении оси y (в плоскости наименьшей жесткости).

§ 3. Влияние закреплений

В предыдущем параграфе рассмотрен случай свободно (или шарнирно) опертого стержня, названный основным случаем. В практике возможны и другие случаи закрепления концов стержня. Условия закрепления концов сильно влияют на сопротивление стержня продольному изгибу. Так, если вместо свободного опирания концов, когда концы могут свободно поворачиваться, осуществить защемление концов стержня, т. е. лишить их возможности поворачиваться, то критическая сила стержня возрастает, как увидим далее, в четыре раза. Если же теперь один из защемленных концов полностью освободить, то критическая сила для полученной консоли будет в 16 раз меньше, чем в случае защемления обоих концов (см. фиг. 14.9).

Рассмотрим применение формулы Эйлера в зависимости от закрепления концов стержня.

Случай консоли. На фиг. 14.6 показан стержень, один конец которого защемлен, а другой совершенно свободен. По достижении силой N критического значения стержень изгибается и верхний свободный конец стержня B вместе с грузом перемещается в сторону. Сечение A стержня (у заделки) при этом не поворачивается. Данный случай можно привести к основному (фиг. 14.4). Для этого сравним упругие линии стержней в обоих

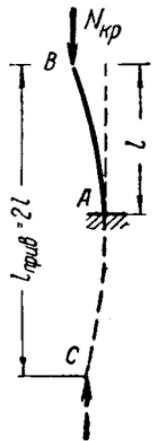
случаях. Замечаем, что в основном случае упругая линия образует полуволну, а в случае консоли — четверть волны (целой волной называется — см. фиг. 14.7 — совокупность гребня и ложбины). Если представить себе по другую сторону заделки такую же консоль (на фиг. 14.6 показано пунктиром), то получим в целом упругую линию, аналогичную упругой линии основного случая, для которого выше получена формула Эйлера.

Таким образом приходим к выводу, что формулу Эйлера (9) можем применить и в данном случае, но вместо длины l стержня здесь надо подставлять удвоенную длину, равную длине полуволны, которую назовем приведенной длиной $l_{\text{прив}}$ (см. фиг. 14.6):

$$N_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{l_{\text{прив}}^2}. \quad (11)$$

Соответственно, применяя формулу (5), следует гибкость λ вычислять как $\frac{l_{\text{прив}}}{i_{\text{min}}}$.

Случай обоих зашеченных концов. Рассмотрим также случай, когда оба конца стержня зашечены — не могут поворачиваться (фиг. 14.8). В этом случае упругая линия стержня при потере устойчивости образует целую волну. Обращаем внимание на то, что средний участок BC стержня (между точками перегиба B и C упругой линии) находится в условиях, аналогичных основному случаю. В самом деле, изгибающие моменты в точках перегиба B и C равны нулю, и если бы мы вставили в этих точках стержня шарниры, как показано на фиг. 14.8,б, то мы этим самым не изменили бы условий работы стержня. Как видим,



Фиг. 14.6. Случай консоли сводится к основному случаю (см. фиг. 14.4) при удвоенной длине стержня:

$$l_{\text{прив}} = 2l.$$



Фиг. 14.7.

участок BC является свободно опертым и для него может быть применена формула Эйлера (11), причем приведенная длина $l_{\text{прив}}$ (т. е. длина полуволны) в данном случае равна половине длины стержня. Критическая сила участка BC есть одновременно критическая сила всего стержня. Таким образом и в данном случае приходим к формуле (11), но следует помнить, что здесь $l_{\text{прив}} = \frac{l}{2}$.

Сравнение трех рассмотренных случаев. Мы рассмотрели три случая закрепления сжатого стержня, сопоставленные на фиг. 14.9, а, б и в: 1) случай свободного опирания концов стержня, 2) случай консоли и 3) случай защемления концов. Формула (11) является общей для всех случаев, если под $l_{\text{прив}}$ понимать длину полуволны. Часто приведенную длину $l_{\text{прив}}$ выражают посредством коэффициента μ :

$$l_{\text{прив}} = \mu l, \quad (12)$$

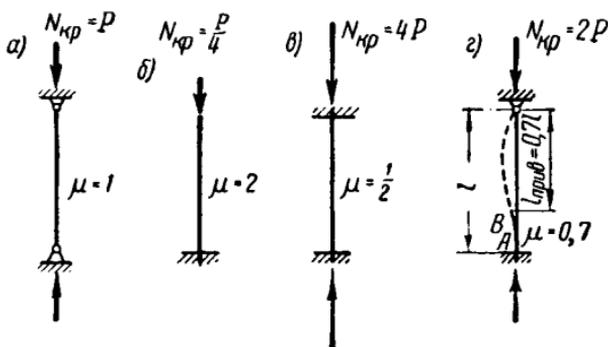
т. е. μ есть число, на которое нужно умножить действительную длину l стержня, чтобы получить длину полуволны в данном случае. Это число называется *коэффициентом длины стержня* (не следует его смешивать с коэффициентом поперечной деформации, также обозначенным выше — гл. III — через μ).

Формула Эйлера (11) получает вид

$$N_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{\mu^2 l^2}. \quad (13)$$

Фиг. 14.8. Случай защемленного стержня сводится к основному случаю при $l_{\text{прив}} = \frac{1}{2} l$.

В первом из рассмотренных случаев, очевидно, $\mu = 1$, во втором $\mu = 2$, в третьем $\mu = \frac{1}{2}$. Таким образом, если бы длины l стержней, показанных на фиг. 14.9, были одинаковы, то, как видно из формулы (13), при одинаковых жесткостях стержней критическая сила



Фиг. 14.9. Сравнение величин коэффициента длины μ и критической силы в различных случаях закрепления концов стержня.

во втором случае была бы в четыре раза меньше, а в третьем — в четыре раза больше, чем в основном случае.

Случай защемления и шарнира. Приведем еще случай, когда один конец стержня защемлен, а другой свободно

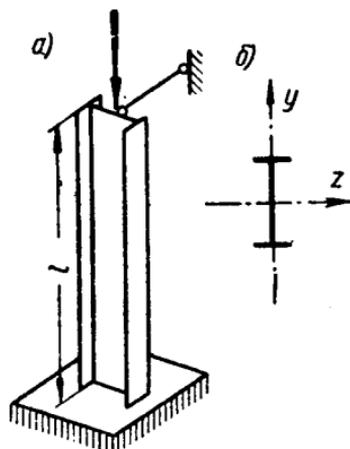
(шарнирно) оперт (фиг. 14.9,з). При потере устойчивости свободно опертый конец стержня (C) повернется, а заземленный конец (A) останется неподвижным. Упругая линия будет иметь точку перегиба B , где изгибающий момент равен нулю, т. е. равносильную шарниру. Таким образом участок BC упругой линии стержня находится в условиях свободного опирания, как в основном случае (§ 2) — образует полуволну. Длина этого участка и будет приведенной длиной $l_{\text{прив}}$ стержня в данном случае. Расчеты показывают, что она составляет приблизительно 0,7 полной длины стержня l . Итак, для определения критической силы в рассматриваемом случае будем пользоваться формулой Эйлера в виде (11) или (13), полагая $l_{\text{прив}} = \mu l = 0,7l$.

Отыскание наибольшей гибкости. Большинство практических случаев продольного изгиба стержней приводится к рассмотренным выше случаям. Конструкция может представлять собой и сочетание каких-либо из рассмотренных схем. В таких случаях иногда приходится предварительно выяснять плоскость наибольшей гибкости.

Например, стойка, заземленная внизу и подкрепленная сверху одним стержнем, как показано на фиг. 14.10, может изгибаться при потере устойчивости в двух направлениях — в плоскости y (см. фиг. 14.10,б) и в плоскости z . При этом в плоскости y она работает по схеме второй (консоли), а в плоскости z — по схеме четвертой (защемление и шарнир). Для того чтобы установить, какое из двух возможных направлений изгиба является более опасным, т. е. соответствующим меньшему значению критической силы, проще всего сравнить гибкости стержня в двух этих направлениях. Покажем на числовом примере решение данной задачи.

Пример 4. Пусть наша стойка (фиг. 14.10) выполнена из стандартного стального двутавра № 10, следовательно, радиусы инерции $i_z = 4,14$ см и $i_y = 1,52$ см и площадь сечения $F = 14,3$ см². Длина стойки $l = 3$ м. Сжимающая сила $N = 7$ т. Определить запас устойчивости.

Найдем гибкость λ_y в направлении y . Имеем $\mu = 2$ — приведенная длина стержня $l_{\text{прив}} = \mu l = 2 \cdot 300 = 600$ см. Следовательно, гибкость $\lambda_y = \frac{l_{\text{прив}}}{i_z} = \frac{600}{4,14} = 145$. Найдем также гибкость λ_z в направлении z . Приведенная длина $l_{\text{прив}} = 0,7l = 0,7 \cdot 300 = 210$ см. Гибкость $\lambda_z = \frac{210}{1,52} = 138$. Видим, что гиб-



Фиг. 14.10. Вследствие наличия верхнего прикрепляющего стержня гибкость стержня в направлении y может оказаться меньшей, чем в направлении z .

кость в плоскости y больше, чем гибкость в плоскости z . Следовательно, изгиб при потере устойчивости будет происходить в плоскости y .

Определим соответствующее критическое напряжение. По формуле (5) находим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 2\,000\,000}{145^2} = 940 \text{ кг/см}^2.$$

Действительное же напряжение

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{7000}{14,3} = 490 \text{ кг/см}^2.$$

Теперь можем вычислить искомый запас устойчивости. Запасом устойчивости k называем, как выше условлено, отношение $\frac{N_{кр}}{N}$ критической силы стержня к действительной силе или отношение $\frac{\sigma_{кр}}{\sigma}$ соответствующих напряжений (так как напряжения $\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{F}$ и $\sigma = \frac{N}{F}$ пропорциональны силам $N_{кр}$ и N). Получим $k = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma} = \frac{940}{490} = 1,92$.

З а к л ю ч е н и е. В настоящем параграфе исследованы условия применимости формулы Эйлера для стержня постоянного сечения в различных случаях опорных закреплений. Подытоживая результаты, можем сказать, что формула Эйлера для критического значения сжимающей силы в виде (11) или (13)

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l_{прив}^2} = \frac{\pi^2 EJ}{\mu^2 l^2}$$

является общей для всех рассмотренных случаев. При этом приведенная или расчетная длина $l_{прив}$ вообще не равняется длине стержня, а равна длине полуволны упругой линии стержня после потери устойчивости. В случае свободного (шарнирного) опирания концов стержня она совпадает с длиной стержня. Критическое напряжение выражается формулами:

$$\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

где гибкость $\lambda = \frac{l_{прив}}{i}$ вычисляется в соответствии с предпологаемой плоскостью изгиба при потере устойчивости, установленной на основании сравнения жесткостей и условий закрепления стержня в его главных плоскостях.

Формула Эйлера может применяться лишь при условии, что гибкость стержня $\lambda = \frac{l_{прив}}{i}$ не меньше определенного для

данного материала значения $\lambda_{\text{пред}}$, зависящего от предела пропорциональности материала.

Следует заметить, что действительные условия закрепления стержней часто отличаются от рассмотренных выше. Мы рассмотрели два идеальных типа закрепления конца стержня: 1) свободное или шарнирное опирание, когда опертый или прикрепленный конец может свободно поворачиваться, и 2) полное защемление или заделка, когда закрепленный конец совершенно не может поворачиваться. В действительности часто имеет место промежуточное между этими двумя случаями положение — так называемая упругая заделка или частичная заделка: поворот прикрепленного конца стержня стеснен, но не полностью. И в зависимости от жесткости заделки данный реальный случай может приближаться к какому-либо из указанных выше идеальных случаев закрепления. Так, стержни ферм обычно жестко прикрепляются своими концами к узлам фермы — привариваются или приклеиваются, но такое закрепление не является идеальным жестким защемлением, так как узлы могут упруго поворачиваться. Критическая сила частично заделанного стержня больше, чем свободно опертого, и меньше, чем защемленного.

В расчетной практике частично заделанные стержни рассчитывают обычно как свободно опертые, что служит в запас устойчивости. В некоторых же случаях применяют осередненные значения коэффициента длины μ .

Задачи. 1. Проверить общую устойчивость тонкостенной дуралюминовой стойки с жестко заделанными концами (фиг. 14.11, а). Диаметр стойки $d=50$ мм, толщина стенки $t=1$ мм. Длина стойки $l=2,5$ м. Модуль упругости материала $E=700\,000$ кг/см². Сжимающая сила $N=500$ кг.

Указание. Площадь сечения и момент инерции сечения тонкостенной стойки можно найти приближенно по формулам: $F=2\pi r t$, $J=\pi r^3 t$, где $r=\frac{d}{2}$ — радиус сечения. Отсюда ра-

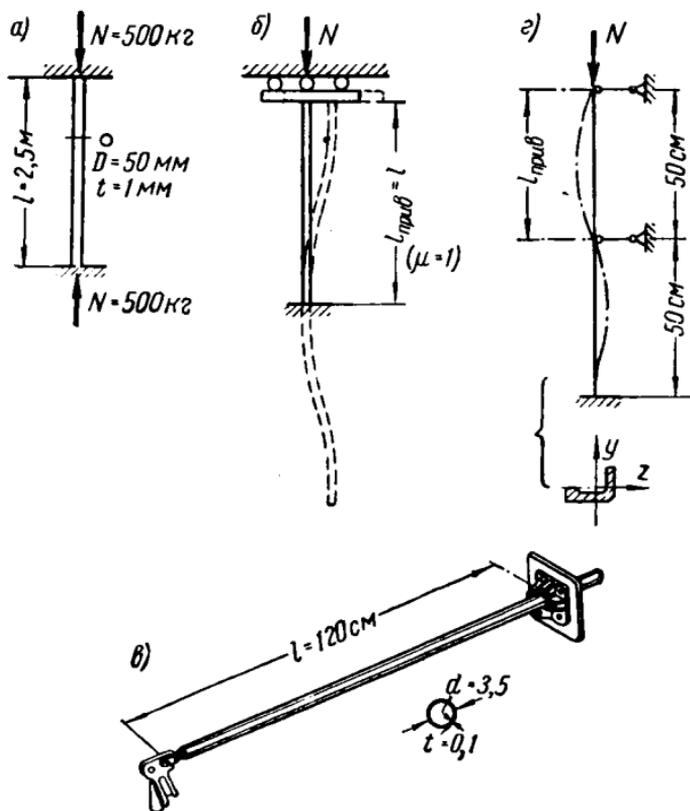
диус инерции $i=\sqrt{\frac{J}{F}}=\frac{r}{\sqrt{2}}=0,7r=0,35d$. **Ответ:** запас устойчивости равен 4,3.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что верхняя заделка имеет свободу перемещения в сторону (фиг. 14.11, б). **Указание.** Форма потери устойчивости при перемещении заделки вправо показана на фиг. 14.11, б пунктиром. Как видим, упругая линия образует полуволну (целую волну получим, достраивая вниз симметричную полуволну, как показано на рисунке). Следовательно, $\mu=1$ и приведенная длина $l_{\text{прив}}$ равна действительной длине стержня $l=2,5$ м. **Ответ:** запас устойчивости $k=1,07$ (т. е. устойчивость недостаточна).

3. Звено тяги управления (фиг. 14.11, в) к рулю высоты, представляющее собой дуралюминовую трубу диаметром 3,5 см с тол-

щиной стенки 0,1 см, передает сжимающее усилие. Определить критическую силу. *Указание.* Воспользоваться указанием к задаче 1 о вычислении радиуса инерции. *Ответ:* $N_{кр} = 735 \text{ кг}$.

4. Сжатый стержень подмоторной рамы длиной $l = 800 \text{ см}$, выполненный из трубы с отношением диаметра к толщине стенки $\frac{d}{t} = 32$, воспринимает сжимающее усилие и должен быть рассчитан на критическую силу $N_{кр} = 3200 \text{ кг}$. Определить диаметр



Фиг. 14.11. Задачи.

стержня, считая концы стержня закрепленными шарнирно. Материал — специальная сталь (хромансиль), $E = 2\,200\,000 \text{ кг/см}^2$, $\lambda_{пред} = 55$. *Указание.* Применить формулу Эйлера с последующей проверкой гибкости. *Ответ:* $d = 2,96 \text{ см}$.

5. Определить допускаемую сжимающую силу N для стержня общей длиной 1 м, выполненного из стандартного дуралюминового бульбугольника № 1 и закрепленного, как показано на фиг. 14.11,г. Нижний конец стержня заделан, а на другом конце и по середине в плоскости возможного изгиба z имеются шарнирные опоры. В плоскости y изгиб стеснен (например, обшивкой).

Данные профиля: $J_y = 0,333 \text{ см}^4$, $F = 0,64 \text{ см}^2$, $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = 0,72 \text{ см}$.

Запас устойчивости принять равным 1,8. Модуль упругости $E = 700\,000 \text{ кг/см}^2$. Указание. Опасным является верхний пролет, где приведенная длина $l_{\text{прив}}$ равняется длине пролета, тогда как в нижнем пролете приведенная длина равна 0,7 длины пролета; следовательно, расчет следует производить по приведенной длине верхнего пролета $l_{\text{прив}} = 50 \text{ см}$. Ответ: 500 кг.

§ 4. Расчет за пределом пропорциональности

Формула Эйлера справедлива, как указано выше, при больших гибкостях стержня ($\lambda > \lambda_{\text{пред}}$), когда критическое напряжение не превышает предела пропорциональности. При малых гибкостях стержня ($\lambda < \lambda_{\text{пред}}$) потеря устойчивости происходит при напряжениях, больших предела пропорциональности, и формула Эйлера дает здесь завышенные значения критической силы. Расчет на продольный изгиб за пределами пропорциональности, т. е. при малых гибкостях, производится при помощи эмпирических (опытных) данных. На основании многочисленных испытаний составлены формулы для критического напряжения в зависимости от гибкости, выражающие осередненные результаты испытаний для данного материала. Таких формул предложено весьма много. Мы приведем наиболее простую из них:

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{сж}} - a\lambda. \quad (14)$$

Здесь $\sigma_{\text{сж}}$ — напряжение сжатия, при котором разрушается данный материал (для пластичных материалов это — предел текучести, для хрупких — предел прочности, для тонкостенных стержней эта величина может определяться местной потерей устойчивости),

λ — гибкость стержня,

a — постоянная для данного материала величина, определяемая ниже.

Формула (14) справедлива, как уже сказано, для значений гибкости $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$. При $\lambda = 0$, т. е. при совсем коротком стержне, критическое напряжение $\sigma_{\text{кр}}$ совпадает с разрушающим напряжением $\sigma_{\text{сж}}$ для данного материала. При увеличении гибкости λ критическое напряжение, как видно из формулы (14), уменьшается. При $\lambda = \lambda_{\text{пред}}$ справедливы как формула Эйлера (5), так и формула (14). На этом основании можно определить коэффициент a в формуле (14). Подставляя в формулы (5) и (14) вместо λ значение $\lambda_{\text{пред}}$, мы должны получить одинаковые результаты:

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda_{\text{пред}}^2} = \sigma_{\text{сж}} - a\lambda_{\text{пред}}$$

Отсюда

$$a = \frac{\sigma_{\text{сж}}}{\lambda_{\text{пред}}} - \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\text{пред}}^3}. \quad (14')$$

Величина a зависит, как видим, только от материала стержня. Ниже даны значения $\sigma_{сж}$ и a , вычисленные по формуле (14), для некоторых материалов.

Материал	$E, \text{ кг/см}^2$	$\lambda_{\text{пред}}$	$\sigma_{сж}, \text{ кг/см}^2$	$a, \text{ кг/см}^2$
Дуралюмин	$7,0 \cdot 10^5$	60	3 500	26,5
Сталь мягкая (сталь 3)	$2,0 \cdot 10^6$	100	2 500	5,2
Хромансиль (специальная легированная сталь)	$2,1 \cdot 10^6$	50	11 000	54
Дерево	$10^5 - 1,2 \cdot 10^5$	60	400	1,2

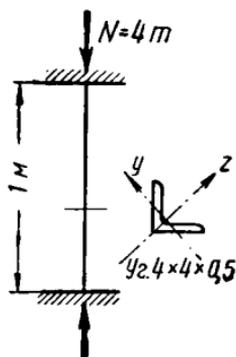
Следует заметить, что критическое напряжение для мягкой стали, определяемое описанным здесь методом, является заниженным. Более точной является формула, предложенная для мягкой стали Ясинским:

$$\sigma_{кр} = 3387 - 14,83\lambda. \quad (15)$$

Но, пользуясь этой формулой, следует помнить, что она справедлива до предела текучести σ_{τ} , который равен приблизительно 2500 кг/см^2 . Отсюда можно определить наименьшее значение λ , при котором справедлива формула (15). Подставляя в нее значение $\sigma_{кр} = 2500$, получим $2500 = 3387 - 14,83\lambda$, откуда $\lambda = 60$.

Следовательно, формула Ясинского (15) справедлива при гибкости λ , большей 60 и меньшей 100. При $\lambda < 60$ критическое напряжение стержней из мягкой стали считают равным пределу текучести $\sigma_{\tau} = 2500 \text{ кг/см}^2$.

Пример 5. Рассмотрим случай сжатия стержня, гибкость которого не позволяет применить формулу Эйлера. Требуется проверить устойчивость равнобокого стального угольника № 4 (толщина полки 5 мм) длиной $l = 1 \text{ м}$, концы которого зашпелены. Сжимающая сила $N = 4 \text{ т}$ (фиг. 14.12). Для данного профиля из



Фиг. 14.12.

таблиц имеем минимальный радиус инерции $i_{\text{min}} = i_y = 0,78 \text{ см}$, площадь профиля $F = 3,79 \text{ см}^2$. Приведенная длина стержня $l_{\text{прив}}$ в данном случае закрепления концов равна $\frac{l}{2} = 50 \text{ см}$. Следовательно,

но, гибкость $\lambda = \frac{l_{\text{прив}}}{i_{\text{min}}} = \frac{50}{0,78} = 64$. Гибкость нашего стержня, как

видим, меньше предельной гибкости $\lambda_{\text{пред}} = 100$ для мягкой стали и формула Эйлера здесь неприменима.

Воспользуемся формулой Ясинского (15). Получим

$$\sigma_{кр} = 3387 - 14,83 \cdot 64 = 2437 \text{ кг/см}^2.$$

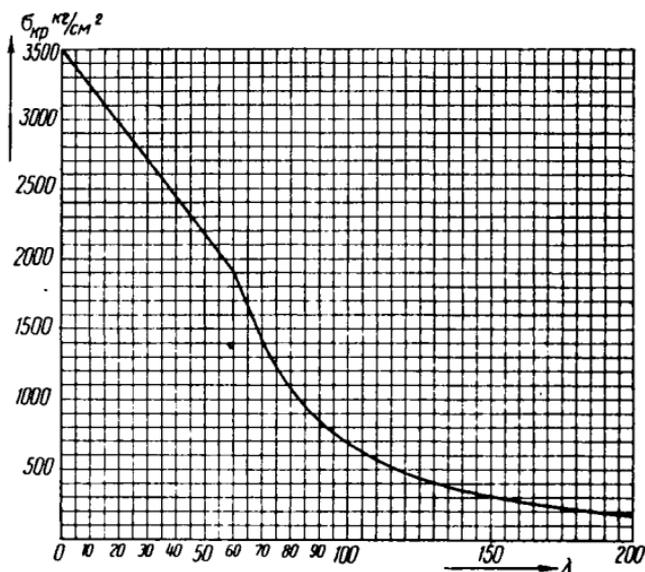
Действительное же напряжение

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{4000}{3,79} = 1050 \text{ кг/см}^2.$$

Искомый запас устойчивости найдем как отношение критического напряжения к действительному:

$$k = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma} = \frac{2437}{1050} = 2,32.$$

Графики. Критическое напряжение, определяемое по формулам (5) или (14), зависит для данного материала только



Фиг. 14.13. График зависимости критических напряжений $\sigma_{кр}$ от гибкости стержня $\lambda = \frac{l_{прив}}{i_{min}}$ (для дуралюмина марки Д1).

Сопротивление стержня уменьшается с увеличением его длины.

от гибкости стержня. С увеличением гибкости критическая сила уменьшается. На фиг. 14.13 показан график, называемый графиком критических напряжений, показывающий, как уменьшается критическое напряжение $\sigma_{кр}$ с увеличением гибкости λ стержня для дуралюмина марки Д1. По оси абсцисс отложены значения гибкости λ , по оси ординат — соответствующие значения критического напряжения $\sigma_{кр}$. В начале графика при $\lambda = 0$ критическое напряжение можно отождествить с разрушаю-

щим напряжением, равным пределу прочности материала при сжатии — 3500 кг/см^2 . При $\lambda = \lambda_{\text{пред}} = 60$ критическое напряжение, определенное по формуле Эйлера, равно 1920 кг/см^2 . Участок графика от $\lambda = 0$ до $\lambda = \lambda_{\text{пред}} = 60$ построен в виде прямой линии, т. е. в соответствии с формулой (14)¹.

Далее следует область применимости формулы Эйлера (5) и график изображается кривой линией (гиперболой)².

Как видно из графика, сопротивление весьма гибких стержней мало.

Например, при $\lambda = 200$ получим $\sigma_{\text{кр}} = 172 \text{ кг/см}^2$. Поэтому на практике редко применяются стержни, имеющие гибкость больше 150.

Графики критических напряжений, подобные приведенному, имеются и для других материалов.

Подбор сечения. Все предыдущие примеры и задачи, рассмотренные в настоящей главе, имели целью проверку устойчивости (т. е. определение запаса устойчивости) или определение грузоподъемности готовой конструкции, размеры которой известны. При проектировании сжатых стержней бывает нужно, наоборот, определить размеры поперечного сечения стержня по заданной нагрузке с заданным запасом устойчивости. В таких случаях обычно действуют методом подбора: сперва задаются размерами сечения произвольно и проверяют устойчивость стержня; если запас устойчивости оказывается меньше требуемого, то сечение нужно усилить, в противном случае, — наоборот, уменьшить. Путем проб удастся подобрать сечение, удовлетворяющее требуемому запасу устойчивости. При наличии графиков такие расчеты выполняются быстро.

Пример 6. Рассмотрим пример решения задачи подобного рода. Пусть требуется определить диаметр дуралюминового круглого стержня длиной $l = 30 \text{ см}$, сжатого силой $N = 2 \text{ т}$, закрепленного, как показано на фиг. 14.9,г. Запас устойчивости должен быть равен 2,5.

Примем диаметр d стержня произвольно, — например, равным 2 см . Радиус инерции круглого сечения равен $\frac{d}{4}$ (см.

пример 1), т. е. в данном случае $i = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ см}$. Приведенная

длина стержня l при заданных условиях закрепления равна $0,7l = 0,7 \cdot 30 = 21 \text{ см}$. Следовательно, гибкость стержня $\lambda =$

¹ Для пластичных материалов в пределах $0 < \lambda \leq 0,5 \lambda_{\text{пред}}$ критическое напряжение принимают также равным пределу текучести. В этом случае график на участке от $\lambda = 0$ до $\lambda_{\text{пред}}$ представляет ломаную линию.

² В случае сжатия тонкостенных профилей и стержней, имеющих начальную погибь или нагруженных с эксцентриситетом, следует пользоваться графиками, учитывающими указанные обстоятельства (см., например, Справочник авиаконструктора, т. III).

$= \frac{l_{\text{прив}}}{i} = \frac{21}{0,5} = 42$. Пользуясь графиком фиг. 14.13, находим соответствующее значение критического напряжения $\sigma_{\text{кр}} = 2390 \text{ кг/см}^2$. Умножив его на площадь сечения

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 2^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2,$$

получаем критическую силу $N_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = 2390 \cdot 3,14 = 7500 \text{ кг} = 7,5 \text{ т}$. Отсюда запас устойчивости $k = \frac{N_{\text{кр}}}{N} = \frac{7,5}{2} = 3,75$.

Второй подбор. Полученный запас устойчивости превышает требуемый. Следовательно, диаметр стержня нужно уменьшить. Примем $d = 1,7 \text{ см}$. Тогда будет $i = \frac{1,7}{4} = 0,425$ и $\lambda = \frac{21}{0,425} = 49,5$. По графику находим $\sigma_{\text{кр}} = 2200 \text{ кг/см}^2$ и отсюда $N_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = 2200 \frac{\pi 1,7^2}{4} = 5000 \text{ кг} = 5 \text{ т}$. Запас устойчивости $k = \frac{5}{2} = 2,5$ как раз равен требуемому.

Коэффициенты φ . Выше, на графике критических напряжений, наглядно представлено уменьшение критического напряжения $\sigma_{\text{кр}}$ при продольном сжатии стержня с увеличением его гибкости λ . Допускаемое напряжение при продольном сжатии $\sigma_{\text{доп}}$ всегда должно быть меньше критического:

$$\sigma_{\text{доп}} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{k}, \quad (16)$$

где k — коэффициент запаса устойчивости.

Следовательно, допускаемое напряжение также должно уменьшаться с увеличением гибкости стержня. Обозначим

$$\sigma_{\text{доп}} = \varphi [\sigma], \quad (17)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на сжатие для данного материала, т. е. постоянная величина, а φ — переменный в зависимости от λ коэффициент, меньший единицы, называемый коэффициентом уменьшения допускаемого напряжения при сжатии.

При $\lambda = 0$ коэффициент φ равен единице, но с увеличением гибкости λ он в соответствии с вышесказанным должен уменьшаться. Величину φ нетрудно вычислить. Из формулы (17) имеем $\varphi = \frac{\sigma_{\text{доп}}}{[\sigma]}$. Но по формуле (16) $\sigma_{\text{доп}} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{k}$. Следовательно,

$$\varphi = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{k [\sigma]}. \quad (18)$$

Задаваясь значениями коэффициента запаса устойчивости k , можно для любого значения гибкости λ найти $\sigma_{кр}$ и затем φ . При $\lambda=0$ величина k равна коэффициенту запаса прочности для данного материала, но при всех прочих значениях λ она имеет большую величину (см. § 1). Ниже, в табл. 12, даны значения коэффициентов φ для некоторых материалов в зависимости от λ , вычисленных в соответствии с техническими условиями на проектирование сооружений.

Имея коэффициенты φ , мы можем найти допускаемые напряжения для сжатых стержней, следовательно, расчеты на устойчивость стержней становятся подобными расчетам на прочность.

Пользование коэффициентами φ покажем на примерах.

Пример 7. Пусть требуется проверить устойчивость сжатого деревянного стержня прямоугольного сечения 4×5 см, концы которого свободно оперты. Длина стержня $l=60$ см. Сжимающая сила $N=3$ т. Допускаемое напряжение на сжатие материала $[\sigma]=200$ кг/см².

Определим гибкость стержня λ . Для этого предварительно найдем наименьший момент инерции $J_{\min} = \frac{5 \cdot 4^3}{12} = 26,7$ см⁴ и отсюда радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{26,7}{20}} = 1,16 \text{ см.}$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{60}{1,16} = 52.$$

Теперь отыщем в табл. 12 значение коэффициента φ , соответствующее найденному значению λ . В сокращенной табл. 12 нет нашего значения $\lambda=52$. Для $\lambda=50$ видим $\varphi=0,80$. При возрастании λ от 50 до 60 величина φ уменьшается до значения 0,71. Для $\lambda=52$ принимаем приблизительно $\varphi=0,78$.

Следовательно, допускаемое напряжение для нашего стержня $\sigma_{\text{доп}} = \varphi [\sigma] = 0,78 \cdot 200 = 156$ кг/см². Действительное же напряжение $\sigma = \frac{N}{F} = \frac{3000}{20} = 150$ кг/см² не превышает допускаемого, т. е. устойчивость обеспечена.

Составные стержни. В двух следующих примерах рассмотрены составные или сложные стержни.

Пример 8. Определим допускаемую нагрузку $N_{\text{доп}}$ на стойку с заделанными концами, составленную из двух стандартных стальных швеллеров № 12, соединенных друг с другом при помощи планок и раскосов (фиг. 14. 14,а). Швеллеры обращены спинками друг к другу (см. внизу поперечное сечение стойки),

**Коэффициенты φ уменьшения допускаемого напряжения
для сжатых стержней**

Гибкость стержня λ	Значения φ для				
	стали мягкой (2, 3, 4)	стали 5	стали повышен- ного каче- ства (СПК)	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,31	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,37	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Вычисляем гибкость стержня, учитывая, что расчетная (приведенная) длина стержня в данном случае закрепления концов его равна половине длины стержня

$$l_{\text{прив}} = \frac{10}{2} = 5 \text{ м}; \quad \lambda = \frac{l_{\text{прив}}}{i_{\text{min}}} = \frac{500}{4,75} = 105.$$

В табл. 12 находим соответствующее значение $\varphi = 0,56$. Следовательно, допускаемое напряжение для нашего стержня

$$\sigma_{\text{доп}} = \varphi [\sigma] = 0,56 \cdot 1400 = 742 \text{ кг/см}^2.$$

Отсюда допускаемая сжимающая нагрузка

$$N_{\text{доп}} = 742 \cdot 15,36 \cdot 2 = 24\,000 \text{ кг} = 24 \text{ т.}$$

Пример 9. Требуется подобрать размеры трубчатых стоек решетчатой колонны (фиг. 14. 14,б), заделанной нижним концом и нагруженной на другом свободном конце осевой сжимающей силой $N = 12 \text{ т}$. Высота колонны $l = 6 \text{ м}$. Расстояние между осями труб равно $a = 50 \text{ см}$. Материал — сталь СПК. Допускаемое напряжение на сжатие материала $[\sigma] = 2000 \text{ кг/см}^2$. Определить также свободную длину l_0 одной стойки (расстояние между поперечными планками).

Найдем прежде всего радиус инерции сечения колонны. Колонна состоит из четырех стоек (см. фиг. 14. 14,б внизу). Обозначим площадь сечения одной стойки через $F_{\text{ст}}$. Момент инерции сечения колонны приближенно (пренебрегая моментами инерции сечений стоек относительно их собственных центральных осей) можно выразить так:

$$J_z = J_y = F_{\text{ст}} \left(\frac{a}{2} \right)^2 4 = F_{\text{ст}} a^2.$$

Отсюда искомый радиус инерции сечения колонны

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{F_{\text{ст}} a^2}{4F_{\text{ст}}}} = \frac{a}{2} = 25 \text{ см.}$$

Теперь можем найти гибкость колонны $\lambda = \frac{l_{\text{прив}}}{i} = \frac{2 \cdot 600}{25} = 48$ и соответствующее значение φ (из табл. 12) приблизительно 0,84.

Следовательно, допускаемое напряжение

$$\sigma_{\text{доп}} = \varphi [\sigma] = 0,84 \cdot 2000 = 1680 \text{ кг/см}^2$$

необходимая площадь сечения колонны

$$F = \frac{N}{\sigma_{\text{доп}}} = \frac{12\,000}{1680} = 7,13 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения одной стойки

$$F_{\text{ст}} = \frac{7,13}{4} = 1,78 \text{ см}^2.$$

Подходящую трубу находим или при помощи таблиц или подбором. Например, взяв $D=39$ мм и $t=1,5$ мм, будем иметь

$$F_{ст} = \pi d_{ср} t = \pi \cdot 3,75 \cdot 0,15 = 1,77 \text{ см}^2.$$

Сечение трубы мало по сравнению с сечением колонны, и поэтому примененный приближенный прием вычисления момента инерции допустим. В том случае когда размеры сечения стойки значительны и, следовательно, нельзя пренебрегать моментом инерции его относительно собственной оси, данная задача решается путем подбора и последовательных приближений (см. следующий пример).

Остается определить свободную длину стойки l_0 . Найдем ее из условия равноустойчивости стойки и всей колонны, т. е. чтобы значения $\sigma_{доп}$ для отдельной стойки и для всей колонны целиком были одинаковы. А для этого нужно, чтобы гибкость стойки равнялась гибкости колонны:

$$\lambda_{ст} = \lambda,$$

но

$$\lambda_{ст} = \frac{l_0}{i_{ст}},$$

где $i_{ст}$ — радиус инерции сечения стойки. Следовательно, должно быть

$$\frac{l_0}{i_{ст}} = \lambda,$$

откуда

$$l_0 = \lambda i_{ст}. \quad (19)$$

Выше, в § 3 (см. указание к задаче 1), мы определяли радиус инерции сечения круглой тонкостенной трубы. Он равен $0,35D$. Следовательно, в нашем случае по формуле (19) получим такое максимальное допустимое расстояние между планками:

$$l_0 = \lambda \cdot 0,35D = 48 \cdot 0,35 \cdot 3,8 = 64 \text{ см}.$$

При увеличении этого расстояния может произойти местная потеря устойчивости отдельной стойки.

Пример 10. Пусть предыдущую колонну требуется спроектировать из угольников, как показано на фиг. 14.14,в, при габарите сечения колонны 20×20 см. Материал — сталь 3; допускаемое напряжение $[\sigma] = 1400$ кг/см².

Первый подбор. Сперва зададимся значением φ произвольно. Пусть $\varphi = 0,5$. Тогда будет

$$\sigma_{доп} = \varphi [\sigma] = 0,5 \cdot 1400 = 700 \text{ кг/см}^2$$

и, следовательно, необходимая площадь сечения

$$F_{необх} = \frac{N}{\sigma_{доп}} = \frac{12\,000}{700} = 17,1 \text{ см}^2,$$

а для одной стойки

$$F_{\text{ст}} = \frac{17,1}{4} = 4,28 \text{ см}^2.$$

В таблице равнобоких угольников находим профиль $4,5 \times 4,5 \times 0,5$, площадь которого равна $4,29 \text{ см}^2$. Момент инерции его относительно его центральной оси z (см. фиг. 14.14, в) $J_z = 8,00 \text{ см}^4$. Расстояние центра тяжести $m = 1,3 \text{ см}$. Момент инерции сечения угольника относительно центральной оси z_0 сечения всей колонны будет равен

$$J_z + F_{\text{ст}}(10 - m)^2.$$

И, следовательно, момент инерции сечения всей колонны, т. е. четырех угольников,

$$J_{z_0} = 4 [J_z + F_{\text{ст}}(10 - m)^2]. \quad (20)$$

Подставляя сюда числовые значения, найдем

$$J_{z_0} = 4 \cdot 330 = 1320 \text{ см}^4.$$

Отсюда радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{1320}{4 \cdot 4,29 \cdot 4}} = 8,79 \text{ см}$$

и гибкость

$$\lambda = \frac{l_{\text{прив}}}{i} = \frac{2 \cdot 600}{8,79} = 137.$$

Соответствующее значение φ из табл. 10:

$$\varphi = 0,37.$$

Следовательно, запроектированное в результате первого подбора сечение требует значения $\varphi = 0,37$ вместо принятого нами $0,5$. Допускаемое напряжение необходимо снизить.

Второй подбор. Второй подбор начнем с полученного значения $\varphi = 0,37$. Найдем

$$\sigma_{\text{доп}} = 0,37 \cdot 1400 = 520 \text{ кг/см}^2, \quad F_{\text{необх}} = \frac{12000}{520} = 23 \text{ см}^2,$$

$$F_{\text{ст}} = \frac{23}{4} = 5,75 \text{ см}^2$$

и соответствующий ближайший профиль $5,5 \times 5,5 \times 0,6$, для которого из таблиц $F_{\text{ст}} = 5,69 \text{ см}^2$, $J_z = 13,1 \text{ см}^4$, $m = 1,46 \text{ см}$. Подставляя эти значения в формулу (20), получим

$$J_{z_0} = 4 \cdot 425 = 1700 \text{ см}^4.$$

Отсюда

$$i = \sqrt{\frac{1700}{5,69 \cdot 4}} = 8,68 \text{ см}$$

и гибкость

$$\lambda = \frac{2 \cdot 600}{8,68} = 138.$$

Соответствующее значение $\varphi = 0,37$ равно исходному. Таким образом исходное значение φ и, следовательно, допускаемое напряжение $\sigma_{\text{доп}}$ во втором подборе принято правильно и за-проектированные угольники сечением $5,5 \times 5,5 \times 0,6$ см принимаются окончательно.

Свободная длина угольника (максимальное допустимое расстояние между планками) по формуле (19) $l = \lambda i_{\text{ст}} = 138 \cdot 0,97 = 134$ см.

Задачи 1. Определить, пользуясь графиком $\sigma_{\text{кр}}$, допускаемую сжимающую силу N для дуралюминового круглого стержня диаметром 2 см и длиной 50 см. Концы стержня жестко защемлены. Требуемый запас устойчивости $k = 2,5$. *Ответ:* $N = 2,75$ т.

2. Определить диаметр стержня в предыдущей задаче в случае силы $N = 2$ т. *Ответ:* 1,8 см.

3. При помощи таблицы коэффициентов φ подобрать равнобокий стальной угольник длиной 0,5 м на сжимающую нагрузку 500 кг при свободном опирании концов. Допускаемое напряжение на сжатие материала $[\sigma] = 1400$ кг/см². *Ответ:* профиль $2 \times 2 \times 0,4$; $F = 1,46$ см².

4. Решить пример 10 для значения нагрузки $N = 20$ т. *Ответ:* угольники $7,5 \times 7,5 \times 0,8$.

§ 5. Потеря устойчивости пластин

Критическое напряжение. В § 1 было указано, что тонкая обшивка крыла или фюзеляжа самолета при сжатии или сдвиге может потерять устойчивость плоской формы. Здесь приведем некоторые формулы для определения критического напряжения пластин, т. е. того напряжения сжатия или сдвига, при котором возможно выпучивание пластины. Эти формулы даются без доказательства, так как вывод их сложен. Криволинейная обшивка не рассматривается¹.

Критическое напряжение металлических пластин в пределах пропорциональности находится по формуле

$$\sigma_{\text{кр}} = k\sigma_0, \quad (21)$$

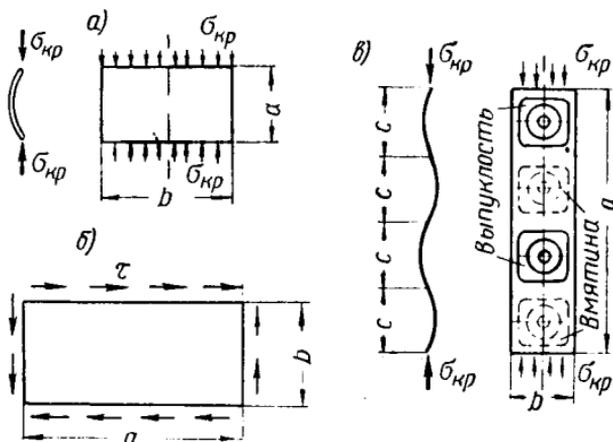
где

$$\sigma_0 = \frac{0,9E}{\left(\frac{b}{t}\right)^2}. \quad (22)$$

¹ Более подробные сведения о работе пластин см., например, в книге С. Н. Кан и И. А. Свердлов, Расчет самолета на прочность, Оборонгиз, 1945.

Здесь E — модуль упругости материала; b — ширина пластины (см. фиг. 14.15,а); t — толщина пластины; k — коэффициент¹, зависящий от 1) характера нагрузки, 2) условий закрепления пластины у ее краев и 3) отношения $\frac{a}{b}$ сторон пластины.

Равномерное сжатие в одном направлении. Рассмотрим сперва случай сжатия, показанный на фиг. 14.15,а. На два противоположные края пластины действуют в ее плоскости равномерно распределенные сжимающие силы. Два дру-



Фиг. 14.15. Работа подкрепленных пластин.

а — деформация короткой пластины при продольном сжатии; б — пластина нагружена сдвигающими напряжениями; в — деформация длинной пластины при продольном сжатии.

гие края пластины свободны от нагрузки. В таких условиях находится, например, обшивка крыла или фюзеляжа в сжатой зоне при изгибе.

Значения коэффициента k даны ниже для двух вариантов закрепления краев пластины: 1) свободного опирания, т. е. когда края пластины прикреплены, но имеют возможность поворачиваться, и 2) полного защемления пластины (действительные условия на краях пластины, входящей в состав некоторой конструкции, обычно являются промежуточными между двумя названными).

В первом случае коэффициент k зависит от отношения $\frac{a}{b}$ длины пластины к ее ширине следующим образом:

при $\frac{a}{b} > 1$, т. е., когда длина пластины a больше ширины b , коэффициент k с достаточной точностью всегда можно считать равным 4;

¹ Не смешивать с коэффициентом запаса устойчивости и прочности.

при $\frac{a}{b} < 1$ коэффициент k определяется по формуле $k = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$.

Для второго случая (полного заземления краев пластины) приводим таблицу отдельных значений k .

Таблица 13

$\frac{a}{b}$	0,5	1,0	1,5	2	3 и далее
k	18,3	10,1	8,3	7,3	7,0

Пример. Дана дуралюминовая пластина размерами (см. фиг. 14.15,а) $a=50$ см, $b=25$ см, толщиной $t=1,5$ мм, края которой свободно оперты. Определить сжимающее напряжение, при котором пластина теряет устойчивость. Модуль упругости материала $E=700\,000$ кг/см².

Определим σ_0 по формуле (22):

$$\sigma_0 = \frac{0,9E}{\left(\frac{b}{t}\right)^2} = \frac{0,9 \cdot 700\,000}{\left(\frac{25}{0,15}\right)^2} = 22,7 \text{ кг/см}^2.$$

Коэффициент k в данном случае равен 4. Следовательно, искомое критическое напряжение по формуле (21)

$$\sigma_{кр} = k \cdot \sigma_0 = 4 \cdot 22,7 = 90,8 \text{ кг/см}^2.$$

Задача 1. Решить предыдущую задачу для случая, когда $a=25$, а $b=50$ см (т. е. нагрузка действует на длинный край пластины). *Ответ:* $\sigma_{кр}=35,5$ кг/см².

Сдвиг. При кручении крыла или фюзеляжа (а также и при поперечном изгибе) обшивка работает на сдвиг. На фиг. 14.15,б показана пластина, нагруженная касательными усилиями сдвига. Критическое касательное напряжение $\tau_{кр}$, т. е. напряжение, при котором пластина утрачивает устойчивость плоской формы и начинает морщиться (приобретает волнообразный вид), определяется по формуле, аналогичной формуле (21):

$$\tau_{кр} = k \cdot \sigma_0, \quad (23)$$

где σ_0 выражается попрежнему формулой (22), причем под b понимается всегда меньшая сторона пластины.

Коэффициент k в формуле (23) определяется при свободно опертых краях пластины по формуле

$$k = 5,6 + 3,78 \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

При заземленных концах коэффициент k имеет значения, приведенные в табл. 14.

Таблица 14

$\frac{a}{b}$	1	2	3	∞ (бесконечно длинная пластина)
k	15,8	11,7	9,3	9,0

Сжатие и сдвиг одновременно. В случае если обе рассмотренные выше нагрузки действуют совместно, критическое касательное напряжение определяется также по формуле (23), но коэффициент k зависит от нормального напряжения σ , действующего на пластину. Если напряжение σ приложено к меньшим сторонам пластины, то при свободно опертых краях пластины коэффициент k определяется в рассматриваемом случае по формуле

$$k = 5,6 \sqrt{1 - \frac{\sigma}{4\sigma_0}}$$

Необходимо помнить, что и эта формула и формулы, приведенные выше для сжатых пластин и пластин, испытывающих сдвиг, справедливы лишь при условии, что напряжения (соответственно сжатия, сдвига и приведенные) не превосходят предела пропорциональности.

Другие случаи нагружения и закрепления пластин, а также работу пластин за пределом пропорциональности мы здесь не рассматриваем. Значения k в других случаях нагрузки и опорных условий можно найти в «Справочнике авиаконструктора», т. III.

Деформация. Потерявшая устойчивость пластина выпучивается. При этом прикрепленные края пластины остаются, конечно, прямыми, а перемещается средняя часть пластины, образуя выпуклость или вмятину. На фиг. 14.15,а показана пластина, потерявшая устойчивость при сжатии, когда отношение размеров $\frac{a}{b}$ пластины мало (меньше $\sqrt{2}=1,41$). В этом случае сечение пластины после потери устойчивости представляется одной полуволной (на фигуре слева).

При большом отношении $\frac{a}{b}$ (большем $\sqrt{2}$) в продольном направлении образуются две или несколько полуволн (фиг. 14.15,б), обязательно целое число, причем такое, чтобы длина полуволны c по возможности приближалась к ширине b пластины. Если a кратно b (т. е. b укладывается в a целое число раз), то длина полуволны c равна ширине b пластины,

т. е. пластина подразделяется на квадратные поля. При этом выпуклые поля чередуются с вмятыми.

Напряжения, при которых возможно появление описанной деформации пластин, называются, как уже было указано, критическими. Они не разрушают пластину, как это было в случае стержня, так как края пластины прикреплены к жесткому обрамлению. Пластина может нести нагрузку и большую критической.

Редукционные коэффициенты. Рассмотрим панель (фиг. 14.2,а), подвергаемую сжатию. До того как пластина потеряет устойчивость, она деформируется так же, как стрингеры, и, если материал пластины и стрингеров одинаков, то напряжения в пластине и стрингерах также будут одинаковы:

$$\sigma = \frac{N}{F}, \text{ где } N \text{ — общая сжимающая сила, а } F = F_{\text{пл}} + F_{\text{стр}} \text{ —}$$

площадь поперечного сечения панели, состоящая из площади $F_{\text{пл}}$ сечения пластины и площади $F_{\text{стр}}$ сечений стрингеров.

После потери устойчивости работоспособность пластины ослабляется; это учитывается так называемым редуционным коэффициентом φ^* , меньшим единицы, вводимым при площади $F_{\text{пл}}$ сечения пластины при вычислении общей расчетной площади F' сечения панели:

$$F' = \varphi F_{\text{пл}} + F_{\text{стр}}.$$

Иными словами, считают, что площадь сечения пластины как бы уменьшилась.

Разделив сжимающую силу N на площадь F' (уменьшенную по сравнению с действительной), найдем напряжение σ' в стрингерах после потери устойчивости пластиной: $\sigma' = \frac{N}{F'}$. Напряжение

в пластине (среднее) будет равно $\varphi \sigma'$.

Величина редуционного коэффициента φ зависит от размеров и материала пластины и также от нагрузки — от степени превышения критического напряжения. Для определения φ предложено большое количество формул, которые можно найти в справочной литературе.

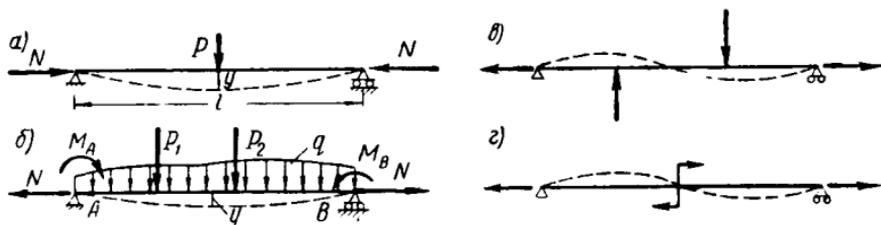
Задачи. 1. Определить критическое напряжение $\tau_{\text{кр}}$ пластины, работающей на сдвиг, размерами $400 \times 250 \times 1,5$ мм. Материал — дуралюмин ($E = 700\,000$ кг/см²). Края пластины свободно оперты. *Ответ:* $\tau_{\text{кр}} = 160$ кг/см².

2. Определить $\tau_{\text{кр}}$ в предыдущей задаче при условии, что имеются также сжимающие напряжения $\sigma = 60$ кг/см², приложенные к меньшим сторонам пластины. *Ответ:* $\tau_{\text{кр}} = 74$ кг/см².

* Не следует смешивать его с коэффициентом уменьшения допускаемого напряжения при сжатии стержней, также обозначаемым через φ — см. предыдущий параграф.

§ 6. Продольно-поперечный изгиб стержней

Выше в данной главе рассмотрен продольный изгиб стержней под действием осевых сжимающих сил. В практике часты случаи, когда стержень не только сжат продольными силами, но и испытывает одновременно изгиб поперечной нагрузкой. Так, пояса лонжеронов и нервюр не только работают как составные части ферм на продольные растягивающие или сжимающие усилия, но могут воспринимать также местные изгибающие аэродинамические нагрузки, передающиеся им от примыкающей обшивки. Пояса балки с тонкой стенкой, потерявшей устойчивость, нагружены, помимо сжимающих или растягивающих поясных усилий, также изгибающими усилиями натяжения обшивки (см. далее пример).



Фиг. 14. 16.

a — при наличии продольных сжимающих сил N прогиб y по середине превышает его значение $\frac{Pl^3}{48EJ}$, вызываемое только поперечной нагрузкой P ; *б* — при нагрузке, действующей в одну сторону, прогиб балки вычисляется по формуле (24) или в случае сжатия по формуле (25); *в* и *г* — при нагрузках, вызывающих прогиб в разные стороны, формулы (24) и (25) неприменимы.

На фиг. 14. 16 показан стержень, нагруженный по середине сосредоточенной силой P , изгибающей стержень, и продольными силами N , сжимающими его. Предположим сперва, что приложена только сила P , а силы N отсутствуют. Тогда прогиб y будет равен, как известно, $\frac{Pl^3}{48EJ}$, а максимальный из-

гибающий момент — $\frac{Pl}{4}$. Теперь приложим также продольные силы N (сила N не должна, конечно, превосходить критического значения $N_{кр}$ — см. § 1). Очевидно, они создают дополнительный изгибающий момент в каждом сечении балки и вызовут поэтому увеличение прогиба y . Если бы продольные силы N были не сжимающими, а растягивающими, то они, наоборот, уменьшали бы изгибающие моменты от поперечной нагрузки и, следовательно, уменьшали бы прогиб балки.

Случай совместного сжатия или растяжения и изгиба представляет собой явление слишком сложное. Поэтому мы лишь приведем здесь без доказательства одну приближенную формулу, позволяющую в наиболее часто встречающихся случаях нагрузки определить прогиб и, следовательно, изгибающие моменты в сечениях растянуто- и сжато-изогнутых балок.

Пусть имеем простую балку, нагруженную поперечной нагрузкой, изгибающей балку (фиг. 14. 16, б): сплошной нагрузкой постоянной или переменной интенсивности q , сосредоточенными силами P_1, P_2 , сосредоточенными парами M_A и M_B , приложенными к концам балки. Эти нагрузки могут быть произвольными с одним лишь ограничением: они изгибают балку так, что ее упругая линия не имеет точек перегиба (см. далее примечание). Кроме изгибающих нагрузок, имеется продольная сила N , растягивающая или сжимающая; на фиг. 14. 16, б она показана растягивающей.

Прогиб такой балки выражается формулой

$$y = \frac{y_0}{1 + \frac{N}{N_3}}, \quad (24)$$

где y_0 — прогиб, вызываемый только поперечной нагрузкой (без продольных сил N);

$N_3 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ — величина, вычисляемая по формуле Эйлера независимо от гибкости стержня, называемая эйлеровой силой (она имеет смысл критической силы только при сжатии).

Здесь J — момент инерции сечения стержня в плоскости изгиба.

В случае сжатия сила N меняет знак и вместо формулы (24) будем иметь

$$y = \frac{y_0}{1 - \frac{N}{N_3}}. \quad (25)$$

Зная прогиб балки y в любом сечении, можно определить изгибающий момент в этом сечении балки, вызываемый продольной силой N . Он, очевидно, равен произведению Ny .

В случае растяжения сила N , как мы уже отмечали, уменьшает изгибающий момент, вызываемый поперечной нагрузкой. Формула для вычисления окончательного изгибающего момента имеет вид

$$M = M_0 - Ny, \quad (26)$$

где M_0 — изгибающий момент от действия только поперечной нагрузки.

В случае сжатия продольная сила увеличивает изгибающий момент. Полный изгибающий момент выразится так:

$$M = M_0 + Ny. \quad (27)$$

Примечание. Если поперечная нагрузка изгибает балку так, что она обращена выпуклостью не в одну сторону, а имеет точку перегиба (см., например, фиг. 14.16, в и г), то изложенный метод расчета к целой балке неприменим. В этом случае следует рассматривать часть балки, соответствующую одной полуволне, и определять величину N_3 , исходя из длины соответствующей части балки.

Пользуясь уравнениями (26) или (27), соответственно нагружению балки, следует установить величину M_{\max} и затем произвести расчет данного сечения при одновременном действии изгибающего момента (с учетом момента от сжимающей силы) и продольной силы. Легко показать, что в данном случае напряжения не пропорциональны нагрузке.

Пример. Стрингер состоит из двух бульбовых угольников № 1, склепанных стенками (см. фиг. 14.17, а). Момент инерции сечения одного угольника относительно центральной оси $x-x$ (фиг. 14.17, б) равен $0,333 \text{ см}^4$; площадь поперечного сечения $F = 0,64 \text{ см}^2$. Материал — дуралюмин ($E = 7 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$).

На участке длиной $l = 50 \text{ см}$ между двумя нервюрами стрингер сжат силой $N = 375 \text{ кг}$ и нагружен сплошной равномерно распределенной нагрузкой погонной интенсивностью $q = 0,5 \text{ кг/см}$. Требуется определить наибольшее напряжение в стрингере на данном участке его, считая концевые сечения участка свободно поворачивающимися. Опасное сечение, очевидно, будет по середине, так как именно здесь имеют место и наибольший момент от поперечной нагрузки и наибольший прогиб.

Определим прогиб по середине рассматриваемого пролета по формуле (25). Для этого сперва вычислим y_0 .

Прогиб y_0 простой балки, вызываемый равномерно распределенной нагрузкой, по середине пролета равен $\frac{5ql^4}{384EJ}$ (см. пример 4 в § 4 гл. XI). Следовательно, в нашем случае

$$y_0 = \frac{5 \cdot 0,5 \cdot 50^4}{384 \cdot 7 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 0,333} = 0,0872 \text{ см.}$$

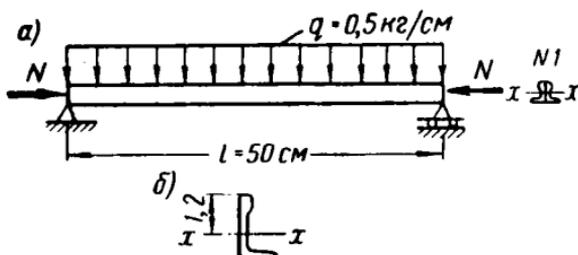
Вычисляем также N_9 :

$$N_9 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 0,333}{50^2} = 1850 \text{ кг.}$$

И, следовательно,

$$y = \frac{y_0}{1 - \frac{N}{N_9}} = \frac{0,0872}{1 - \frac{375}{1850}} = 0,11 \text{ см.}$$

Теперь можем определить наибольший изгибающий момент в стрингере по формуле (27). Предварительно вычислим значение изгибающего



Фиг. 14. 17.

момента M_0 только от поперечной нагрузки. Он, как нам известно, равен $\frac{ql^2}{8}$, т. е. $M_0 = \frac{0,5 \cdot 50^2}{8} = 156 \text{ кгсм}$. Следовательно,

$$M = M_0 + Ny = 156 + 375 \cdot 0,11 = 156 + 41 = 197 \text{ кгсм.}$$

Наибольшее напряжение имеет место в верхней точке профиля. Здесь суммируются напряжения равномерного сжатия и изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M}{J} z_{\max},$$

где z_{\max} — расстояние от центральной оси до верхнего края сечения.

Расстояние z_{\max} (см. фиг. 14. 17, б) равно $1,2 \text{ см}$. Таким образом

$$\sigma_{\max} = \frac{375}{2 \cdot 0,64} + \frac{197}{2 \cdot 0,333} \cdot 1,2 = 293 + 355 = 648 \text{ кг/см}^2.$$

Задача. Решить предыдущую задачу при наличии еще сосредоточенной силы $P = 10 \text{ кг}$ по середине пролета. *Ответ:* $y = 0,179 \text{ см}$; $M = 348 \text{ кгсм}$; $\sigma_{\max} = 920 \text{ кг/см}^2$.

Контрольные вопросы

1. Что называется критической силой и критическим напряжением?
2. В чем заключается расчет на устойчивость? Сравнить с расчетом на прочность.
3. Какая разница между общей и местной потерей устойчивости?
4. Напишите формулу Эйлера в двух видах и объясните, что такое приведенная длина, гибкость.
5. Чему равна приведенная длина в различных случаях закрепления?
6. Укажите пределы применимости формулы Эйлера для различных материалов. От чего зависит значение $\lambda_{\text{пред}}$?
7. Как производится расчет сжатых стержней на устойчивость за пределами пропорциональности?
8. Объясните пользование графиками $\sigma_{\text{кр}}$ и таблицей коэффициентов φ ?
9. Как производится подбор сечения сжатого стержня?
10. Как достигается равная местная и общая устойчивость в составных стержнях?
11. От чего зависит критическое напряжение прямоугольной пластины с прикрепленными краями?
12. Является ли оно разрушающим?
13. Что называется редуцирующим коэффициентом?
14. В каком случае изгиб называется продольно-поперечным?

Глава XV

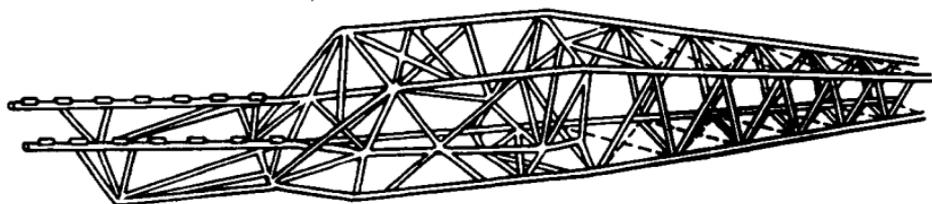
ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФЕРМЫ

§ 1. Понятие пространственной фермы

В главе II рассматривались плоские фермы — геометрически неизменяемые системы из шарнирно соединенных стержней, все оси которых лежат в одной плоскости. Такие конструкции способны воспринимать только нагрузку, лежащую в плоскости фермы. В настоящей главе рассматриваются пространственные фермы — неизменяемые системы, составленные из стержней, оси которых не лежат в одной плоскости. Соединение концов стержней в узлах также предполагается шарнирным, т. е. допускающим полную свободу поворота. В действительности узлы обычно не шарнирны, а жестки: сварные или клепаные. Поэтому излагаемый метод расчета является приближенным. Однако в большинстве случаев, как показывают более точные расчеты, допущение о шарнирности узлов является приемлемым при определении усилий N в стержнях, так как не вносит значительной погрешности в определение усилий.

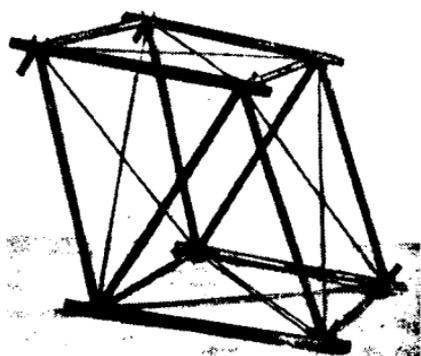
Геометрическая неизменяемость есть один из основных признаков фермы и необходимое свойство ее как инженерной конструкции. В следующем параграфе мы подробнее остановимся на том, как обеспечить геометрическую неизменяемость пространственной стержневой системы с шарнирными узлами. Здесь укажем только, что геометрически неизменяемой называется система, которая деформируется только вследствие деформации ее составных частей как упругих тел. Кинематические относительные перемещения элементов отсутствуют. При малых нагрузках деформация фермы также должна быть малой. Как указывалось, ферма обладает геометрической неизменяемостью в предположении шарнирности всех узлов. Таким образом жесткость узлов, существующая в действительности, является дополнительным фактором, способствующим неизменяемости системы. Пространственные фермы часто существуют, как далее указано, в комбинации с другими видами строительных систем — рамами и оболочками. На фиг. 15. I изображена схема каркаса ферменного фюзеляжа.

На фиг. 15. 2,*а* представлен отдельно один отсек ферменного фюзеляжа. На фиг. 15. 2,*б* — подмоторная установка под звездообразный двигатель. На фиг. 15. 3,*а* — ферма подъемного крана. На фиг. 15. 3,*б, в и г* даны другие примеры пространственных систем.

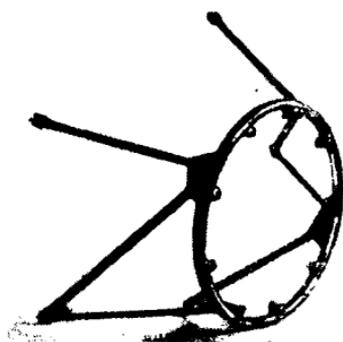


Фиг. 15. 1. Пространственная ферма фюзеляжа самолета ¹.

Пространственная ферма гораздо чаще встречается в реальных конструкциях, чем плоская. Плоская ферма очень редко применяется самостоятельно. Обычно она является составной частью пространственной фермы. Так, две плоские фермы



а



б

Фиг. 15. 2.

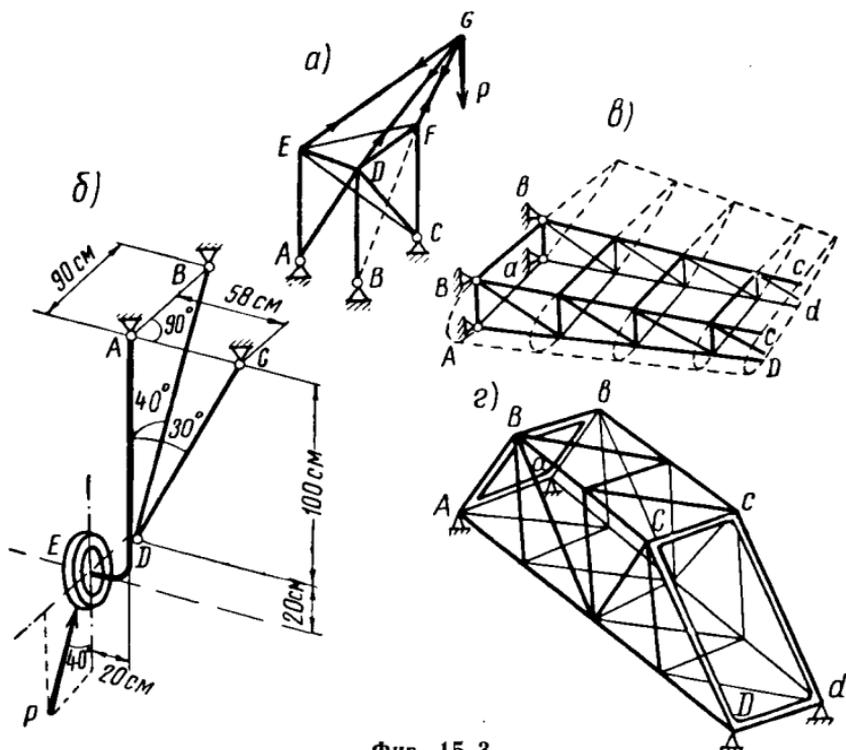
а — отсек ферменного фюзеляжа; узлы частью сварные, частью (у расчалок) — шарнирные; *б* — мотоферма; узлы у кольца сварные, прикрепление фермы шарнирное.

$ABCD$ и $abcd$ (фиг. 15. 3,*г*) моста связываются поперечными связями в пространственную ферму, чтобы мост был в состоянии воспринимать боковые нагрузки (ветер) и имел необходимую устойчивость. Два ферменных лонжерона $ABCD$ и $abcd$ (фиг. 15. 3,*в*), каждый из которых в отдельности есть плоская ферма, соединяются при помощи нервюр и обшивки в комбинированную пространственную систему коробки крыла, состоящую

¹ Чертеж заимствован из книги В. С. Чулкова «Конструкция и прочность самолетов», изд. ВВИА им. Жуковского, 1948.

из стержней и пластин, которую также можно назвать фермой, где некоторые стержни заменены пластинами. Основные самолетные конструкции представляются такими пространственными комбинациями стержней и оболочек.

Широко распространены также комбинированные пространственные системы, где объединяются рамные и ферменные элементы; первые обладают жесткими узлами и работают преимущественно на изгиб, вторые работают на осевое растяжение или сжатие. На фиг. 15.3, б показан один из простейших примеров



Фиг. 15.3.

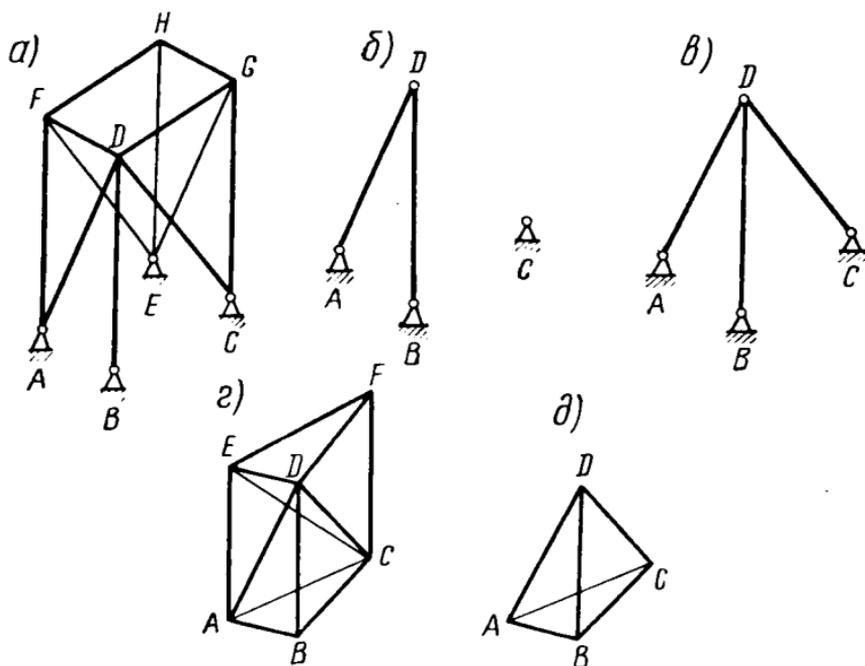
а — ферма подъемного крана; б — пространственная система шасси; в — стержневой каркас крыла самолета; г — ферма балочного моста с ездой по низу.

такой конструкции. Стержни ADE , BD и CD шасси, не лежащие в одной плоскости, образуют неизменяемую пространственную систему (см. следующий параграф); нога ADE работает на сжатие, изгиб и кручение (в опоре A предполагается закрепление, препятствующее вращению стойки AD вокруг ее оси), а подкосы BD и CD , присоединенные к ноге и к опорам шарнирно, работают только на центральное растяжение или сжатие. Мостовые фермы также содержат в себе рамы. Так, прямоугольники $ABba$ и $CDdc$ (фиг. 15.3, г), которые по условиям эксплуатации конструкции не могут содержать диагоналей (раскосов), должны быть выполнены как жесткие рамы.

§ 2. Образование простейшей пространственной фермы

Одной из важнейших задач строительной механики является анализ геометрической неизменяемости строительных систем. В число методов такого анализа входит исследование образования системы. Знание способов образования неизменяемых систем важно также и для конструктора.

Прикрепленная ферма. Рассмотрим образование пространственной фермы, изображенной на фиг. 15.4,а. Начнем



Фиг. 15.4. Образование простейших пространственных ферм.

а — пример простейшей прикрепленной фермы; б, в — начало ее образования; г — пример простейшей свободной фермы; д — начало ее образования.

с того, что мы располагаем необходимым нам количеством точек, принадлежащих какой-либо жесткой системе, следовательно, расстояния между ними не могут изменяться (их должно быть не меньше трех) — см. точки A , B , C и E . Эти точки могут быть опорами, заделанными в землю или прикрепленными к какой-либо другой неизменяемой системе. Как увидим далее, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой. Прикрепим сперва два стержня — AD и BD (фиг. 15.4,б), соединенные общим узлом D . Получим геометрически изменяемую систему, механизм. Так как узлы шарнирны, оба стержня могут поворачиваться вокруг точек A и B и, следовательно, точка D может вращаться вокруг оси AB . При этом движении будет из-

меняться ее расстояние от третьей неподвижной точки C , если последняя не лежит на оси AB . Чтобы получить неизменяемую систему, прикрепим точку D к точке C , вводя еще один стержень CD (см. фиг. 15. 4, $в$). Теперь расстояние точки D от точки C не может изменяться и, следовательно, точка D будет прикреплена неподвижно.

Полученная геометрически неизменяемая система из трех стержней, прикрепляющих новую точку D к имевшимся ранее неподвижным точкам A , B и C , является первичной простейшей пространственной фермой. К точке D может быть приложена сила, направленная как угодно, она будет восприниматься полученной жесткой системой из трех стержней.

Как видим, для неподвижного прикрепления узла в пространстве понадобились три стержня, не лежащие в одной плоскости. Следовательно, для прикрепления следующего узла также понадобятся три стержня. При этом уже имеющийся неподвижный узел может быть использован как опора, наравне с точками A , B , C и E . При помощи стержней AF , DF и EF (фиг. 15. 4, $а$) прикрепляем узел F . Точки A , D и E не лежат на одной прямой и связанная с ними стержнями точка F будет неподвижной, так же как и точки A , D и E . Далее к точкам C , D и E прикрепим узел G при помощи стержней CG , DG и EG и, наконец, узел H — при помощи стержней EH , FH и GH .

Мы получили жесткую стержневую систему с шарнирными узлами, покоящуюся на основании из неподвижных точек (A , B , C и E), так называемую прикрепленную ферму. Все точки этой системы лишены свободы перемещения во всех направлениях. Если к системе приложить нагрузку, то система будет деформироваться, и все точки ее (или часть их) получат перемещения, но только вследствие податливости материала. Если напряжения в материале при этом не будут превышать предела упругости, то деформация системы будет мала и исчезнет после снятия нагрузки.

Неподвижность прикрепленной фермы зависит от неподвижности исходных опорных точек (A , B , C и E). Если какая-либо из них или они все будут перемещаться, то это будет вызывать соответствующее перемещение всей системы. Если какую-либо из опорных точек убрать, то вся система или часть ее становится подвижной.

В процессе проделанного выше анализа построения фермы мы видели, что она образована путем последовательного присоединения каждого нового узла тремя новыми стержнями, не лежащими в одной плоскости. Такая ферма называется *простейшей пространственной фермой*, так же как простейшей плоской фермой называется ферма, образуемая путем последовательного присоединения каждого нового узла двумя стержнями. Из принципа образования простейшей прикрепленной фермы следует и зависимость между количеством стержней и узлов ее. Очевидно,

необходимое количество стержней равняется утроенному количеству присоединяемых узлов:

$$s=3n, \quad (1)$$

где s — количество стержней, а n — количество узлов фермы, не считая исходных опорных точек (точки A, B, C и E в рассмотренном примере). Количество прикрепленных узлов в нашем примере равно четырем (узлы D, F, G, H), а потребовавшееся для их прикрепления количество стержней равно 12. Система, изображенная на фиг. 15.3,а, есть также простейшая ферма. Она образуется путем последовательного прикрепления узлов D, E, F и G , каждого тремя стержнями (не лежащими в одной плоскости). Количество стержней также равно 12.

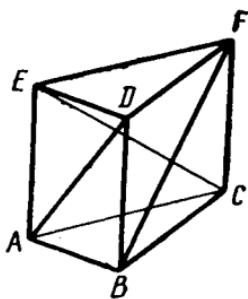
Формула (1) справедлива для всякой прикрепленной фермы. Заменяв, например, раскос DC (фиг. 15.3,а) раскосом BF , как показано пунктиром, будем иметь уже не простейшую, а преобразованную ферму (см. гл. II). Ее число стержней также 12.

С в о б о д н а я ф е р м а. Теперь рассмотрим так называемую свободную ферму, образование которой не связано с опорами. Основанием простейшей свободной пространственной фермы служит плоский треугольник. Пусть мы имеем треугольник ABC (фиг. 15.4,з), составленный из трех стержней AB, BC и CA , соединенных шарнирно концами друг с другом. Такой треугольник является неизменяемой системой. К вершинам этого треугольника присоединим при помощи трех стержней AD, BD и CD точку D , не лежащую в плоскости треугольника ABC . Получим неизменяемую пространственную систему (фиг. 15.4,д), состоящую из четырех узлов и шести стержней в виде пирамиды с четырьмя гранями — тетраэдр, являющийся первичной простейшей пространственной свободной фермой. Далее, как видим (фиг. 15.4,з), к тетраэдру $ABCD$ при помощи трех стержней AE, CE и DE неподвижно прикрепляется точка E . Затем стержнями CF, DF и EF также присоединяется точка F . Следовательно, система в целом является неизменяемой, т. е. фермой.

Такая система может быть нагружена нагрузками любого направления и будет им сопротивляться в пределах прочности и устойчивости составляющих ее стержней. Полученная ферма неизменяема независимо от опорных закреплений и поэтому называется свободной фермой. Она может быть поставлена на опоры или присоединена к другой ферме, либо работать без опор (в воздухе), в случаях когда нагрузка является уравновешенной.

Фермы, подобные описанной выше, полученные путем присоединения к исходному тетраэдру каждого нового узла тремя стержнями, не лежащими в одной плоскости, называются *простейшими свободными фермами*. Нетрудно установить зависимость между количеством стержней и узлов свободной фермы на примере простейшей фермы. Пусть ферма имеет n узлов. Из

движно. Это значит, что прямая EF , принадлежащая телу, прикреплена неподвижно. Остальные точки тела имеют свободу перемещения — тело может вращаться вокруг прямой EF , как вокруг оси. Чтобы завершить прикрепление тела, теперь достаточно поставить один какой-либо стержень, препятствующий этому вращению, например, стержень CG . Очевидно, этот последний стержень не должен проходить через ось EF (пересекаемую всеми остальными стержнями) или быть ей параллельным (как показано, например, пунктиром), так как тогда он не будет препятствовать повороту тела относительно этой оси.



Фиг. 15.6. Сложная ферма. Образована соединением торцевых треугольников шестью стержнями.

Итак, приходим к выводу, что для неподвижного прикрепления к опорам или взаимного прикрепления друг к другу двух неизменяемых систем необходимы шесть стержней, направления которых не пересекают одной прямой и не параллельны ей. Прикрепления, показанные на фиг. 15.5, б, в и г, не обеспечивают неподвижности системы. Прямая BF на фиг. 15.5, б пересекает направления двух стержней — BE и BG и параллельна направлениям остальных четырех стержней. Таким образом эта прямая является осью, относительно которой возможно вращение системы, так как ни один из прикрепляющих стержней этому вращению не препятствует. На фиг. 15.5, в направление стержня AF пересекает четыре стержня из шести прикрепляющих стержней, именно стержни EA , FB , FC и FD и параллельно стержню DG . Линия AF явится осью вращения. Прямая BF на фиг. 15.5, г пересекает направление трех стержней — AF , BH и CH и параллельна остальным. Она также явится осью вращения. Прикрепление, показанное на фиг. 15.5, д, напротив, обеспечивает неподвижность системы. В этом случае *нельзя провести ни одной прямой, которая пересекала бы все шесть стержней или была бы им параллельна*. Прямая FG , например, пересекает пять стержней, но шестой стержень AE не проходит через эту прямую и не параллелен ей. Прямая BF пересекает два стержня и параллельна трем другим, но шестой стержень DG не проходит через эту прямую и не параллелен ей. Также жестким является прикрепление, изображенное на фиг. 15.2, б.

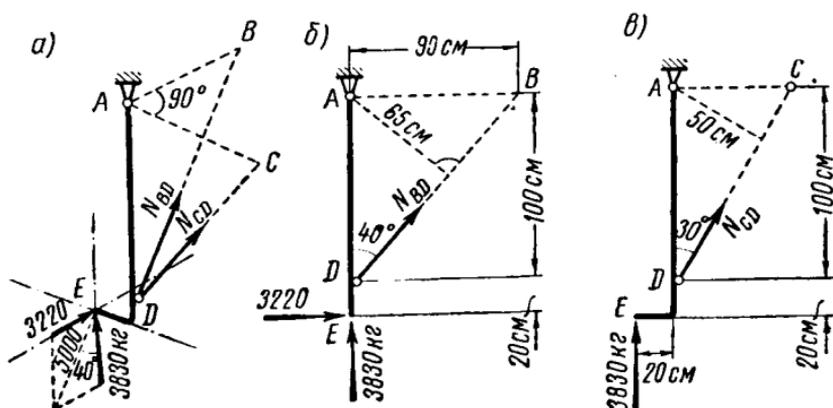
Вместо стержней могут быть применены опорные устройства: неподвижная опора, цилиндрическая катковая опора и шаровая катковая опора. Неподвижная пространственная опора A (фиг. 15.5, е) равносильна трем опорным стержням AF , BF и CF (фиг. 15.5, а). Цилиндрическая катковая опора B (фиг. 15.5, е) равносильна двум стержням AE и DE (фиг. 15.5, а). Шаровая опора C (фиг. 15.5, е) равносильна одному стержню CG (фиг. 15.5, а).

Сложные фермы. Соединяя указанным образом при помощи шести стержней две свободные фермы, можем получить сложную ферму. Простейший пример такого образования показан на фиг. 15.6. Треугольники ABC и FDE , являющиеся каждый в отдельности неизменяемыми системами, соединены здесь друг с другом шестью стержнями, причем так, как требует сформулированное выше условие относительной неподвижности, т. е. так, что нельзя провести прямую, которая пересекала бы эти шесть стержней или была им параллельна. Следовательно, рассматриваемая система в целом есть ферма (она может быть рассматриваема также, как преобразованная ферма, полученная из простейшей фермы, показанной на фиг. 15.4,г, путем замены раскоса DC раскосом BF).

§ 4. Определение усилий в прикрепляющих стержнях

Если прикрепление произведено только необходимым количеством стержней, т. е. не содержит лишних стержней, то определение усилий в прикрепляющих стержнях производится при помощи уравнений равновесия (см. гл. I) аналогично тому, как это было показано в главе II для плоских систем. Рассмотрим несколько примеров определения усилий в прикрепляющих стержнях.

Пример 1. Определим усилия в стержнях BD и CD (фиг. 15.3,б), поддерживающих стойку шасси. Направления



Фиг. 15.7. К определению усилий в стержнях, поддерживающих стойку шасси.

этих стержней образуют с осью стойки углы 40° и 30° , как показано на фигуре. Нагрузка $P=5$ т действует в плоскости колеса под углом 40° к вертикали.

Отбросим стержни BD и CD и вместо них приложим их усилия N_{BD} и N_{CD} (фиг. 15.7,а). Эти неизвестные усилия предположим сперва, как всегда, положительными, т. е. направлен-

ными от узла. Внешняя нагрузка, действующая на стойку, уравновешивается усилиями N_{BD} и N_{CD} совместно с реакциями опоры A (эти реакции на чертеже не показаны). Применим уравнения равновесия сил в пространстве, которые, как мы знаем, выражают условия: сумма проекций всех взаимно уравновешенных сил на любую ось и сумма моментов их относительно любой оси должны равняться нулю (за ось может быть принята любая прямая в пространстве). Чтобы определить усилие N_{BD} напишем уравнение моментов, взяв за ось моментов прямую, проходящую через точки A и C . Внешнюю силу $P=5$ т разложим предварительно на две составляющие: горизонтальную, равную $P\sin 40^\circ=3220$ кг и вертикальную $P\cos 40^\circ=3830$ кг. Получим

$$3220 \cdot 120 + N_{BD}65 = 0.$$

Входящее сюда плечо силы N_{BD} относительно оси AC , равно 65 см, взято по масштабу с чертежа (см. фиг. 15.7,б, где треугольник ABD изображен в неискаженном виде, т. е. в своей плоскости); оно может быть определено и вычислением, как высота прямоугольного треугольника ABD . Сила 3830 кг, так же как и реакция опоры A и усилие N_{CD} , не входят в написанное уравнение, так как проходят через ось AC и, следовательно, не образуют моментов относительно этой оси. Из уравнения находим $N_{BD} = -5950$ кг. Знак минус, полученный нами, означает, что стержень BD не растянут, как мы предполагали, а сжат.

Чтобы определить усилие N_{CB} , следует воспользоваться уравнением моментов относительно оси AB . Получим (см. фиг. 15.7,а и в, где дана другая проекция рассматриваемой системы — со стороны плоскости ACD)

$$N_{CD} \cdot 50 - 3830 \cdot 20 = 0.$$

Сила 3220 кг, усилие N_{CB} стержня CB и попрежнему реакции опоры A не входят в уравнение, так как пересекают линию AB . Из уравнения найдем $N_{CD} = 1530$ кг.

Пример 2. Рассмотрим более сложный пример. Пусть требуется определить усилия в шести прикрепляющих стержнях для случая, изображенного на фиг. 15.5,д.

Прикрепленное тело находится в равновесии под действием восьми сил: двух сил $1,5$ и $2,5$ т, представляющих внешнюю нагрузку, и шести искомых реакций опорных стержней (см. фиг. 15.8) N_{EA} , N_{FA} , N_{FB} , N_{HB} , N_{GC} и N_{GD} . Следовательно, сумма проекций всех этих сил на любую ось и сумма моментов их относительно любой оси должны равняться нулю. Постараемся составить уравнения равновесия для облегчения вычислений, так чтобы каждое из них содержало как можно меньше неизвестных.

Это можно сделать так же, как и при расчете плоских ферм — путем выбора осей проекций и моментов. Возьмем сум-

му проекций на ось x (см. систему координат на фигуре). Из всех восьми сил шесть не дают проекций, так как перпендикулярны к оси x , и только силы $2,5 \text{ т}$ и N_{HB} войдут в данное уравнение проекций:

$$-2,5 - N_{HB} \cos(HB, x) = 0.$$

Угол (HB, x) между направлением стержня HB и осью x равен при данных размерах 45° . Следовательно, $\cos(HB, x) = \cos 45^\circ = 0,71$. Отсюда

$$N_{HB} = -\frac{2,5}{0,71} = -3,5 \text{ т}.$$

Полученный знак минус означает, что стержень HB не растянут, как было предположено, а сжат (силой $3,5 \text{ т}$).

Теперь возьмем сумму моментов относительно оси FG .

Из шести реактивных сил пять пересекают эту ось и, следовательно, моментов не дают. Таким образом в уравнение снова войдет только одна неизвестная. Уравнение получаем в виде:

$$N_{EA}a + 1,5a = 0.$$

Сила $2,5 \text{ т}$ момента не дает, так как параллельна оси FG . Из уравнения находим:

$$N_{EA} = -1,5 \text{ т}.$$

Снова имеем сжимающее усилие.

Далее возьмем сумму моментов относительно оси FB .

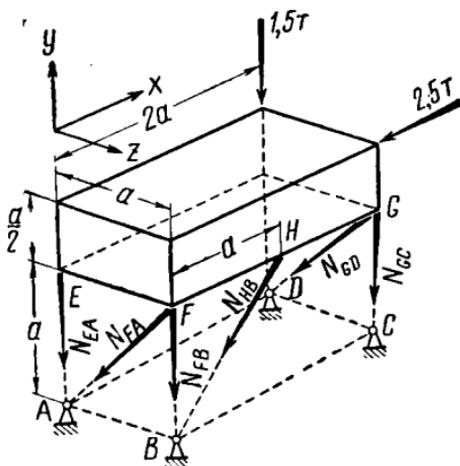
Все силы либо пересекают эту ось, либо ей параллельны, кроме силы N_{GD} , которая образует момент относительно оси FB . Но по условию равновесия момент равен нулю, следовательно, сила N_{GD} равна нулю. Теперь спроектируем все силы на ось z . Проекции дают только силы N_{FA} и N_{GD} . Но последняя равна нулю и отсюда N_{FA} также равна нулю, так как сумма проекций должна быть равна нулю.

Чтобы определить N_{GC} , составим уравнение моментов относительно оси AB : $1,5 \cdot 2a - 2,5 \cdot 1,5a + N_{GC} \cdot 2a = 0$ (силу N_{GD} в уравнение не включаем, так как уже известно, что она равна нулю). Из уравнения имеем:

$$N_{GC} = 0,375 \text{ т}.$$

Для определения последнего усилия N_{FB} напишем уравнение проекций на ось y :

$$-1,5 - N_{EA} - N_{FB} - N_{GC} - N_{HB} \cos 45^\circ = 0.$$



Фиг. 15.8. Схема равновесия. Прикрепляющие тело стержни заменены их реакциями.

Усилия N_{FA} и N_{GD} в уравнение не включены, так как выше было найдено, что они равны нулю. Из уравнения получаем

$$N_{FB} = -1,5 - N_{EA} - N_{GC} - N_{HB} \cos 45^\circ.$$

Подставляя сюда определенные ранее значения $N_{EA} = -1,5 \text{ т}$, $N_{GC} = 0,375 \text{ т}$, $N_{HB} = -3,5 \text{ т}$ и $\cos 45^\circ = 0,71$, будем иметь $N_{FB} = 2,14 \text{ т}$.

Таким образом мы нашли усилия во всех шести прикрепляющих стержнях. Полученные значения усилий надписаны на фиг. 15.5,д, а направления их показаны стрелками. Удачно выбирая оси проекций и моментов, мы в каждом уравнении имели всякий раз только одну неизвестную. Для определения усилий мы использовали шесть уравнений равновесия, т. е. все количество уравнений равновесия, которым мы располагаем для сил в пространстве (см. гл. I). Следовательно, если бы прикрепляющих стержней было больше шести, то уравнений статики не хватало бы для определения их усилий — мы имели бы статически неопределимую систему.

§ 5. Расчет подмоторной установки

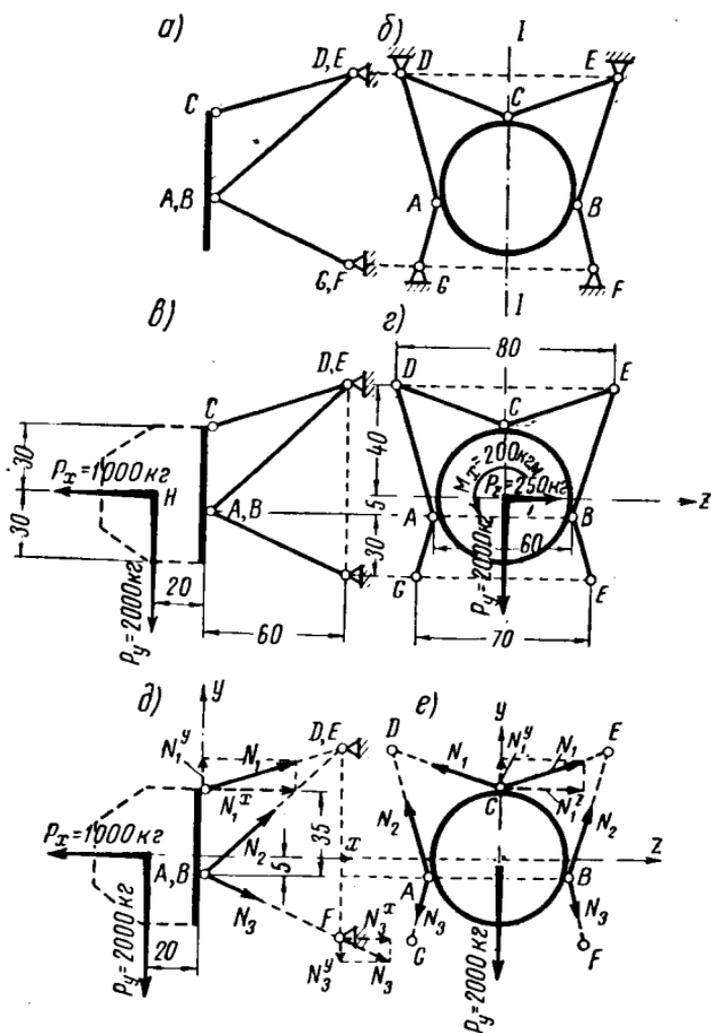
Рассмотрим еще один пример определения усилий в прикрепляющих стержнях — расчет статически определимой мотоустановки. Установка представляет собой кольцо (ABC) (фиг. 15.9,а и б), прикрепленное шестью симметрично расположенными стержнями CD , CE , AD , BE , AG и BF к опорам G , F , D и E (на фюзеляже). Кольцо жестко соединено с картером мотора, поэтому можно считать, что мы имеем твердое тело, прикрепленное шестью стержнями.

Прикрепляющие стержни расположены, как видим, так, что направления их не могут быть пересечены одной прямой, следовательно, неизменяемость прикрепления обеспечена. Следует заметить, что узлы присоединения стержней к кольцу обычно бывают сварными, т. е. жесткими, а не шарнирными, как мы предполагаем. При шарнирных узлах, т. е. в идеальной ферменной конструкции, каждый стержень работал бы только на осевое усилие — растяжение или сжатие. При жестких узлах стержни испытывают изгиб так же, как в рамах. Последний данным расчетом не учитывается, и, следовательно, осевые усилия в стержнях определяются приближенно¹.

Нагрузка и размеры конструкции показаны на фиг. 15.9,в и г в двух проекциях. На систему действуют (взяты некоторый

¹ Если бы стержней в мотоустановке было больше шести, то система была бы статически неопределимой и потребовалось бы составление и решение дополнительных уравнений (см. канонические уравнения в главе XII) к уравнениям статики — см. С. Н. Кан и И. А. Свердлов, Расчет самолета на прочность, Оборонгиз, 1940.

момент в полете): 1) вертикальная сила — вес мотора и вертикально направленная сила инерции $P_y = 2000 \text{ кг}$ (силы инерции возникают за счет кривизны траектории самолета); 2) горизонтальная сила $P_x = 1000 \text{ кг}$ (сила тяги винта); 3) горизонтальная



Фиг. 15.9. К расчету усилий в стержнях мотофермы.

а, б — заданная система. Узлы предполагаются шарнирными; в, г — заданная нагрузка. P_x и P_y — симметричная нагрузка. P_z и M_x — обратно-симметричная нагрузка; д, е — рассматривается отдельно симметричная нагрузка. Усилия N также симметричны.

сила $P_z = 250 \text{ кг}$ (сила инерции на развороте) и 4) момент $M_x = 200 \text{ кгм}$ (момент реакции винта). Силы P_y и P_z приложены в центре тяжести мотора H , отстоящем от плоскости кольца на расстоянии 20 см , как показано на фиг. 15.9,в.

Симметричная нагрузка. Для упрощения численных операций используем симметрию системы и будем рассматривать отдельно действие нагрузки, симметричной относительно плоскости симметрии системы $I-I$ (силы P_x и P_y) и обратно симметричной (сила P_z и момент M_x)¹. Симметричная нагрузка (фиг. 15.9, d и e) вызывает в симметрично расположенных стержнях одинаковые усилия. Так, усилия в стержнях CE и CD одинаковы. Обозначим их через N_1 :

$$N_{CE} = N_{CD} = N_1.$$

Аналогично обозначим

$$N_{BE} = N_{AD} = N_2 \text{ и } N_{BF} = N_{AG} = N_3.$$

Таким образом задача содержит три неизвестных N_1 , N_2 и N_3 .

Для определения этих трех неизвестных составим три уравнения равновесия. Уравнения постараемся составить так, чтобы каждое из них содержало в себе меньшее число неизвестных. Метод, применяемый для этого, аналогичен методу моментных точек, применявшемуся нами при расчете плоских ферм. Но в соответствии с пространственным характером задачи вместо точек моментов в данном случае фигурируют оси моментов.

О п р е д е л е н и е у с и л и й N_1 . Для определения усилий N_1 возьмем сумму моментов относительно оси AB . Усилия N_2 и N_3 проходят через эту ось. Следовательно, уравнение будет содержать только одну неизвестную величину N_1 .

Чтобы выяснить момент силы N_1 относительно оси AB , разложим силу N_1 на три составляющие N_1^x , N_1^y и N_1^z , параллельные осям координат x , y и z (принятые оси координат показаны на фиг. 15.9, d и e . Начало координат взято в центре кольца). На фиг. 15.9, d пунктиром показаны составляющие N_1^x и N_1^y . Третья составляющая N_1^z , перпендикулярная к первым двум, видна в другой проекции — фиг. 15.9, e . Каждая из этих составляющих представляет собой проекцию силы N_1 на соответствующую координатную ось, следовательно, равна силе N_1 , умноженной на косинус угла между направлением силы N_1 и данной осью:

$$N_1^x = N_1 \cos(1, x); \quad N_1^y = N_1 \cos(1, y); \quad N_1^z = N_1 \cos(1, z). \quad (3)$$

Здесь символами $(1, x)$, $(1, y)$ и $(1, z)$ обозначены углы между направлением силы и осями соответственно x , y и z .

Покажем вычисление косинусов углов между направлениями стержней и осями координат. Обозначив длину стержня CE через l_1 , а длины проекций его на оси x , y и z через

¹ Если бы имелись моменты M_y (относительно оси y) и M_z (относительно оси z), то их следовало бы отнести: M_z — к симметричной нагрузке, M_y — к антисимметричной.

l_1^x , l_1^y и l_1^z , выразим, например, косинусы углов $(1, x)$, $(1, y)$ и $(1, z)$ так (как отношения проекций стержня к его истинной длине — см. гл. I):

$$\cos(1, x) = \frac{l_1^x}{l_1}, \quad \cos(1, y) = \frac{l_1^y}{l_1}, \quad \cos(1, z) = \frac{l_1^z}{l_1}. \quad (4)$$

Проекции длины стержня CE (так же, как и проекции длин всех других стержней) можно взять из чертежа. Так, видим (см. фиг. 15.9, b и z): $l_1^x = 60$, $l_1^y = 10$, $l_1^z = 40$ см. Истинная же длина стержня равна корню квадратному из суммы квадратов длин его проекций:

$$l_1 = \sqrt{(l_1^x)^2 + (l_1^y)^2 + (l_1^z)^2} = \sqrt{60^2 + 10^2 + 40^2} = 72,8 \text{ см.}$$

Ниже в табл. 15 приведено вычисление косинусов углов, образуемых направлениями всех стержней с осями координат по формулам типа (4).

Таблица 15

Наименование стержня	Проекции длины стержня см			Истинная длина стержня, см $l = \sqrt{(l^x)^2 + (l^y)^2 + (l^z)^2}$	Косинусы углов между направлением стержня и осями координат [см. формулы (4)]		
	на ось x l^x	на ось y l^y	на ось z l^z		осью x l^x/l	осью y l^y/l	осью z l^z/l
1— CE (или CD)	60	10	40	72,8	0,824	0,137	0,550
2— BE (или AD)	60	45	10	75,7	0,790	0,594	0,132
3— BF (или AG)	60	30	5	67,2	0,890	0,445	0,074

Момент силы N_1 относительно оси AB напишем как сумму моментов ее составляющих. Замечаем, что составляющая N_1^y пересекает ось AB (см. фиг. 15.9, d и e), а составляющая N_1^z параллельна ей, следовательно, моменты этих сил относительно оси AB равны нулю. Только составляющая N_1^x образует момент, равный $N_1^x \cdot 35$ (где 35 см — плечо силы N_1^x относительно оси AB). Таких сил две, так как сил N_1 две (см. фиг. 15.9, e). Уравнение моментов относительно оси AB таким образом будет содержать три члена — от двух сил N_1 и от внешних сил $P_x = 1000$ и $P_y = 2000$ кг:

$$2N_1^x \cdot 35 - 1000 \cdot 5 - 2000 \cdot 20 = 0.$$

Учитывая, что $N_1^x = N_1 \cos(1, x) = N_1 0,824$, из уравнения находим $N_1 = 780$ кг.

Определение усилий N_3 . Теперь определим усилия N_3 (в стержнях BF и AG). Для этого удобно взять сумму моментов относительно оси DE . Усилия N_1 и N_2 пересекают ось DE (фиг. 15.9, д) и, следовательно, моментов не дадут; в уравнение войдет снова только одна неизвестная N_3 , которую и можно будет определить.

Предварительно разложим силу N_3 на составляющие N_3^x , N_3^y и N_3^z , причем сперва передвинем силу N_3 вдоль ее линии действия из точки B в точку F — см. фиг. 15.9, д (момент силы не изменяется от переноса точки ее приложения по линии действия силы). Видим, что направление составляющей N_3^y при продолжении его пересекает ось DE , а составляющая N_3^z (на фигуре не показанная) параллельна этой оси. Только составляющая N_3^x образует момент относительно оси DE . Уравнение моментов относительно DE запишется так:

$$-2N_3^x \cdot 75 + 1000 \cdot 40 - 2000 \cdot 80 = 0.$$

Учитывая, что $N_3^x = N_3 \cos(3, x) = N_3 0,890$ (см. таблицу косинусов), из уравнения получим $N_3 = -900$ кг.

Определение усилий N_2 . Для определения усилий N_2 (в стержнях BE и AD) воспользуемся уравнением проекций. Возьмем сумму проекций всех сил на ось y (или на ось x). Из восьми сил, действующих на кольцо, одна сила, именно P_x , перпендикулярна к оси проекций y и, следовательно, дает проекцию, равную нулю. Остальные силы входят в уравнение. Но силы N_1 и N_3 уже определены ранее. Следовательно, в уравнении будем иметь только одну неизвестную N_2 . Уравнение имеет вид

$$2N_1 \cos(1, y) + 2N_2 \cos(2, y) - 2N_3 \cos(3, y) - 2000 = 0$$

или

$$2 \cdot 780 \cdot 0,137 + 2N_2 0,594 - 2(-900) 0,445 - 2000 = 0,$$

откуда $N_2 = 830$ кг.

Проверка. Мы нашли усилия в стержнях мотоустановки при симметричной нагрузке ($P_x = 1000$ кг и $P_y = 2000$ кг):

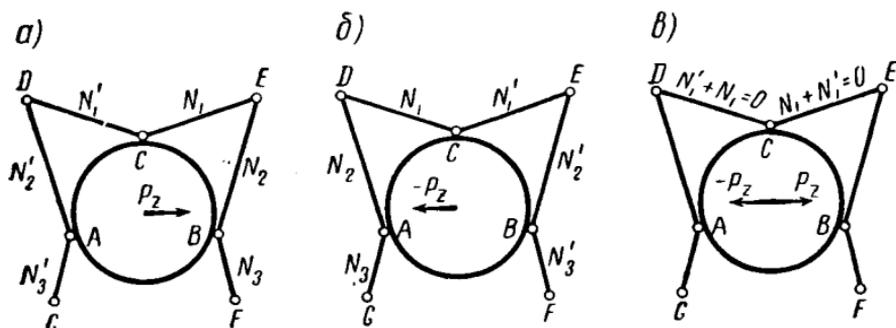
$$N_{CE} = N_{CD} = N_1 = 780 \text{ кг}, \quad N_{BE} = N_{AD} = N_2 = 830 \text{ кг}, \\ N_{BF} = N_{AG} = N_3 = -900 \text{ кг}.$$

Для проверки решения составим еще какое-либо уравнение равновесия. Если решение проведено верно, то любое уравнение найденными значениями усилий N удовлетворится. Например,

напишем сумму проекций всех сил на ось x мы должны получить нуль. Имеем:

$$\begin{aligned} 2N_1 \cos(1, x) + 2N_2 \cos(2, x) + 2N_3 \cos(3, x) - 1000 &= \\ = 2 \cdot 780 \cdot 0,824 + 2 \cdot 830 \cdot 0,790 + 2(-900) \cdot 0,890 - 1000 &= \\ = 2600 - 2600 = 0. \end{aligned}$$

Обратно-симметричная нагрузка. Обратимся к обратно-симметричной нагрузке $P_z = 250$ кг и $M_x = 200$ кгм (см. фиг. 15.9,г). Эта нагрузка вызывает усилия в симметрично расположенных стержнях, одинаковые по абсолютной величине, но взаимно противоположные по знаку. Так, если в стержне CE будем иметь



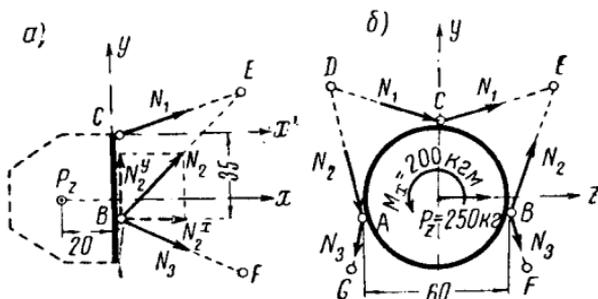
Фиг. 15.10.

некоторое положительное (растягивающее) усилие N_1 , то в стержне CD будет такое же отрицательное (сжимающее) усилие $-N_1$.

Убедиться в этом нетрудно хотя бы на данном примере. Пусть на установку действует только сила P_z . Обозначим через N_1, N_2 и N_3 усилия в правых стержнях (фиг. 15.10, а) и через N'_1, N'_2 и N'_3 — усилия в левых стержнях установки при данной нагрузке. Если бы нагрузка приняла обратное направление ($-P_z$) (фиг. 15.10, б), то, очевидно, в левых стержнях были бы усилия N_1, N_2 и N_3 , а в правых N'_1, N'_2 и N'_3 . Теперь, если предположить, что действуют одновременно силы P_z и $-P_z$ (фиг. 15.10, в), то усилия в стержнях определяются по принципу сложения действия сил как суммы усилий, найденных ранее от каждой из нагрузок P_z и $-P_z$ отдельно, т. е. в стержне CE , например, усилие равно $N_1 + N'_1$, в стержне BE усилие равно $N_2 + N'_2$ и т. д. Но приложенная система сил P и $-P$ равносильна нулю и, следовательно, усилия во всех стержнях должны быть равны нулю, т. е. $N_1 + N'_1 = 0$, $N_2 + N'_2 = 0$ и т. д. Отсюда $N_1 = -N'_1$, $N_2 = -N'_2$ и т. д., что и требовалось доказать. Аналогичное доказательство можно повторить и для нагрузки моментом M_x .

Таким образом, предполагая, что в правых стержнях CE , BE и BF установки наша нагрузка вызывает положительные усилия N_1 , N_2 и N_3 (направлены от узлов) (фиг. 15.11, a и d), мы одновременно должны предположить, что в левых стержнях CD , AD и AG усилия соответственно равны $-N_1$, $-N_2$ и $-N_3$ (направлены к узлам).

Задача снова содержит три неизвестных. Нужно составить три уравнения равновесия. Напишем, например, уравнение моментов относительно оси y . Усилия N_1 пересекают эту ось. Остальные неизвестные усилия N_2 и N_3 войдут в уравнение. Разложим их попрежнему на составляющие, параллельные



Фиг. 15.11. Обратносимметричная нагрузка. Усилия N также обратносимметричны.

осям x , y и z . Составляющие N_2^x и N_2^y силы N_2 показаны на фиг. 15.11 пунктиром. Третья составляющая (N_2^z) перпендикулярна к первым двум и на чертеже не показана. Из трех этих составляющих только N_2^x образует момент относительно оси y . Составляющая же N_2^y параллельна оси y , а N_2^z перпендикулярна к ней. Аналогично из числа составляющих силы N_3 только N_3^x дает момент относительно оси y . Плечо силы N_3^x , так же как и силы N_2^x относительно оси y , равно 30 см (см. фиг. 15.7, б). Уравнение напишется так:

$$2(N_2^x + N_3^x) \cdot 30 + 250 \cdot 20 = 0.$$

Первый член удвоен, так как сил N_2 две, так же как и сил N_3 . Учитывая, что

$$N_2^x = N_2 \cos(2, x) = N_2 0,790$$

и

$$N_3^x = N_3 \cos(3, x) = N_3 0,890,$$

получим написанное выше уравнение в виде

$$47,5N_2 + 53,5N_3 + 5000 = 0. \quad (5)$$

Другое уравнение равновесия составим так, чтобы в него тоже не входило усилие N_1 . Возьмем сумму моментов отно-

сительно оси x_1 (фиг. 15.11, а), проходящей через узел С параллельно оси x . Относительно этой оси составляющие N_2^y и N_3^y сил N_2 и N_3 имеют плечо 30 см, а составляющие N_2^z и N_3^z — плечо 35 см. Уравнение получаем в таком виде (учитываем, что N_2^y и N_3^y различно направлены):

$$2(N_2^y - N_3^y) 30 + 2(N_2^z + N_3^z) 35 + P_z \cdot 30 + M_x = 0.$$

Подставим сюда

$$N_2^y = N_2 \cos(2, y) = N_2 \cdot 0,594, \quad N_3^y = N_3 \cos(3, y) = N_3 \cdot 0,445,$$

$$N_2^z = N_2 \cos(2, z) = N_2 \cdot 0,132, \quad N_3^z = N_3 \cos(3, z) = N_3 \cdot 0,074,$$

$P_z = 250$ кг, $M_x = 200$ кгм = 20 000 кгсм. Будем иметь

$$44,93N_2 - 21,56N_3 + 27\,500 = 0. \quad (6)$$

Решая совместно уравнения (5) и (6) относительно N_2 и N_3 , найдем

$$N_2 = -461 \text{ кг}, \quad N_3 = 316 \text{ кг}^1.$$

Чтобы определить оставшуюся неизвестную — N_1 , составим уравнение проекций на ось z :

$$2N_1 \cos(1, z) + 2N_2 \cos(2, z) + 2N_3 \cos(3, z) + 250 = 0$$

или

$$2N_1 \cdot 0,550 + 2(-461) \cdot 0,132 + 2 \cdot 316 \cdot 0,074 + 250 = 0,$$

откуда $N_1 = -159$ кг.

В результате при обратно-симметричной нагрузке имеем усилия в стержнях:

$$N_{CE} = N_1 = -159 \text{ кг}, \quad N_{CD} = -N_1 = 159 \text{ кг};$$

$$N_{BE} = N_2 = -461 \text{ кг}, \quad N_{AD} = -N_2 = 461 \text{ кг};$$

$$N_{BF} = N_3 = 316 \text{ кг}, \quad N_{AG} = -N_3 = -316 \text{ кг}.$$

Проверка. Возьмем сумму моментов относительно оси x

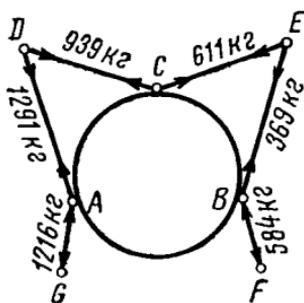
$$\begin{aligned} M_x - 2N_1^z \cdot 30 + 2(N_2^y - N_3^y) 30 + 2(N_2^z + N_3^z) 35 = M_x - \\ - 60N_1 \cos(1, z) + 60N_2 \cos(2, y) - 60N_3 \cos(3, y) + \\ + 10N_2 \cos(2, z) + 10N_3 \cos(3, z) = 20\,000 - 60(-159) \cdot 0,550 + \\ + 60(-461) \cdot 0,594 - 60 \cdot 316 \cdot 0,445 + 10(-461) \cdot 0,132 + \\ + 10 \cdot 316 \cdot 0,074 = 25\,500 - 25\,500 = 0. \end{aligned}$$

¹ При ином выборе осей моментов можно было бы и в данном случае избежать решения системы уравнений. См., например, С. Н. Кан и И. А. Свердлов, Расчет самолета на прочность, Оборонгиз, 1940.

Полная нагрузка. Мы определили усилия в стержнях установки отдельно от симметричной нагрузки (P_z и P_d) и от обратно-симметричной нагрузки (P_z и M_x). При совместном действии этих двух нагрузок, т. е. при полной заданной нагрузке, усилия в стержнях будут равны суммам полученных усилий. Вычисление окончательных усилий дано в следующей таблице.

Таблица 16

Наименование стержня	Усилия в стержнях, кг		
	при симметричной нагрузке	при обратно-симметричной нагрузке	Полные
CE	780	-159	611
BE	830	-461	369
BF	-900	316	-584
CD	780	159	939
AD	830	461	1291
AG	-900	-316	-1216



Фиг. 15.12. Суммарные искомые усилия в стержнях. Стержни AG и BF сжаты, остальные — растянуты.

На фиг. 15.12 выписаны найденные значения усилий стержней и стрелками показаны их направления.

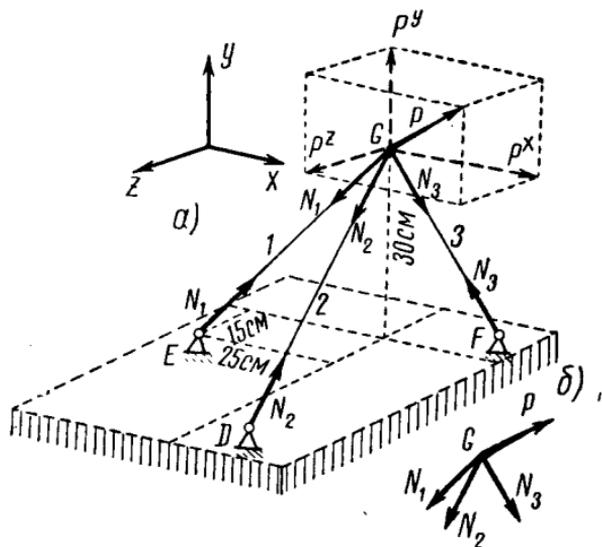
§ 6. Определение усилий в стержнях пространственных ферм

В главе II были разобраны методы определения усилий в стержнях плоских ферм. Для расчета пространственных ферм применяются аналогичные приемы. Все методы определения усилий в стержнях статически определимых систем основаны на применении уравнений равновесия.

Способ вырезания узлов. Метод последовательного вырезания узлов для плоской фермы знаком читателю и в графической и в аналитической форме. Здесь изложим метод вырезания узлов в аналитической форме для пространственных

ферм. Применение этого метода в случае плоской фермы было удобно, если хотя бы один узел фермы содержал не больше двух стержней. Соответственно в случае пространственных ферм желательно наличие хотя бы одного узла, содержащего не больше трех стержней (если ни один из стержней не лежит в плоскости каких-либо двух других).

Равновесие узла. Пусть имеется пространственный узел G (фиг. 15.13), в котором сходятся три стержня: 1, 2 и 3. Сила P , действующая на узел, может быть направлена, как



Фиг. 15.13. К определению усилий в трехстержневом узле.

- а) P — сила, приложенная к узлу. P^x , P^y и P^z — ее составляющие по осям x , y и z ;
 б) схема равновесия узла. N_1 , N_2 и N_3 — усилия стержней.

угодно. Обозначим, как и ранее, проекции силы P на оси координат x , y и z через P^x , P^y , P^z и неизвестные усилия в стержнях 1, 2 и 3 через N_1 , N_2 и N_3 . Рассмотрим равновесие узла, мысленно его вырезая. Он представляет собой точку, к которой приложены четыре силы: P , N_1 , N_2 и N_3 (см. фиг. 15.13б). Эти силы взаимно уравновешивают друг друга, следовательно, сумма проекций их на любую ось должна равняться нулю. Составим уравнения проекций на все три оси x , y и z (учитываем знаки проекций сил в соответствии с рисунком):

$$\left. \begin{aligned} P^x - N_1 \cos(1, x) + N_2 \cos(2, x) + N_3 \cos(3, x) &= 0, \\ P^y - N_1 \cos(1, y) - N_2 \cos(2, y) - N_3 \cos(3, y) &= 0, \\ P^z + N_1 \cos(1, z) + N_2 \cos(2, z) - N_3 \cos(3, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из этих трех уравнений (8) можно найти три неизвестных усилия N_1, N_2, N_3 . Значения косинусов вычисляются, как указано в предыдущем параграфе, через проекции длин стержней. Например, проекции длины стержня l на оси x, y и z равны соответственно $25 \text{ см}, 30 \text{ см}$ и 15 см (фиг. 15.13). Истинная длина стержня

$$l_1 = \sqrt{25^2 + 30^2 + 15^2} = 41,8 \text{ см}$$

и косинусы углов, образуемых стержнем l с осями координат

$$\cos(1, x) = \frac{25}{41,8} = 0,597, \quad \cos(1, y) = \frac{30}{41,8} = 0,717,$$

$$\cos(1, z) = \frac{15}{41,8} = 0,358.$$

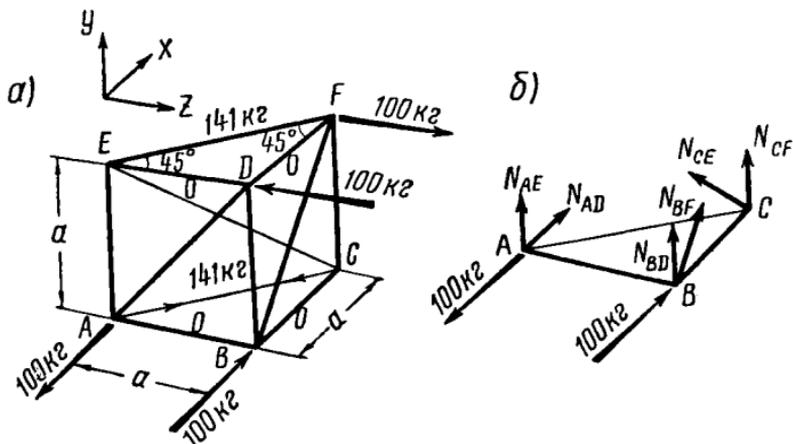
Три уравнения (8) можно составить для каждого узла всякой фермы. Но вместе с тем нельзя составить для узла больше чем три уравнения равновесия [см. гл. I, примечание к формуле (11) о силах, пересекающихся в одной точке].

Простейшая ферма. Рассмотрим порядок расчета системы, содержащей несколько узлов, показанной на фиг. 15.3,а. Выше было установлено, что это простейшая пространственная ферма. Расчет начнем с узла G . Он прикреплен тремя стержнями к точкам E, D и F . Усилия этих стержней можно найти только что описанным путем. Допустим, что они найдены. На фиг. 15.3,а они показаны направленными положительно. Перейдем к узлу F . В этом узле сходятся четыре стержня, но усилие одного из них, FG , уже известно. Вырезая мысленно узел F и составляя для него три уравнения равновесия, точно так же как это было сделано для узла G , найдем усилия стержней FC, FD и FE . Далее рассмотрим узел E . Здесь сходятся пять стержней, но усилия двух из них EG и EF уже известны. Три неизвестных усилия EA, EC и ED определятся из трех уравнений равновесия узла. И, наконец, переходя к узлу D , где сходятся шесть стержней, мы снова будем иметь только три неизвестных усилия в узле (именно усилия DA, DB и DC), так как три уже известны (DG, DF и DE). Следовательно, эти неизвестные также можно определить из уравнений равновесия.

Мы рассмотрели последовательно равновесие узлов G, F, E и D . При этом всякий раз мы имели в узле три неизвестных усилия, которые и определялись из уравнений равновесия узла. Нетрудно видеть, что порядок рассмотрения узлов при этом был как раз обратным порядку образования данной фермы. Мы начали расчет с узла, который при образовании фермы был присоединен последним, и кончили узлом, который был прикреплен первым (см. § 2). Изменив указанному порядку, мы столкнулись бы с количеством неизвестных усилий в узле, превышающим три, т. е. количество возможных уравнений равно-

веса для данного узла. Так, если бы мы после определения усилий в узле G обратились к рассмотрению равновесия не узла F , а узла E , мы имели бы здесь четыре неизвестных усилия, и, следовательно, не могли бы их определить из рассмотрения только этого узла.

Отдельно стоящие стержни. В некоторых частных случаях метод вырезания узлов удобен и тогда, когда узел содержит четыре и более стержней, именно в случаях, если расположение стержней в узле позволяет составить уравнение равновесия узла, содержащее только одно неизвестное усилие, которое таким образом может быть определено.



Фиг. 15.14.

a — сложная ферма, но легко решаемая способом вырезания узлов;
 b — применение способа сквозных сечений.

Рассмотрим, например, ферму, показанную на фиг. 15.6. В каждом узле этой фермы сходятся по четыре стержня, но она просто рассчитывается по методу вырезания узлов. Покажем это на числовом примере. Пусть ферма имеет размеры и нагрузку, как изображено на фиг. 15.14, a . Силы по 100 кг каждая образуют две пары, действующие в горизонтальных плоскостях. Одна пара лежит в плоскости треугольника ABC , другая — в плоскости треугольника EDF . Для упрощения численных операций эти треугольники взяты прямоугольными.

Вырежем узел A . Из четырех стержней этого узла три (AB , AD и AE) лежат в одной плоскости и один (AC) является отдельно стоящим. Усилие в этом последнем стержне можно определить, если написать уравнение проекций для сил, сходящихся в узле A , на ось x , перпендикулярную к направлениям первых трех стержней. Это уравнение будет содержать только одно неизвестное усилие, именно усилие отдельно стоящего стержня:

$$-100 + N_{AC} \cos 45^\circ = 0.$$

Из уравнения находим

$$N_{AC} = \frac{100}{\cos 45^\circ} = \frac{100}{0,71} = 141 \text{ кг.}$$

Переходя к узлу B , замечаем, что здесь отдельно стоящим стержнем является BA . Взяв сумму проекций всех сил в узле на ось z , перпендикулярную к остальным стержням, получим $N_{BA} = 0$, так как все остальные силы, в том числе и внешняя сила 100 кг, проекций на ось z не дают. Точно так же в узле D из суммы проекций на ось x находим, что $N_{DF} = 0$. В узле C возьмем сумму проекций на ось, перпендикулярную к плоскости $AEFC$ (на чертеже эта ось не показана). Только усилие стержня CB даст проекцию на эту ось. Но сумма проекций должна быть равна нулю, следовательно, $N_{CB} = 0$.

Из рассмотрения узлов B , D и C можем сделать вывод, что *усилие в отдельно стоящем стержне равно нулю, если узел не нагружен или если нагрузка лежит в плоскости остальных стержней.*

Аналогично найдем $N_{ED} = 0$ (из равновесия узла E).

Далее, в узле F , так же как ранее в узле A , найдем $N_{FE} = 141 \text{ кг}$ (из уравнения проекций на ось z).

Мы использовали шесть уравнений — по одному уравнению в каждом узле — и определили усилия в шести стержнях. Усилия в остальных шести стержнях теперь можно найти без затруднений, вырезая узлы в любом порядке, так как в каждом узле остается по два неизвестных усилия и для каждого узла можно составить еще два уравнения равновесия. Так, взяв в узле F сумму проекций на ось x

$$-N_{FE} \cos 45^\circ - N_{FD} - N_{FB} \cos 45^\circ = 0$$

и учитывая, что по найденному ранее $N_{FE} = 141 \text{ кг}$ и $N_{FD} = 0$ получим

$$N_{FB} = -141 \text{ кг.}$$

Далее, там же, взяв сумму проекций на ось y

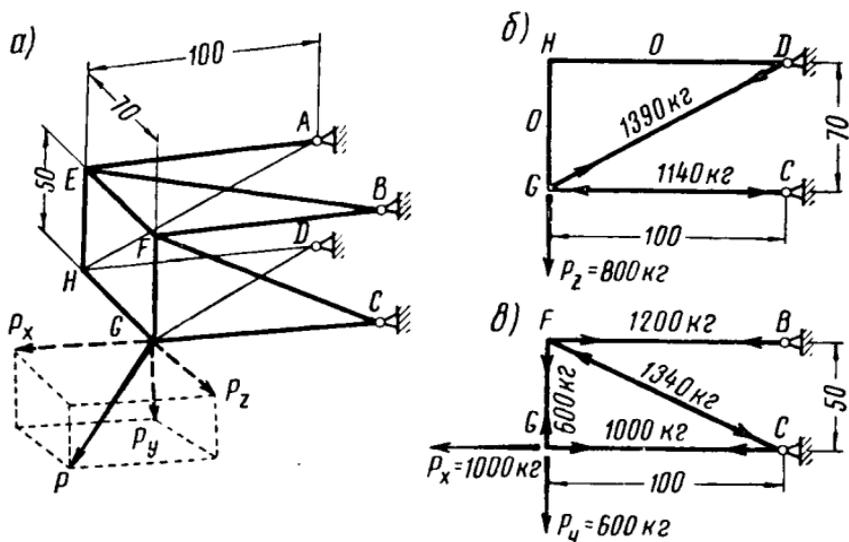
$$-N_{FC} - N_{FB} \cos 45^\circ = 0,$$

находим

$$N_{FC} = -N_{FB} \cos 45^\circ = -(-141)0,71 = 100 \text{ кг и т. д.}$$

Способ сквозных сечений. Изложенный выше способ вырезания узлов является основным при расчете пространственных ферм. Но часто применяется и способ сквозных сечений, также знакомый нам из теории расчета плоских ферм и использованный нами в настоящей главе при определении усилий в шести прикрепляющих стержнях, когда вся система прикрепляющих стержней разрезалась одним сечением на две части.

Покажем применение метода сквозных сечений к определению усилий в части стержневой фермы, рассмотренной в предыдущем примере (фиг. 15.14,а). Разрезая ферму сквозным сечением поперек, мы отрезем нижнее основание от верхнего. Рассмотрим равновесие какой-нибудь из отрезанных частей, например, нижнего треугольника ABC . На него действуют восемь сил (фиг. 15.14,б) — две внешних силы и шесть неизвестных усилий разрезанных стержней N_{AE} , N_{AD} , N_{BD} , N_{BF} , N_{CF} и N_{CE} . Составляя шесть уравнений равновесия для этих сил, найдем все



Фиг. 15.15. Расчет по способу разложения на плоские фермы.

а — заданная пространственная ферма. P — нагрузка, приложенная к узлу G фермы. P_x , P_y и P_z — ее составляющие; б — нижняя плоская ферма и усилия в ней от силы P_z ; в — передняя плоская ферма и усилия в ней от сил P_x и P_y .

неизвестные усилия, подобно тому как это мы делали в предыдущем параграфе при определении усилий в прикрепляющих стержнях. Остающиеся шесть усилий (в стержнях AB , BC , CA , DE , EF и FD) найдем по способу вырезания узлов.

Разложение на плоские фермы. Иногда бывает возможно расчет пространственной фермы свести к расчету плоских ферм. Это особенно удобно в том случае, когда пространственная ферма состоит из плоских ферм, каждая из которых имеет самостоятельные опоры.

Пусть дана система, показанная на фиг. 15.15. Нетрудно доказать, что эта система является фермой, т. е. неизменяемой системой: заменив раскос BE раскосом AF , мы получим простейшую ферму.

Можно и иначе доказать геометрическую неизменяемость предложенной системы. Рассмотрим одну грань нашей фермы —

ABFE. Эта грань в своей плоскости является неизменяемой системой, так как представляет собой плоскую ферму, прикрепленную к опорам *A* и *B*. Но эта ферма могла бы вращаться относительно оси *AB*. Этому вращению препятствуют боковые фермы *BCGF* и *ADHE*. Следовательно, рассматриваемая ферма *ABFE* закреплена неподвижно. В таких условиях находятся все грани нашей пространственной фермы, следовательно, она целиком неизменяема. Лишних стержней она также не содержит, в чем можно убедиться подсчетом стержней. Число стержней равно 12, т. е. утроенному числу узлов, как и должно быть в прикрепленной пространственной ферме.

К узлу *G* фермы приложена сила *P*. Составляющие этой силы $P_x=1000$, $P_y=600$ и $P_z=800$ кг по направлениям ребер фермы показаны пунктиром. Сила $P_z=800$ кг лежит в плоскости горизонтальной нижней фермы *DCGH*, и, следовательно, будет полностью восприниматься только ею, так как эта ферма имеет самостоятельные опоры и поэтому способна самостоятельно нести нагрузку в своей плоскости. На фиг. 15.15 отдельно изображена плоская ферма *DCGH* под действием нагрузки P_z . Усилия в стержнях фермы при этом показаны на чертеже. Их определение не представляет затруднений и производится простыми способами, известными нам из главы II.

Сила $P_y=600$ кг лежит в плоскости вертикальной плоской фермы *BCGF*, также имеющей опоры, и будет восприниматься этой фермой. Сила P_x лежит на линии пересечения плоскостей обеих указанных плоских ферм и, следовательно, принадлежит обеим плоскостям. Ее можно произвольно отнести к какой-либо из ферм либо произвольно распределить между ними. Отнесем ее к ферме *BCGF*. Таким образом на плоскую ферму *BCGF* (фиг. 15.15) действуют две силы $P_y=600$ кг и $P_x=1000$ кг, лежащие в ее плоскости. Эта задача так же легко решается, как и предыдущая. Найденные усилия показаны на фиг. 15.15.

Остальные две плоские фермы *ABFE* и *ADHE*, как видим, не участвуют в восприятии данной нагрузки, за исключением стержней *BF* и *DH*, которые входят в ранее рассмотренные фермы.

Стержень *CG* принадлежит одновременно фермам *DCGH* и *BCGF*. Усилие его от нагрузки P_z равно — 1140 кг (фиг. 15.15,б), а от нагрузки P_y и P_x (фиг. 15.15,в) 1000 кг. Следовательно, полное усилие в нем равно — 1140 + 1000 = — 140 кг.

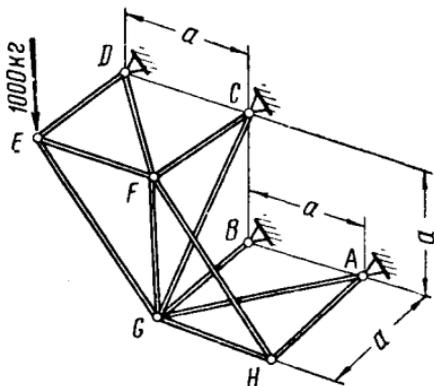
Таким образом найденные усилия в стержнях фермы:

$$N_{BF} = 1200 \text{ кг}, \quad N_{GF} = 600 \text{ кг}, \quad N_{CF} = -1340 \text{ кг},$$

$$N_{CG} = -140 \text{ кг} \text{ и } N_{DG} = 1390 \text{ кг}.$$

Усилия в остальных стержнях равны нулю.

Задачи. 1. Исследовать геометрическую неизменяемость пространственной стержневой системы с шарнирными узлами, изображенной на фиг. 15. 16. **Ответ.** Простейшая ферма. Порядок присоединения узлов при образовании: G , F и затем E и H .



Фиг. 15. 16.

2. Определить усилия в стержнях фермы предыдущей задачи методом вырезания узлов. **Ответ:** $N_{EF} = N_{FC} = 1000$ кг,

$$N_{CG} = 1410 \text{ кг}, \quad N_{DF} = N_{EG} = N_{AG} = -1410 \text{ кг},$$

усилия в остальных стержнях равны нулю.

§ 7. Случай внеузловой нагрузки

Выше рассматривалась только нагрузка, приложенная в узлах фермы.

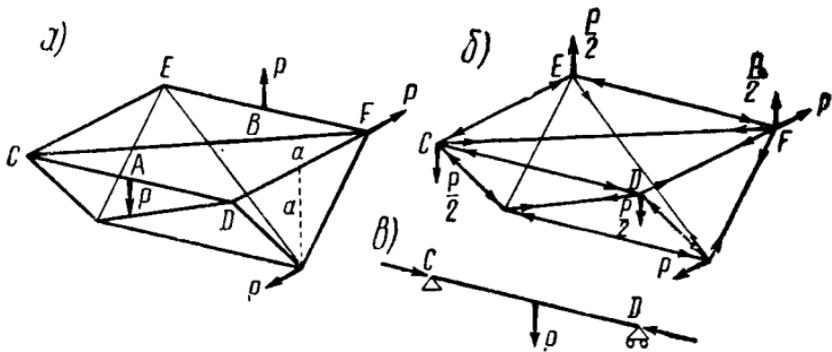
В практике возможны случаи нагрузки, приложенной не только к узлам, но и непосредственно к стержням фермы. В таких случаях для расчета продольных усилий в стержнях фермы приходится предварительно разнести внеузловые нагрузки на соответствующие узлы, после чего расчет ведется методами, изложенными выше. Затем нужно лишь учесть влияние внеузловой нагрузки на стержни, к которым она непосредственно приложена.

Сказанное относится в равной мере к плоским и пространственным фермам. Поясним порядок расчета при внеузловой нагрузке на следующем примере пространственной фермы.

Ферма (фиг. 15.17,а) представляет собой прямую призму, основанием которой является равнобедренный треугольник с высотой, равной основанию. Нагрузка состоит из четырех одинаковых сил P , образующих две пары с моментами Pa , взаимно уравновешивающие одна другую.

При этом две из сил P , составляющие одну пару, приложены в точках A и B по середине ребер. Выясним, какие нагрузки дают эти силы на узлы фермы. Сила P , приложенная в точке A к

стержню CD , очевидно, одинаково нагружает узлы C и D силами $\frac{P}{2}$, направленными вниз (фиг. 15.17,б). Сила P , приложенная в точке B , нагружает узлы E и F силами $\frac{P}{2}$, направленными вверх (фиг. 15.17,б). Заменяв таким образом силы, приложенные в точках A и B , узловыми нагрузками в узлах C, D, E и F , будем иметь ферму, нагруженную только в узлах. Продольные усилия N в стержнях определяются способом вырезания узлов. На фиг. 15.17,б стрелками показаны знаки усилий.



Фиг 15.17.

Стержни CD и EF оказываются сжатыми. При проверке прочности этих стержней, непосредственно несущих внеузловую нагрузку, следует учесть, что они, помимо осевого сжатия, испытывают также изгиб. На фиг. 15.17,в показана схема работы стержня CD . Он представляет собой балку на двух опорах, нагруженную поперечной и продольной нагрузкой. В таких же условиях находится и стержень EF . Проверка прочности стержня при совместном действии сжатия и изгиба рассматривалась нами выше в гл. XIV (§ 6).

Контрольные вопросы

1. Что называется пространственной фермой?
2. Дайте определение геометрической неизменяемости системы.
3. Что называется прикрепленной фермой? Свободной?
4. Какова зависимость между количеством узлов и необходимым количеством стержней для прикрепленной пространственной фермы?
5. То же для свободной фермы?
6. Что называется простейшей пространственной фермой?

7. Какое количество стержней необходимо для прикрепления тела к другому телу и как они должны быть расположены?
8. Как определяются усилия в прикрепляющих стержнях?
9. Как используется при расчете симметрия системы?
10. В чем состоит способ вырезания узлов и когда он удобен?
11. Как использовать при расчете свойства отдельно стоящих стержней?
12. В чем состоит способ сквозных сечений?
13. В чем состоит метод разложения на плоские фермы?
14. Как производится расчет ферм при внеузловой нагрузке?

ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

Беляев Н. М., Соппротивление материалов, Гостехиздат, 1949.

Бернштейн С. А., Соппротивление материалов. Изд. Военной Академии БТ и МС СА, 1946.

Кутуков Б. Н., Соппротивление материалов, изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1946.

Рабинович И. М., Курс строительной механики стержневых систем, часть I, Госстройиздат, 1938. Часть II, изд. Наркомстроя, 1942.

Уманский А. А., Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций, Оборонгиз, 1939.

Афанасьев А. М., Вольмир А. С., Калинин Н. Г., Марьин В. А. и др., Сборник задач по соппротивлению материалов, части I и II, Оборонгиз, 1947.

Афанасьев А. М., Байков В. Т., Марьин В. А. и др., Сборник задач по расчету тонкостенных конструкций, Оборонгиз, 1941.

Кан С. Н. и Свердлов И. А., Расчет самолета на прочность, Оборонгиз, 1940.

Шенли Ф. Р., Основы силового расчета конструкций, Оборонгиз, 1948.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие	3
Основные обозначения	8
Латинский и греческий алфавиты	10

Глава I

Общие положения

§ 1. Содержание предмета	11
§ 2. Графики	14
§ 3. Сведения из тригонометрии	16
§ 4. Изображение в проекциях	19
§ 5. Сложение сил. Центр тяжести	21
§ 6. Равновесие тел	25
§ 7. Реакции опор	27
§ 8. Метод сечений	33

Глава II

Расчет плоских ферм

§ 1. Примеры плоских ферм	35
§ 2. Образование простейших ферм	37
§ 3. Соединение ферм друг с другом. Сложные фермы	40
§ 4. Определение усилий в прикрепляющих стержнях	45
§ 5. Определение усилий в стержнях ферм методом вырезания узлов	51
§ 6. Способ сквозных сечений	56
§ 7. Графические способы определения усилий в стержнях ферм	60

Глава III

Растяжение и сжатие

§ 1. Нормальные напряжения	67
§ 2. Деформация призматического стержня	72
§ 3. Диаграмма растяжения	76
§ 4. Выбор допускаемого напряжения	80
§ 5. Простейшие статически неопределимые задачи	86
§ 6. Расчет по разрушающим нагрузкам	90

Глава IV

Сложное напряженное состояние

§ 1. Напряжения в наклонных сечениях	95
§ 2. Расчет цилиндрического сосуда	100
§ 3. Исследование плоского напряженного состояния	103
§ 4. Понятие о теориях прочности	113

Глава V

Сдвиг

§ 1. Деформации и напряжения при сдвиге	118
§ 2. Расчет болтового соединения	123
§ 3. Заклепочные соединения	127
§ 4. Сросток Шухова	131
§ 5. Сварные соединения	134

Глава VI

Кручение

§ 1. Экспериментальные данные и предпосылки	139
§ 2. Зависимость между напряжением и деформацией	143
§ 3. Относительный угол закручивания	144
§ 4. Напряжения при кручении	148
§ 5. Вычисление сумм	154
§ 6. Полярный момент инерции	160
§ 7. Расчет на прочность	163
§ 8. Зависимость крутящего момента от числа оборотов и мощности	169
§ 9. Расчет на жесткость	171
§ 10. Кручение за пределом пропорциональности	178

Глава VII

Кручение стержней некруглого сечения и тонкостенных
авиаконструкций

§ 1. Прямоугольное сечение	182
§ 2. Напряжения и угол закручивания открытого профиля	185
§ 3. Напряжения в замкнутом профиле	187
§ 4. Деформация тонкостенного стержня	193
§ 5. Многоконтурный профиль	201

Глава VIII

Изгиб. Усилия

§ 1. Явление изгиба	210
§ 2. Нагрузки и реакции	213
§ 3. Поперечная сила и изгибающий момент	216
§ 4. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов	219
§ 5. Примеры эпюр усилий для консоли	220
§ 6. Примеры эпюр усилий для простой балки на двух опорах	230
§ 7. Сложная нагрузка	238
§ 8. Рама	242
§ 9. Построение эпюр усилий на рамах	244

Глава IX

Напряжения при изгибе

§ 1. Основные допущения	251
§ 2. Распределение нормальных напряжений	253
§ 3. Вычисление нормальных напряжений	255
§ 4. Осевые моменты инерции и моменты сопротивления простых фигур	261
§ 5. Моменты инерции сложных фигур	268
§ 6. Рациональные формы сечений балок	277
§ 7. Касательные напряжения при изгибе	284
§ 8. Определение касательных напряжений	286
§ 9. Расчет на прочность при изгибе	294
§ 10. Расчет составных балок	299
§ 11. Изгиб за пределом пропорциональности	307

Глава X

Изгиб тонкостенных авиаконструкций

1. Тонкостенная балка	312
2. Балка с криволинейной стенкой	315
3. Изгиб открытого профиля	319
4. Центр изгиба	325
5. Изгиб замкнутых профилей	332
6. Центр изгиба замкнутого профиля	338
7. Изгиб многоконтурного профиля	341
8. Балка со стенкой, не работающей на сдвиг	347

Глава XI

Деформация при изгибе

1. Примеры деформации балок и рам	354
2. Определение перемещений	358
3. Правило Верещагина	364
4. Примеры определения перемещений	368
5. Более сложные случаи расчета	376
6. Расчет на жесткость	382
7. Деформация фермы	384

Глава XII

Статически неопределимые системы

1. Признаки статической неопределимости систем	389
2. Особенности статически неопределимых систем	393
3. Уравнения перемещений	395
4. Применение канонического уравнения к расчету статически неопределимых балок	399
5. Статически неопределимые рамы	407
6. Система уравнений перемещений	412
7. Примеры расчета многократно статически неопределимых систем	415
8. Пространственное нагружение плоской рамы	418
9. Статически неопределимые фермы	422

Глава XIII

Сложное сопротивление

1. Общие положения	426
2. Косой изгиб	428
3. Внецентренное растяжение и сжатие	434
4. Изгиб с кручением	442
5. Другие случаи сложного сопротивления	451

Глава XIV

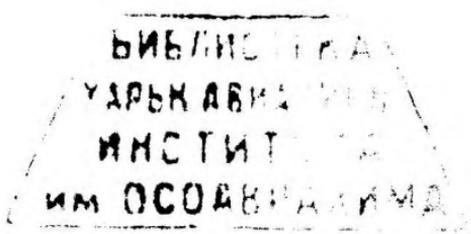
Устойчивость стержней и пластин

1. Общие понятия	453
2. Формула Эйлера	458
3. Влияние закреплений	464
4. Расчет за пределом пропорциональности	471
5. Потеря устойчивости пластин	482
6. Продольно-поперечный изгиб стержней	487

Пространственные фермы

1.	Понятие пространственной фермы	491
2.	Образование простейшей пространственной фермы	494
3.	Прикрепление твердого тела	497
4.	Определение усилий в прикрепляющих стержнях	499
5.	Расчет подmotorной установки	502
6.	Определение усилий в стержнях пространственных ферм	510
7.	Случай внеузловой нагрузки	517
	Литература и источники	520

76315



Редактор В. Т. Байков

Техн. редактор Н. Н. Пискарева

T02758

Подп. в печ. 28/IV 1951 г.

Уч.-изд. л. 33,66

Формат бумаги $60 \times 92 \frac{1}{16} = 16 \frac{3}{8}$ бум. л. — $32 \frac{3}{4}$ печ. л.

Цена 18 руб.

Тираж 10 000 экз.

Зак. 1063/1231

Типография Оборонгиза

Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
362	18 сверху	через M	через \dot{M}	корр.
363	6 .	$\sum \frac{\bar{M} \Delta x}{2 EJ}$	$\sum \frac{\bar{M}^2 \Delta x}{2 EJ}$	авт.
404	16 .	$3 FJ$	$3 EJ$	тип.
416	15 .	фиг. 12.17	фиг. 12.13	ред.
416	10 снизу	M_2	\bar{M}_2	авт.
443	15 сверху	в точке a	в точке c	авт.
459	5 .	фиг. 14.2	фиг. 14.4	ред.
489	8 .	$\frac{2 \cdot 7 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 0,333}{50^2}$	$\frac{\pi^2 \cdot 7 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 0,333}{50^2}$	авт.

Афанасьев, Марин и др.
 Основы строительной механики.